UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci35fran

7330

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

E. PICARD.

P. APPELL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Mazarine, 3, Paris.

46586 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS, MANSION,
MOLK, RADAU, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOUEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXV. — ANNÉE 1911.

(XLVIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179879
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

QA
1
B8
v.46

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HELM (Georg). — Die Grundlehren der höheren Mathematik, zum gebrauch bei Anwendungen und Wiederholungen zusammengestellt. In-8, xvi-490 pages avec 387 figures dans le texte. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., 1910.

Il s'agit ici d'un Ouvrage destiné aux auditeurs des Écoles techniques supérieures d'Allemagne où, comme on sait, l'Enseignement et, en particulier, l'enseignement des Mathématiques est fortement organisé. Pour indiquer les mérites de cet Ouvrage, il nous suffira de donner une idée de son contenu. Les Chapitres successifs en sont consacrés à la notion de fonction, à la théorie des limites et des dérivées, aux applications du Calcul différentiel, aux méthodes les plus simples d'intégration, aux vecteurs et aux moments, à l'étude des courbes en coordonnées polaires et en coordonnées cartésiennes, à la théorie des séries infinies, à la Géométrie analytique à trois dimensions, aux dérivées partielles, aux intégrales multiples, à la Géométrie analytique plane, aux équations différentielles, aux intégrales, à l'interpolation, à la

Géométrie analytique de l'espace. L'exposition, très claire et très simple, se termine par l'étude de la série de Taylor et quelques notions sur la courbure des surfaces et des courbes dans l'espace.

D. J.

BERZOLARI LUIGI. — GEOMETRIA ANALITICA. Tomo I : *Il metodo delle coordinate*, con 54 incisioni. 1 volume in-12, XV-409 pages. Milan, U. Hœpli. 1911.

Ce petit Volume, qui fait partie des *Manuels Hœpli*, fera honneur à cette collection. Ecrit nécessairement avec brièveté, il contient tout ce qu'il y a d'essentiel à savoir sur la méthode des coordonnées. Pour donner une idée nette de son contenu, nous reproduirons les titres des Chapitres :

CAP. I. — Preliminari.

CAP. II. — Coordinate nelle forme fondamentali di prima specie.

CAP. III. — Projezioni ortogonali sopra una retta. Aplicazioni alla Trigonometria piana e sferica.

CAP. IV. — Coordinate nel piano punteggiato.

CAP. V. — Equazione di una retta.

CAP. VI. — Equazioni di curve piane.

CAP. VII. — Coordinate del piano rigato.

CAP. VIII. — Coordinate nello spazio punteggiato.

CAP. IX. — Equazione di un piano.

CAP. X. — Equazioni di una retta.

CAP. XI. — Equazioni di superficie e di curve.

CAP. XII. — Coordinate nello spazio di piani.

CAP. XIII. — Birapporto di quatro elementi di una forma di prima specie Gruppi armonici.

CAP. XIV. — Coordinate projettive e projettività nelle forme di prima specie.

CAP. XV. — Coordinate projettive omogenee nelle forme di seconda specie.

CAP. XVI. — Projettivita tra forma di seconda specie.

CAP. XVII. — Coordinate projettive omegenee nelle forme di terza specie.

CAP. XVIII. — Projettivita tra due spazi.

On voit combien de choses, sous un mince volume, contient ce petit Traité. D. J.

DUCHÊNE (Le Capitaine du Génie). — L'Aéroplane étudié et calculé par les Mathématiques élémentaires. In-8, 113 figures dans le texte, VII-306 pages. Paris, R. Chapelot et Cie, juin 1910.

En publiant ce Livre, M. Duchêne s'est proposé comme but d'exposer la théorie de l'aéroplane par les seules Mathématiques élémentaires. Il a voulu faire un Ouvrage s'adressant d'abord aux personnes qui, ayant reçu dans leur jeunesse une culture scientifique, désirent connaître les formules simples appliquées dans la théorie de l'aéroplane; ensuite aux élèves des classes scientifiques des lycées et collèges. L'auteur est arrivé à écrire un Chapitre substantiel, peut-être un peu long, qui devrait à présent se trouver dans un Ouvrage complet de Mécanique élémentaire. On remarque dans son Livre, uniquement consacré à l'aéroplane, une division méthodique du sujet, une séparation nette des diverses idées, de fréquents renvois aux notions précédemment exposées, une mise en relief, par l'emploi de caractères différents d'imprimerie, des principes et corollaires importants, qui feront de son travail un Manuel précieux pour les élèves ayant besoin de connaître la théorie de l'aéroplane en vue d'examens élémentaires, ainsi que pour les personnes du monde qui désirent pouvoir parler sciemment de la question à l'ordre du jour. Cet Ouvrage didactique a sa place marquée à côté des Livres de vulgarisation sur l'aviation, parce qu'il en sera un utile complément.

Je ne crois pas devoir cacher le regret que j'ai éprouvé en ne trouvant pas, dans un Livre qui est appelé à tenir une place honorable parmi les Ouvrages classiques, la partie historique absolument nécessaire pour se rendre bien compte des raisons qui ont conduit aux dispositions matérielles et aux formules algébriques actuellement employées par les constructeurs d'aéroplanes capables de voler. Il me paraît indispensable que ceux-ci connaissent cette partie historique, s'ils veulent chercher les perfectionnements que l'on est encore en droit d'attendre, afin de ne

pas faire de nouveau des essais qui ont été infructueux et même très dangereux.

Je me hâte de dire que l'expression de ce regret n'est pas une critique de l'Ouvrage de M. Duchêne, et qu'elle n'a d'autre but que d'exciter l'auteur à introduire, dans la seconde édition, un Chapitre où la partie historique relative aux divers essais de construction de planeurs, depuis un siècle, serait exposée dans le but de signaler aux inventeurs les idées reconnues mauvaises.

Er. L.

APPENDIX SCIENTIAM SPATII ABSOLUTE VERAM EXHIBENS A VERITATE AUT FALSITATE AXIOMATIS XI EUCLIDEI (A PRIORI HAUD UNQUAM DECIDENDA) INDEPENDENTEM; ADJECTA AD CASUM FALCITATIS, QUADRATURA CIRCULI GEOMETRICA; auctore *Joanne Bolyai* de eadem, geometrarum in exercitu Cæsareo Regio Austriaco castrensium capitaneo (1832). Fac simile editio prima Maros-vasarhelyini 1907, typis a adi de szilag y fökeresztur. — Hæc Johannis Bolyai de eadem Appendix prima vice lucem vidit in patris sui tentamine cui adnexa est (Maros Vasarhelyini 1832, typis Collegii Reformatorum per Josephum et Simeonem Kali de Felsö-vist), nunc hujus editionis fac simile curavit : Stephanus Bias junior de Ders.

Il nous suffira évidemment de signaler à nos lecteurs cette réimpression fac simile, sans doute, par le procédé dit *de l'anastatique*, du célèbre appendice de Jean Bolyai.

ENESTRÖM (GUSTAF). — VERZEICHNIS DER SCHRIFTEN LEONHARD EULERS. Erste Lieferung. 1 volume in-8, 109 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1910.

Ce travail, qui a dû coûter beaucoup de peine à son savant auteur, peut être envisagé comme une excellente préparation à la publication projetée des Œuvres d'Euler. Ce premier fascicule contient la liste des écrits du grand géomètre suisse, rangés chronologiquement d'après la date de leur impression. Elle commence à 1727 avec un Mémoire sur la construction des lignes isochrones dans un milieu résistant et finit en 1908 avec la publication de quelques

lignes d'une lettre adressée à la « Royal Society ». Elle ne comprend pas moins de 865 numéros.

La seconde livraison comprendra environ 10 feuilles d'impression. Nous reviendrons sur l'ensemble de la publication lorsqu'elle aura été complétée. C. J.

FARAUT (P.-G.). ASTRONOMIE CAMBODGIENNE, publiée sous les auspices de S. M. le Roi du Cambodge *Sisovath*, de M. *Luce*, Résident supérieur de la République française au Cambodge et de la Société des Études indo-chinoises. 1 volume in-4 de 283 pages, avec figures, Tableaux, une planche donnant le Zodiaque Khmer. Saïgon, F.-H. Schneider, 1er juillet 1910.

Après avoir lu attentivement le beau travail sur l'*Astronomie cambodgienne* que M. P.-G. Faraut, vient de présenter au monde savant, j'ai éprouvé l'impression que l'Auteur, qui s'est consacré pendant de longues années à une tâche pénible, est parvenu à faire parfaitement connaître ce qui reste d'un passé glorieux. M. Faraut mérite d'être hautement loué pour avoir produit une œuvre que les astronomes liront avec le plus vif intérêt. Parmi les difficultés qu'il a surmontées, il convient de citer d'abord celle de se rendre maître d'une langue très synthétique, au point de vue scientifique surtout, pour pouvoir comprendre et suivre le cours d'Astronomie et Astrologie du Hora Royal, ou Astronome Royal; puis, celle d'exposer, sous la direction de ce savant, des questions d'autant plus pénibles à comprendre que les calculs qui s'y rapportent sont, à présent, faits d'après de très anciennes formules que le Hora Royal lui-même ne peut démontrer. Cet Ouvrage permettra de corriger bon nombre d'erreurs qui rendent l'histoire de l'Inde confuse et même contradictoire en bien des points.

Parmi les sujets traités dans ce Livre, citons la méthode de mesure du temps; l'étude du Soleil, de la Lune, avec la manière de se servir des Tables solaires et lunaires; l'établissement du Calendrier; les différentes Ères; l'explication de l'anomalie vraie de la Lune; de longs détails relatifs au Calendrier; la prédiction des éclipses de Lune et de Soleil, faite exactement par des calculs non démontrés; l'étude des mouvements des planètes Mars, Mercure, Jupiter, Vénus, Saturne, avec les durées de leurs révolutions; la

méthode des Khmers pour déterminer la position des planètes : la description du Zodiaque au point de vue de son application à l'Astrologie.

Autrefois la Science et les Arts florissaient dans le Cambodge. Pour montrer en quelle décadence ce pays est tombé, résumons quelques-uns des passages de l'*Introduction* de l'Ouvrage de M. G. Faraut.

Les Khmers considèrent la Terre comme une immense surface plane, circulaire, ayant en son milieu un massif montagneux composé de plusieurs pics très élevés. Autour du pic central, plus élevé que tous les autres, appelé Mont Mérou, tous les corps célestes accomplissent leur révolution diurne, la terre étant immobile. Outre ce mouvement circulaire, le Soleil possède deux mouvements verticaux, l'un d'ascension, l'autre de descente, qui s'effectuent en un an, le Soleil parcourant chaque jour un échelon du Mont Mérou. La Lune effectue des mouvements analogues en 27 jours 7 heures : cette durée constitue le mois cambodgien sidéral, le mois lunaire étant de 29 jours et demi. Les Khmers connaissent les cinq planètes Vénus, Mercure, Mars, Jupiter et Saturne, cet ordre étant celui de leurs distances à la Terre. Ils ont formé 65 groupes d'étoiles ; la grande Ourse leur sert à fixer l'étoile immobile où la pointe du Mont Mérou semble se projeter dans le ciel.

Er. L.

BELOT (E.). — Essai de Cosmogonie tourbillonnaire. *L'Origine dualiste des Mondes*. 1 volume grand in-8, XI-280 pages, 50 figures dont 3 hors texte. Paris, Gauthier-Villars, janvier 1911.

Le domaine de l'ingénieur, limité jusqu'ici à notre planète, semble maintenant s'étendre jusqu'aux astres. C'est comme ingénieur, rompu à l'invention des machines, que M. E. Belot, d'ailleurs ancien élève de Faye, a cherché à scruter la Mécanique cosmique et s'est élevé jusqu'à une conception nouvelle du mécanisme de l'Univers. A voir l'important faisceau de preuves qu'il groupe autour de sa *Cosmogonie tourbillonnaire*, on peut croire que cette méthode de recherches est aussi féconde que l'étude classique de la Mecanique newtonienne.

Celle-ci, d'après l'auteur (*Introduction* et Chap. XIII), serait seulement le dernier chapitre de la Mécanique céleste générale : une mécanique bien différente régirait à leur origine les systèmes cosmiques où la dispersion extrême des molécules et leurs vitesses énormes (de l'ordre de la vitesse de la lumière) ne permettraient pas à la loi de Newton de jouer aucun rôle mesurable, pas plus qu'elle n'intervient dans le calcul des trajectoires des corpuscules cathodiques.

Ainsi s'éliminent d'elles-mêmes les difficultés analytiques inhérentes aux applications de la loi d'attraction newtonienne.

Comment donc expliquer que la cosmogonie de Laplace et celle de ses successeurs (Roche, Faye, du Ligondès) n'aient abouti à aucune loi vérifiable? C'est sans doute, dit l'Auteur, que le *monisme* d'une seule nébuleuse originelle ne renferme pas assez de variables indépendantes pour résoudre le problème : il faut alors considérer deux corps à l'origine, et ce *dualisme* sera corrélatif de l'introduction en cosmogonie des *translations* qui la réduisent en une *balistique cosmique* et qui ont été négligées jusqu'ici, bien que l'énergie cinétique de translation du système solaire soit 200 fois plus grande que son énergie giratoire.

Les faits concernant les *Novæ* (p. 40) viennent aussitôt appuyer cette première hypothèse qui se précise sous la forme suivante : l'un des corps originels sera une *nébuleuse amorphe douée de translation* (et non de rotation, comme dans l'hypothèse de Laplace); l'autre corps apportera au système dualiste la rotation sous forme d'un *tube-tourbillon gazeux doué de translation*. Ici encore les faits viennent confirmer cette hypothèse, puisque les filaments nébuleux reliant plusieurs des Pléiades ne peuvent être que des tourbillons.

On ne saurait, d'ailleurs, reprocher à M. Belot la complexité de ses hypothèses; il faut, évidemment, plus de prémisses pour définir deux corps qu'un seul. D'après la théorie des tourbillons et les expériences d'Emden (Chap. IV), le choc du tourbillon sur la nébuleuse le fera vibrer, en divisant sa longueur en ventres et nœuds équidistants (Chap. V). De chaque ventre émanera une nappe concentrique au tourbillon, projetée vers le plan de la nébuleuse qui deviendra l'écliptique. Ces différentes *nappes planétaires* ont pour profil des courbes logarithmiques, en sorte que

les distances de leurs centres aux points où elles rencontrent l'écliptique suivent une *loi exponentielle*. Cette loi se trouve être précisément la loi des distances des planètes et satellites : la vérification a lieu avec une précision inespérée (*voir* le Tableau de la page 19), de sorte que cette loi peut remplacer la loi empirique de Bode.

Mais chaque nappe planétaire, par le choc latéral de la nébuleuse en translation, se résout elle-même en un *tourbillon planétaire* dont l'axe est dirigé suivant la tangente au profil de la nappe. L'inclinaison de ces divers axes, calculée théoriquement (p. 22), coïncide avec l'inclinaison des axes des diverses planètes : c'est une loi nouvelle, non soupçonnée par les astronomes, et qui, appliquée aux petites planètes, révèle aussitôt un fait nouveau : l'inclinaison de leurs nappes sur l'écliptique qui se lit sur la Carte dressée par l'Auteur (p. 132).

Dans les Chapitres II et VIII, M. Belot démontre le fait réel, mais paradoxal, que l'intensité de la rotation croît avec la masse des planètes, et arrive à une *loi des rotations* analogue à la troisième loi de Képler pour les révolutions. De la durée de rotation de trois planètes, il déduit celle du Soleil (p. 208) qui doit être comprise entre $24^{j},5$ et $28^{j},5$. Une théorie mathématique simple montre (p. 121) comment, à cause de Jupiter, les petites planètes ont manqué de rotation et par suite de masse.

Le Soleil résultera de la condensation de deux traînées, dirigées vers l'apex et l'anti-apex, suivant lesquelles le tourbillon primitif étire la nébuleuse conformément à la théorie de Schiaparelli (Chap. X). Les comètes sont les résidus non condensés de ces traînées (Chap. XI). Parmi les systèmes sidéraux dont l'Auteur donne une classification (Chap. XII) dans des formules quasi-chimiques, les plus mystérieux paraissaient être les *nébuleuses spirales* : or, elles trouvent leur détermination complète dans les mêmes équations qui expliquent la formation d'un système à planètes (p. 237).

Parmi les résultats auxquels arrive M. Belot, il faut citer encore : l'explication très simple, par un tore-tourbillon, de la rotation bizarre d'Uranus (p. 89) et des rotations et révolutions rétrogrades (p. 180) ; la détermination *a priori*, par une formule générale des excentricités, de l'excentricité de l'orbite lunaire (p. 94) ;

la démonstration précise que la Lune est le quatrième satellite de la Terre (p. 152); une théorie nouvelle, vérifiable par une suggestive expérience, de la formation des reliefs terrestres (p. 159); une détermination théorique des lacunes et des maxima de densité des petites planètes (p. 139).

En résumé, dans une voie entièrement neuve et originale, M. E. Belot est arrivé à la démonstration de trois lois nouvelles du système solaire qui, indépendamment de toute théorie, présenteraient déjà une grande valeur par les vérifications très précises qu'elles donnent et par les faits qu'elle permettent de prévoir. La lecture du dernier Chapitre, intitulé *Exposition synthétique du système dualiste des Mondes*, fait comprendre la singulière puissance de cette synthèse cosmogonique qui, prenant pour base l'idée cartésienne des tourbillons, part d'un dualisme originel pour s'élever jusqu'à l'explication de la structure de l'Univers.

Ce Livre est écrit en un style clair qui montre que l'Auteur est bien maître de son sujet. Les formules mathématiques qu'il contient, étant simples et peu nombreuses, n'embarrassent pas le lecteur qui veut avoir une idée nette de la nouvelle hypothèse à laquelle M. E. Belot réfléchissait depuis l'année 1903.

Er. L.

FRANKLAND (William Barrett). — Theories of parallelism. *An historical critique*. 1 volume in-8, xviii-70 pages. Cambridge, at the University Press, 1910.

Les matières que contient cet Opuscule étaient rédigées quand Sir Thomas L. Heath fit paraître son savant Ouvrage intitulé *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (1908). M. W. B. Frankland a pensé qu'il n'était cependant pas inutile de présenter par ordre chronologique les idées fondamentales que les principaux géomètres ont, depuis l'antiquité, émises sur la *théorie des parallèles*. Il a très habilement extrait de leurs Ouvrages tout ce qui a trait à cette théorie, dont dérive la science de l'espace, et montré les défauts des diverses démonstrations proposées depuis Euclide. Bien que le travail de M. Frankland ne soit qu'une esquisse de l'importante question qui a suscité tant de recherches, il est très

utile, parce qu'on y rencontre, outre les indications bibliographiques sur les Ouvrages des géomètres cités, celles qui sont relatives à plusieurs écrits que l'Auteur a consultés en outre de ces Ouvrages.

Parmi les noms des 41 savants dont les théories du parallélisme sont exposées, citons Euclide, Ptolémée, Gerbert, Clavius, Wallis, Leibniz, Lambert, Bertrand (de Genève), Laplace, Gauss, Carnot, W. et J. Bolyai, Legendre, Lobatchefsky, Riemann, Cayley, Beltrami, Klein, Newcomb. Er. L.

D'ANDRÉ (Le Capitaine). — La Mitrailleuse-aviatrice. 1 volume in-8, XVI-289 pages, 11 figures. Paris, R. Chapelot et Cie, 1910.

On sait que l'aéroplane a déjà été appliqué, dans l'art militaire, aux reconnaissances et au jet de bombes de ménilite ou d'explosifs puissants. Le Capitaine D'André, de la Mission française du Pérou, vient d'indiquer un autre rôle à faire jouer à l'avion militaire. Ce rôle consiste à transporter rapidement, par-dessus tous les obstacles du terrain, une mitrailleuse pour faire le tir soit sur un point, soit sur une ligne, soit sur une surface. Dans le dernier cas, le clipsomètre du Capitaine D'André sert à déterminer instantanément sur la carte les emplacements de tir à occuper pour raser les positions de l'ennemi. L'Auteur démontre qu'on peut transporter la mitrailleuse sur un appareil dérivé des cerfs-volants du Capitaine Saconnay. Le tireur reste à terre, pointe la mitrailleuse à la hauteur voulue et lance l'engin meurtrier sans aucun danger pour lui-même. Il semble que ce tir transporté par avion soit d'une application facile.

Le Livre technique du Capitaine D'André est écrit d'une plume alerte et facile, comme d'un jet; il contient un grand nombre d'anecdotes qui en rendent la lecture attrayante; enfin, il se termine par une esquisse des progrès obtenus en Aviation depuis les ornithoptères jusqu'aux aéroplanes contemporains.

Er. L.

LEBON (ERNEST). — PAUL APPELL, *biographie, bibliographie analytique des écrits*. 1 volume grand in-8 de 71 pages, orné d'une héliogravure de Dujardin. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Ce Volume intéressant fait partie de la Collection des *Savants du Jour* et fait suite à ceux qui concernent MM. Henri Poincaré, Émile Picard, Gaston Darboux. L'auteur, comme dans les Ouvrages que nous venons de citer, s'est plu à parcourir tous les écrits originaux de M. Appell et les analyses dont ils ont été l'objet. Au reste, nous ne pouvons mieux faire que de reproduire ici les paroles que M. Darboux a prononcées en présentant le Volume à l'Académie des Sciences.

« Cette quatrième Notice, a dit M. Darboux, est encore consacrée à un géomètre, et j'ajoute à un de nos confrères les plus sympathiques, *Paul Appell*, Doyen et Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Paris.

» On y remarque le même soin, la même compétence, la même exactitude que dans les Notices précédentes ; j'y dois signaler particulièrement la Biographie qui ouvre le Volume et a été rédigée par M. Ernest Lebon. Elle contient les détails les plus touchants sur la vie et la famille de notre Confrère, alsacien d'origine, et qui a toujours conservé au fond du cœur l'affection la plus ardente pour le pays où s'est écoulée sa jeunesse et où il prend tant de plaisir à retourner chaque année.

» Ce nouveau Volume est une contribution précieuse à l'histoire des Sciences, et l'on doit désirer que M. Ernest Lebon continue avec la même ardeur et le même zèle l'œuvre si utile et si française à laquelle il s'est consacré. »

HEATH (SIR THOMAS L.). — DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA. *A study in the History of Greek Algebra*. Second edition. 1 volume large 8 vo., VII-387 pages. Cambridge, at the University Press, October 1910.

L'Ouvrage publié en 1885 par M. Thomas Heath, sur Diophante, fut, dans ce *Bulletin* (1886, p. 148-157), l'objet d'une sérieuse

analyse critique due au regretté Paul Tannery, qui, ensuite, a fixé définitivement le texte grec de Diophante. L'édition s'épuisa rapidement : mais l'auteur ne voulut pas en donner une nouvelle avant d'avoir bien étudié tous les travaux publiés sur Diophante depuis une vingtaine d'années. Il a tenu compte des critiques relatives aux incorrections que Paul Tannery, le grand historien français des Sciences, avait relevées dans l'*Appendice* de la première édition : des *Métriques* de Héron d'Alexandrie ; des exemples anciens de l'Analyse indéterminée en Grèce, publiés par MM. Heiberg et Zeuthen dans *Bibliotheca mathematica* (1907-1908) ; de nombreuses Notes contenues dans ce précieux recueil ; des aperçus qui se trouvent dans la *Real-Encyclopädie*, de Pauly-Wissowa ; des renseignements donnés par beaucoup d'Ouvrages ou de Périodiques cités en Notes au bas des pages.

Cette seconde édition contient de très nombreuses annotations, dues à l'Auteur, la plupart inédites, aux propositions de Diophante ; ces annotations sont rarement des généralisations ; elles ont un but plus important : celui de donner, outre les extensions et les méthodes indiquées par Fermat dans ses Notes, des comparaisons entre les méthodes de Diophante et celles d'Euler et des algébristes modernes (p. 83-86). Ces comparaisons montrent que, dans certains cas, la méthode de Diophante est plus avantageuse que les méthodes nouvelles : par exemple, pour le problème de l'« équation double », la solution de Diophante dans le cas général est plus simple que celle d'Euler dans un cas particulier.

L'Ouvrage de Sir Thomas Heath est formé de trois parties.

La première partie (p. 1-127), intitulée *Introduction*, établie en comparant les résultats de nombreuses et savantes recherches, est divisée en six chapitres. Les cinq premiers contiennent une Notice sur Diophante et ses travaux ; l'indication détaillée des manuscrits et des écrits imprimés relatifs à cet arithméticien grec ; l'explication des notations et des définitions adoptées par Diophante ; l'exposé des méthodes que celui-ci emploie pour résoudre les équations déterminées et indéterminées, avec de nombreuses Notes où ces méthodes anciennes sont comparées aux modernes ; les porismes et propositions relatifs aux propriétés des nombres et énoncés ou appliqués dans l'*Arithmétique* de Diophante ; un chapitre final où il est démontré que ce dernier n'a pas inventé l'Algèbre et qu'il n'a

pas le premier résolu les problèmes indéterminés du second degré, mais que son travail sur l'Arithmétique, tout en étant une savante et originale compilation des découvertes de ses devanciers, contient de nombreux résultats dus à ses propres recherches.

La seconde partie (p. 129-266) est divisée en trois sections intitulées *The Arithmetica*, *On polygonal numbers* et *Conspectus of the Arithmetica*. La première section, qui est la plus longue, contient les six Livres de l'Arithmétique de Diophante. Ces Livres comprennent seulement des solutions de problèmes qui sont : du premier degré dans le Livre I, du deuxième degré dans les Livres II et III, de divers degrés supérieurs au premier dans les Livres IV, V et VI, avec des applications de l'Algèbre à la géométrie du triangle.

La troisième partie (p. 267-380), intitulée *Supplement*, est divisée en six sections. Les cinq premières renferment des Notes, théorèmes et problèmes de Fermat sur la décomposition des nombres en deux, trois ou quatre carrés; sur diverses formes des nombres premiers ; sur l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$, avec l'analyse des nombreux travaux anciens et modernes relatifs à cette question ; sur l'expression en nombres rationnels des côtés d'un triangle rectangle, etc. La sixième section est consacrée à quelques-unes des plus remarquables solutions données par Euler aux problèmes difficiles de Diophante.

En lisant ce qui est cité par Sir Thomas Heath des beaux travaux de Fermat, tant dans les cinq premières sections du *Supplement* que dans les annotations aux problèmes de Diophante, on reconnaît que l'Auteur a voulu tout particulièrement faire l'éloge du grand Conseiller au Parlement de Toulouse, en essayant de combler une lacune dans l'histoire des Mathématiques.

Er. L.

BIANCHI (Luigi). — Vorlesungen über Differentialgeometrie, autorisierte deutsche übersetzung, von *Max Lukat*. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. In-8°, xviii-721 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

L'Ouvrage excellent de M. Bianchi est bien connu de tous ceux qui travaillent la Géométrie infinitésimale, et la traduction alle-

mande que nous devions à M. Max Lukat avait encore élargi le cercle de ses lecteurs. Il faut se féliciter que cette édition ait été rapidement épuisée et qu'elle ait ainsi donné à MM. Bianchi et Lukat l'occasion de nous en donner une seconde, où l'on aura pu tenir compte des progrès acquis à la Géométrie infinitésimale dans ces derniers temps. Bien que le plan de l'Ouvrage n'ait pas été essentiellement changé, il nous paraît convenable de l'analyser Chapitre par Chapitre, afin que nos lecteurs soient bien au courant des précieux matériaux qu'ils pourront y rencontrer et, au besoin, utiliser pour leurs études.

Le Chapitre I traite de la théorie des courbes à double courbure. Nous y signalerons, à côté des notions élémentaires et essentielles, la théorie des enveloppes à un paramètre et des surfaces développables, celle des trajectoires orthogonales d'un plan mobile, quelques mots sur les courbes de Bertrand.

Le Chapitre II traite des formes quadratiques de différentielles binaires.

On y donne la notion des invariants différentiels et des paramètres différentiels. On commence par le paramètre différentiel de Beltrami $\Delta\varphi$ dont la racine carrée s'appelle aujourd'hui le *gradient* et qui donne naissance au paramètre mixte $\Delta(\varphi, \psi)$. Puis l'on expose la théorie de l'équivalence des formes de différentielles en introduisant les idées et les notations de Christoffel. Cela conduit au second paramètre différentiel de Beltrami et à une notion fort importante qui a été mise en évidence, croyons-nous, pour la première fois, par M. Ricci : celle des dérivées secondes d'une fonction selon la forme. Poursuivant l'étude des idées de Christoffel et de Riemann, l'auteur parvient à la notion de *courbure* d'une forme, laquelle le conduit à étudier les formes à courbure constante et en particulier à courbure nulle. Le Chapitre se termine par deux alinéas qui ne sont pas les moins intéressants et qui se rapportent à deux formes quadratiques simultanées. L'auteur montre qu'il existe une transformation de variables qui les débarrasse des rectangles, ce qui équivaut au fond à un théorème célèbre de Tissot. Ce sujet pourrait prendre une grande extension. M. Bianchi se borne à indiquer et à démontrer ce qui lui sera utile dans la théorie des surfaces.

Le Chapitre III traite des coordonnées curvilignes sur une sur-

face et de la représentation conforme. Après les notions élémentaires, M. Bianchi montre ce que deviennent ici les symboles de Christoffel, les paramètres de Beltrami, la courbure de la forme. Il considère ensuite en particulier les systèmes isothermes d'où dérive naturellement un aperçu sur le problème de la représentation conforme d'une surface sur une autre et en particulier sur le plan. On trouve dans ce Chapitre quelques mots sur la projection stéréographique, et en particulier la solution d'un problème important pour la suite : détermination de tous les systèmes orthogonaux formés de deux familles de cercles sur la sphère. En terminant, l'auteur étudie la belle réduction due à Cayley d'une rotation autour d'un point à une substitution linéaire effectuée sur la variable complexe attachée, suivant les idées de Riemann, à un point de la sphère.

Le Chapitre IV a pour titre : *Les équations fondamentales sur la théorie des surfaces.* La théorie y est basée sur la considération des deux formes quadratiques fondamentales, l'une représentant l'élément linéaire, l'autre étant le premier membre de l'équation différentielle des lignes asymptotiques. On y donne les formules de Gauss, celles auxquelles est attaché le nom de Codazzi, et l'on démontre que, lorsqu'elles sont vérifiées, il existe une surface correspondante. Puis viennent : la théorie des lignes de courbure, le théorème de Meusnier, le théorème d'Euler sur les courbures normales, l'indicatrice de Dupin, la courbure totale et moyenne, la notion si importante aujourd'hui des systèmes conjugués, les rapports de cette théorie et de celle des lignes asymptotiques avec les équations linéaires, suivis de quelques applications.

Le Chapitre suivant traite de la représentation sphérique des surfaces d'après les idées de Gauss. On y trouve le théorème d'Enneper relatif à la torsion des asymptotiques, les formules générales relatives à la représentation sphérique, la théorie du système de coordonnées curvilignes formé par les lignes asymptotiques, les formules de Lelieuvre, l'étude des surfaces rapportées à un système isotherme-conjugué. M. Bianchi a désigné sous ce nom les systèmes pour lesquels les lignes asymptotiques ont pour équations

$$u \pm iv = \text{const.},$$

u et v étant les coordonnées curvilignes. M. Bianchi fait connaître

ensuite les formules de Weingarten relatives aux coordonnées tangentielles et termine par une application : la détermination des surfaces qui admettent une famille de lignes de courbure situées dans des plans parallèles.

Le Chapitre VI est consacré à la théorie de la courbure géodésique et des lignes géodésiques. Il contient la formule de Bonnet, relative à la courbure géodésique; celle que l'on doit à Liouville pour exprimer la courbure totale de la surface à l'aide des rayons de courbure géodésique des deux courbes coordonnées, puis vient l'équation différentielle de la ligne géodésique, l'application du calcul des variations, la forme que Gauss a donnée à l'équation différentielle des lignes géodésiques, la théorie des courbes parallèles, celle des cercles géodésiques (l'auteur appelle ainsi les courbes normales à toutes les géodésiques passant par un point). L'auteur étudie ensuite l'élément si mal dénommé par Ossian Bonnet : *torsion géodésique*. Il donne les théorèmes généraux relatifs à l'intégration de l'équation différentielle des lignes géodésiques et considère en particulier ce que l'on appelle *l'élément linéaire de Liouville*. Puis vient le théorème de Gauss sur la courbure totale d'un triangle géodésique et la propriété bien connue des systèmes de coordonnées curvilignes formés de deux familles de courbes à courbure géodésique constante.

Le Chapitre VII aborde la théorie des surfaces applicables. L'auteur résout d'abord le problème fondamental : reconnaître si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre. Cela le conduit à parler des surfaces à courbure constante, de celles qui peuvent être appliquées sur elles-mêmes par un mouvement continu des surfaces de révolution qui sont applicables les unes sur les autres, du théorème de Bour, relatif aux surfaces hélicoïdes. Puis vient le problème de la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. On y donne l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend une des coordonnées du point de la surface cherchée. Puis on examine différentes questions relatives à la déformation. Vient ensuite une théorie importante relative à ce que M. Bianchi appelle les *asymptotiques virtuelles*, c'est-à-dire les lignes qui peuvent devenir virtuelles après la déformation.

Le Chapitre VIII contient l'application des théories précédentes à la déformation des surfaces gauches. On démontre d'abord le

théorème de Bonnet d'après lequel deux surfaces gauches applicables l'une sur l'autre doivent avoir leurs génératrices rectilignes correspondantes, à moins qu'elles ne soient applicables sur une surface du second degré. M. Bianchi définit la ligne de striction d'une surface réglée et démontre à ce sujet une proposition également due à Bonnet; puis il fait connaître l'équation et les propriétés des lignes asymptotiques curvilignes, la notion de point central due à Chasles. Il développe ensuite les méthodes que Minding et Beltrami ont données pour l'étude de la déformation. Le Chapitre se termine par la recherche des surfaces réglées applicables sur des surfaces de révolution et par la démonstration d'un remarquable théorème de M. Chieffi. Ce théorème peut s'énoncer comme il suit :

Considérons une surface (S) applicable sur une surface réglée (R), mais cela de telle manière que les géodésiques g de (S) qui correspondent aux génératrices rectilignes de (R) ne soient pas elles-mêmes rectilignes. Prenons sur (S) une asymptotique quelconque a et construisons, en chaque point de a, la tangente à la ligne géodésique g qui y passe. Toutes ces tangentes engendrent une surface réglée (R) qui est applicable sur (S) avec conservation de l'asymptotique a.

Le Chapitre IX traite de la surface des centres de courbure et des théorèmes de Weingarten, On y fait connaître en particulier les théorèmes de Ribaucour relatifs à la correspondance des lignes asymptotiques et des lignes de courbure sur les deux nappes de la développée.

Le Chapitre X considère les congruences rectilignes. On y définit les points limites, les plans principaux, les surfaces focales. Des alinéas particuliers sont consacrés aux congruences isotropes de Ribaucour, au théorème de Malus-Dupin, à la détermination des congruences d'après leur image sphérique, aux congruences de M. Guichard.

Le Chapitre XI traite de la déformation infiniment petite et de la correspondance avec orthogonalité des éléments. M. Bianchi y introduit la fonction caractéristique de Weingarten, donne l'équation à laquelle elle satisfait et fait connaître diverses propriétés relatives à ce sujet, qui pourrait recevoir, pour ainsi dire, des développements illimités. Signalons en particulier l'étude, d'après Ribaucour, d'une classe de congruences rectilignes dont les sur-

faces développables coupent la surface moyenne suivant un système conjugué.

Le Chapitre XII envisage ce que M. Bianchi appelle les congruences W. Ce sont les congruences telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale. Elles ont été déterminées en premier lieu par M. Guichard. Ce Chapitre contient aussi la détermination, faite pour la première fois par M. Darboux, des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution et un théorème de M. Cosserat relatif à la déformation continue d'une surface dans laquelle un système conjugué ne cesse pas d'être conjugué.

Le Chapitre XIII est intitulé : *Les systèmes de cercles normaux*. On y recherche d'abord la condition pour qu'une congruence de courbes admette des surfaces trajectoires orthogonales et on l'applique tout de suite au cas important où les courbes sont des cercles. C'est donc au fond la théorie des systèmes cycliques qui se trouve développée ici. On a l'essentiel des propositions; l'étude des axes des cercles, l'existence du système triple correspondant, les systèmes cycliques où tous les cercles ont le même rayon, etc.

Les Chapitres XIV et XV abordent la théorie si intéressante des surfaces minima.

Le Chapitre XV, notamment, traite de ce que M. Darboux a appelé le *problème de Plateau*. Une large part y est faite aux recherches fondamentales de M. Schwarz.

Le Chapitre XVI traite de la géométrie pseudosphérique. On y fait la carte de la pseudosphère sur le demi-plan et l'on y développe toutes les relations avec la Géométrie non euclidienne. Signalons en particulier la représentation de Beltrami, dans laquelle les géodésiques de la surface sont représentées par les droites de la Carte.

Le Chapitre XVII traite de la détermination des surfaces pseudosphériques et de la belle transformation de Bäcklund. M. Bianchi y montre ce que l'on peut tirer du théorème général de Cauchy relatif à l'intégration des équations aux dérivées partielles et il applique la méthode d'approximation successive de M. Emile Picard à la détermination de la surface pseudosphérique admettant deux asymptotiques données *a priori*. A propos de la transformation de Bäcklund, M. Bianchi développe son beau théorème

relatif à la permutabilité des transformations, et il utilise les transformations imaginaires conjuguées introduites dans cette théorie par M. Darboux.

Le Chapitre XVIII est consacré au développement des très beaux théorèmes que M. Guichard a fait connaître en 1899 sur la déformation des quadriques de révolution, théorèmes qui ont été ensuite démontrés de différentes manières par M. Darboux et par l'auteur.

Les Chapitres XIX à XXI contiennent le développement des belles recherches de M. Bianchi sur la déformation des quadriques, recherches qui, comme on sait, ont été couronnées par l'Académie des Sciences de Paris.

L'Ouvrage se termine par trois Chapitres consacrés à la théorie des systèmes triples orthogonaux. Dans le dernier, l'auteur fait connaître ce que l'on doit à M. Weingarten et à lui-même sur les familles de Lamé formées avec des surfaces à courbure constante.

Cet exposé des principales théories contenues dans les divers Chapitres de l'Ouvrage que nous analysons explique le succès qu'a obtenu l'édition précédente et fait prévoir celui qui attend également la nouvelle édition. J. G.

MÉLANGES.

SUR LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. GASTON DARBOUX.

Dans un beau Mémoire sur la construction des Cartes géographiques (*voir* les *Œuvres complètes de Tchebychef*, t. I, p. 283 et suiv.), Tchebychef s'est occupé d'une très intéressante question relative aux Cartes géographiques. Parmi tous les modes de représentation conforme qu'on peut appliquer à la Carte d'un

pays tel que la France, la Russie, etc., il a cherché celui qui devait être le plus avantageux, et il est arrivé, au moins dans le cas des surfaces de révolution, à une conclusion très simple. C'est que ce mode le plus avantageux, s'il existe, doit être celui pour lequel le rapport de similitude de la Carte à la région représentée doit être constant pour tout le contour de la région.

Ce beau théorème n'est pas démontré, ni même énoncé nettement. Tchebychef n'a, malheureusement, pas publié le développement de son analyse. C'est ce développement que nous nous proposons de donner ici, en envisageant dès le début une surface quelconque.

Quelle est d'abord la définition du meilleur mode de représentation conforme pour un pays? Lagrange, dans ses Mémoires sur les Cartes géographiques; Bonnet, qui l'a suivi dans sa thèse de doctorat, ne s'étaient élevés à aucune théorie générale. Voici sans doute comment on peut rétablir la conception de Tchebychef.

La variation d'une fonction autour d'un point d'une surface dépend, comme on sait, de son *gradient*, c'est-à-dire de la dérivée de la fonction suivant la direction de la normale à la courbe sur laquelle la fonction demeure constante. Si l'élément de la surface est donné par la formule

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

et si l'on introduit le paramètre différentiel du premier ordre

$$\Delta\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}, \tag{2}$$

on sait que le gradient de φ est égal à $\sqrt{\Delta\varphi}$. Si m est le rapport de similitude de la Carte à la surface, on pourrait être conduit à considérer le gradient de m; mais, de même qu'on préfère les erreurs relatives aux erreurs absolues, il semble qu'il vaut mieux considérer le gradient de $\log m$.

On pourrait chercher à rendre le plus petite possible la valeur moyenne de ce gradient. Mais, comme il est irrationnel, nous préférons, en souvenir de la méthode des moindres carrés, prendre la seconde puissance. *Et nous considérerons comme le mode le*

plus avantageux celui pour lequel la valeur moyenne du carré du gradient de $\log m$ *sera la plus petite possible.*

Cette valeur moyenne est égale au quotient, par l'aire de la région à représenter, de l'intégrale double

$$(3) \qquad I = \int\int \Delta \log m \, da,$$

où da désigne l'élément d'aire et où l'intégration est étendue à toute la région considérée. C'est donc l'intégrale I qu'il s'agit de rendre minimum.

On sait d'ailleurs, depuis Beltrami, que toutes les valeurs possibles de m satisfont à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(4) \qquad \Delta_2 \log m = \frac{1}{RR'},$$

R et R' étant les rayons de courbure aux points considérés et $\Delta_2 \varphi$ désignant le paramètre différentiel du second ordre

$$(5) \qquad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{F}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{F}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

où l'on a posé

$$(6) \qquad H = \sqrt{EG - F^2}.$$

D'après cela, si l'on pose

$$(7) \qquad \log m = \varphi$$

et si l'on donne à φ un accroissement ψ, il résulte de l'équation (4) que ψ satisfera nécessairement à l'équation

$$(8) \qquad \Delta_2 \psi = 0$$

et sera, par conséquent, ce qu'on appelle une *fonction harmonique*.

Lorsqu'on aura donné à φ l'accroissement ψ, on aura évidemment

$$(9) \qquad \delta I = 2\int\int \Delta(\varphi, \psi)\, da + \int\int \Delta\psi \, da.$$

Or on a, d'après la formule de Green et en tenant compte de

l'équation (8),

$$\int\int \Delta(\varphi, \psi)\, da = -\int_C \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds. \tag{10}$$

l'intégrale du second membre étant étendue à tout le contour de la région et $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ désignant la dérivée de ψ suivant la normale intérieure au contour. Nous aurons donc, pour δI, l'expression définitive

$$\delta I = \int_C \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds - \int\int \Delta\psi\, da. \tag{11}$$

Remarquons d'ailleurs que la formule de Green, appliquée au cas où l'on suppose $\varphi = 1$, nous donnerait la relation

$$\int_C \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds = 0 \tag{12}$$

qui assujettit à une condition les valeurs que prend $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sur le contour.

Comme on peut toujours supposer la fonction ψ multipliée par une constante aussi petite qu'on le veut, il est clair qu'en effectuant cette opération on pourra donner au signe du second membre de la formule (11) celui de l'intégrale simple. Donc une condition nécessaire du minimum sera qu'on ait

$$\int_C \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds = 0. \tag{13}$$

Remarquons d'ailleurs que cette condition *sera suffisante;* car si elle est remplie, δI se réduira à une intégrale double dont tous les éléments seront positifs.

Nous verrons plus loin qu'on peut toujours trouver une fonction harmonique ψ telle que $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ prenne telles valeurs qu'on voudra sur le contour, à la seule condition que ces valeurs satisfassent à la relation (12).

Il faudra donc que la relation (13) soit une simple conséquence de l'équation (12) et, par conséquent, que φ se réduise à une constante sur tout le contour.

Ainsi, *le meilleur mode de représentation conforme, tel que*

nous l'avons défini, est celui pour lequel le rapport de similitude est constant tout le long du contour.

Nous serions donc ramenés au problème d'Analyse suivant :

Trouver sur la surface une fonction λ satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta_2 \log \lambda = \frac{1}{RR}, \tag{14}$$

et prenant des valeurs constantes sur le contour de la région à représenter.

Cette question n'a pas été étudiée dans toute sa généralité, mais on peut la ramener, quand on connaît déjà une représentation conforme de la région, ce qui est le cas pour les surfaces de révolution et les surfaces du second degré, à un problème de Géométrie plane qui a été parfaitement étudié.

Supposons, en effet, que l'élément linéaire de la surface ait été ramené à la forme

$$ds^2 = n^2(d\alpha^2 + d\beta^2). \tag{15}$$

Pour tout autre mode de représentation, il faudra trouver le facteur λ tel qu'on ait

$$\lambda^2 ds^2 = ds'^2, \tag{16}$$

ds'^2 étant l'élément linéaire d'un plan, et λ satisfera à l'équation (14).

Or, $\frac{1}{n}$ est une solution évidente de cette équation, et par conséquent, si l'on pose

$$\lambda n = e^{\mu}, \tag{17}$$

μ devra satisfaire à l'équation

$$\Delta_2 \mu = 0 \tag{18}$$

qui se réduit ici à la forme

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} = 0. \tag{19}$$

Ainsi nous sommes ramenés au problème suivant :

Trouver une fonction harmonique, c'est-à-dire une fonction qui satisfasse à l'équation (19) *dans toute l'étendue de l'aire plane correspondant à la région considérée de la surface et qui, sur le contour de cette aire plane, se réduise, d'après l'équation* (17), *à la fonction connue*

$$\log n + \text{const.}$$

Or, ce problème est de ceux qu'on sait aborder par les procédés les plus variés.

L'intégrale

$$\int_C \frac{\partial \rho}{\partial n} ds$$

se transportant sans modification quand on passe de la surface au plan, puisque ds et dn sont altérés dans le même rapport, on voit que, pour justifier l'hypothèse que nous avons faite au cours de la démonstration, il suffit de supposer que cette hypothèse est vérifiée dans le cas du plan, ce qui est une proposition bien connue.

SUR UN PROBLÈME POSÉ PAR LAGRANGE;

PAR M. GASTON DARBOUX.

On sait que c'est Lagrange qui, le premier, dans des *Mémoires sur la construction des Cartes géographiques*, s'est posé et a résolu le problème de représenter d'une manière conforme la surface terrestre sur un plan, de telle manière que les méridiens et les parallèles soient représentés, les uns et les autres, par des cercles. La solution donnée par Lagrange peut s'énoncer aujourd'hui de la manière suivante :

1° On effectue, en prenant le pôle comme point de vue, une projection stéréographique sur le plan de l'équateur ; cette projection donne une première carte de la surface que nous appellerons la carte A ;

2° On soumet la carte A à une transformation de Lambert, c'est-à-dire à une transformation définie par les équations

$$\rho^c = \rho', \qquad c\omega = \omega',$$

où ρ, ω; ρ', ω' désignent les coordonnées polaires des deux points correspondants, rapportées au centre de la sphère comme pôle : cela donne une seconde carte que nous appellerons la carte B :

3° On soumet la carte B à une inversion quelconque dont le pôle est dans le plan de l'équateur, ce qui donne la carte définitive C.

La constante c est dite l'exposant de la projection.

Cela posé, Lagrange se propose le problème suivant : étant donnés trois points sur la sphère, peut-on faire une carte, d'exposant donné, de telle manière qu'ils soient représentés par trois points, arbitrairement choisis sur la carte?

« Ce problème, dit Lagrange, me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, soit pour ne pas trop m'écarter de mon sujet, soit aussi parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins que l'on ne pût ensuite la ramener à une solution aisée. »

Les progrès de nos méthodes géométriques nous permettent de résoudre aisément et avec élégance ce problème que Lagrange n'a fait qu'indiquer. En effet, puisque l'exposant de la carte est donné, il n'y a d'arbitraire dans la solution donnée plus haut que le passage de la carte B à la carte C. Et le problème posé par Lagrange se transforme en celui-ci :

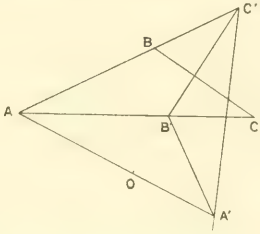
Étant donné dans le plan un triangle ABC, y a-t-il une inversion qui le transforme en un triangle égal à un autre triangle donné $A_0B_0C_0$?

Et ce problème se résout et se discute facilement.

Soit, en effet, O le pôle de l'inversion cherchée, pôle situé dans le plan de ABC. Cette inversion transformera le triangle ABC en un triangle $A_1B_1C_1$, qu'on appelle le *triangle invariable* du quadrilatère OABC, et qui ne changerait pas *de forme* si, au lieu de soumettre le quadrilatère à une inversion de pôle O, on le soumettait à une inversion ayant pour pôle l'un des points A, B, C. On est donc conduit à la construction suivante :

On fait une inversion de pôle A et de module $\overline{AB}\,\overline{AC}$, par

exemple, qui transforme le point B en un point C′ et le point C en un point B′ (*fig.* 1). Puis sur B′C′ on construit un triangle



A′B′C′ semblable au triangle donné $A_0B_0C_0$ (*fig.* 1). L'homologue O de A′ dans l'inversion considérée est le pôle de l'inversion cherchée. Quant au module de cette inversion, il se définira par la condition que la distance des deux points dérivés de B, C par exemple, soit B_0C_0.

On a ainsi la solution complète du problème. Comme il y a deux positions pour A′, symétriques l'une de l'autre par rapport à B′C′, il y a deux inversions distinctes, toutes deux réelles.

On aurait pu recourir à une autre construction géométrique, en remarquant que les angles du triangle donné $A_0B_0C_0$ doivent être égaux aux différences des angles AOB et ACB, BOC et BAC, COA et CBA, et que, par suite, on connaît les angles sous lesquels on voit du point O les côtés du triangle ABC. On aurait été ainsi ramené au problème de Pothenot, mais cette solution nous a paru moins nette que celle à laquelle nous nous sommes arrêtés.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Chauvac de la Place. — *Nouvelles Tables pour le tracé des courbes de raccordement en arc de cercle* (chemins de fer, canaux, routes et chemins). 7e édit. rev. Paris, Ch. Béranger. Cart., 7 fr. 50

Ocagne (M. d'). — *Leçons sur la Topométrie et la cubature des terrasses.* Nouveau tirage comprenant des *notions sommaires de Nomographie*, des *notions élémentaires sur la probabilité des erreurs* et une *instruction sur l'usage de la règle à calcul.* VII-260 p., avec fig. et 1 pl. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr. 50.

Bauschinger (J.) and Peters (J.). — *Logarithmic-trigonometrical Tables with 8 decimal places.* (In 2 vols.) Vol. I. In-4. 388 p. London. Asher. 18 s. 6 d.

Christoffel (E.-B.). — *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* Unter Mitwirkg. v. *A. Krazer* u. *G. Faber*, hrsg. v. *L. Maurer.* In-8. Leipzig, B.-G. Teubner. (1. Bd. Mit e. Biographie E.-B. Christoffels v. C.-F. Geister u. seinem Bild in Lichtdr., sowie 15 fig., XVI-388 p. 18 m. 2. Bd., III-373 p. m. 18 fig. 16 m.)

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française; rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk.* Tome I (2e vol.). *Algèbre.* Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer.* Gr. in-8, 233-398 p. Paris, Gauthier-Villars. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m.

Montel (Paul). — *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.* In-8, VIII-128 p., 2 fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50.

Appell (P.) et Dautheville (S.). — *Précis de Mécanique rationnelle, introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée*, pour les certificats de licence et les écoles techniques supérieures. In-8, VI-716 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

Voigt (Woldem.). — *Lehrbuch der Kristallphysik* (m. Ausschluss der Kristalloptik). (*Teubner's, B.-G., Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen*, XXIV. Bd.) Gr. in-8. XXIV-964 p. avec 213 fig. et 1 planche. Leipzig, B.-G. Teubner. 30 m.; relié, 32 m.

Bell (Robert-J.-T.). — *An elementary treatise on coordinate Geometry of three dimensions.* In-8 (22-14), 372 p. London, Macmillan. 10 s.

Clebsch (Alfr.). — *Vorlesungen üb. Geometrie, m. besond. Benutzg. der Vorträge v. C.* bearb. u. hrsg. v. *Ferd. Lindemann.* 2., verm. Aufl. I. Bd. 1. Tl. 2. Lfg. Gr. in-8, p. 481-768. Leipzig, B.-G. Teubner. 9 m.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. (In 7 Bdn.) Bd. VI. 1 B : Geodäsie u. Geophysik. Red. v. *Ph. Furtwängler* u. *E. Wiechert.* 2. Heft. In-8, p. 85-177. Leipzig. B.-G. Teubner. 3 m.

Klein (F.) u. Sommerfeld (A.). — *Ueber die Theorie des Kreisels.* IV. Heft. Die techn. Anwendgn. der Kreiselthеorie. Für den Druck bearb. u. ergäntz v. *Fritz Noether.* Gr. in-8, p. 761-966, avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 8 m.; relié, 9 m.

Korn (Arth.). — *Ueber freie u. erzwungene Schwingungen. Eine Einführg. in die Theorie der linearen Integralgleichgn.* In-8, v-136 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m. 60.

Kowalewski (Gerh.). — *Einführung in die analytische Geometrie.* Gr. in-8, VII-380 p. avec 112 fig. Leipzig, Veit et Cie. 10 m.; relié, 11 m.

Pohle (Jos.). — *Die Sternenwelten u. ihre Bewohner, zugleich als erste Einführung in die moderne Astronomie.* 6., umgearb. Aufl. Gr. in-8, XII-539 p. avec 60 fig., 16 planches dont 4 en couleur et 1 carte en couleur. Köln, J.-P. Bachem. 8 m.; relié, 10 m.

Sampson (R.-A.). — *Tables of the four great satellites of Jupiter.* (University of Durham Observatory.) In-4 (33-27), 348 p. London, Wesley. 25 s.

Tannery (Jules). — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* 2e édit. rev. et corr. T. II. Intégrales définies. Développements en séries. Langage géométrique. Fonctions de variables imaginaires. Note de *J. Hadamard.* In-8, 482 p. Paris, A. Hermann et fils. 15 fr.

Verhandlungen der vom 21-29. *IX.* 1909 *in London u. Cambridge abgeh.* 16. *allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung.* Red. vom ständ. Sekretär *H. G. van de Sande Bakhuyzen.* 1. Tl. : Sitzungsberichte u. Landesberichte üb. die Arbeiten in den einzelnen Staaten. 1. vol. in-8, 401 p. avec 26 planches et cartes. Berlin, G. Reimer. 6 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DARBOUX (G.). — LEÇONS SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ET LES COORDONNÉES CURVILIGNES. Deuxième édition, augmentée. 1 volume in-8°, 567 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Cette nouvelle édition de l'Ouvrage, bien connu, de M. Darboux se distingue de la précédente par de nombreuses additions. Tel qu'il est constitué, cet Ouvrage renferme les résultats essentiels acquis actuellement sur la belle théorie inaugurée par les travaux de Lamé.

Il me semble inutile d'examiner les questions qui ont été traitées dans la première édition; il y a là, sans doute, des résultats bien intéressants; mais tous ces résultats sont bien connus du public géomètre. Je me bornerai donc à l'analyse des additions qui caractérisent cette nouvelle édition.

Tout d'abord, quand on veut déterminer des systèmes triples satisfaisant à des conditions données, on trouve que les fonctions inconnues qui donnent la solution du problème satisfont à des équations aux dérivées partielles dont le nombre, en général, surpasse celui des fonctions inconnues. Il importe de fixer ce qu'on appelle le *degré de généralité* du problème, ou, ce qui revient au même, les *conditions aux limites* qu'on peut imposer aux fonctions inconnues.

Dans la plupart des cas, on peut ramener ces systèmes d'équations à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui peuvent être résolues par rapport à toutes les dérivées qui y figurent des fonctions inconnues. Ces systèmes rentrent donc dans le type suivant : Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont les fonctions inconnues; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les variables indépendantes, on a des équations de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_h} = f_{ih}(u_k, x_k).$$

Quand i est donné, h peut prendre une ou plusieurs des valeurs de la série $1, 2, \ldots, m$; les seconds membres f_{ih} sont des fonctions arbitraires des inconnues et des variables indépendantes.

L'auteur examine d'abord le cas où le système contient une dérivée et une seule de chaque fonction inconnue ; à chaque valeur de i correspond une seule valeur de h. En employant, au lieu des séries de Cauchy, les très élégantes méthodes d'approximation de M. Picard, l'auteur établit que si l'on adopte un système de valeurs initiales des variables indépendantes $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, le système admet une solution et une seule, telle que chaque fonction inconnue u_i se réduise pour $x_h = x_h^0$ à une fonction arbitraire des variables autres que x_h. Ce théorème suppose que dans le voisinage des valeurs initiales des fonctions et des variables les fonctions f_{ih} satisfont à des conditions de continuité qui sont indiquées d'une façon très précise.

Vient ensuite le cas où toutes les dérivées de chaque fonction inconnue figurent dans les équations; on suppose, bien entendu, que les conditions d'intégrabilité sont vérifiées identiquement. On a alors ce qu'on appelle un *système complet*.

Entre ces deux cas extrêmes se trouve le cas où l'une au moins des fonctions inconnues figure dans les équations avec plusieurs dérivées. On suppose que toutes les conditions d'intégrabilité soient satisfaites identiquement; dans ces conditions, choisissons un système $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ de valeurs de variables; désignons par $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ les variables par rapport auxquelles on donne les dérivées de la fonction u_i; le système admet une solution et une seule telle que chaque fonction inconnue u_i se réduise pour

$$x_{i1} = x_{i1}^0, \qquad x_{i2} = x_{i2}^0, \qquad \ldots \qquad x_{ip} = x_{ip}^0,$$

à une fonction arbitraire des variables autre que les x_i.

Les applications analytiques et géométriques de ces théorèmes sont nombreuses.

Au point de vue analytique, M. Darboux applique ces considérations à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

qui a été l'objet de belles études de M. Picard.

Il examine ensuite le système

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} = f_1\left(x, y, z, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial x} = f_2\left(x, y, z, \frac{\partial\theta}{\partial z}, \frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = f_3\left(x, y, z, \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}\right).$$

Ce système, qu'on rencontre souvent en géométrie, en particulier dans la recherche des systèmes conjugués à trois variables, admet, si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites identiquement, une solution et une seule, dans laquelle θ se réduit à une fonction arbitraire de chacune des variables quand on donne aux deux autres leurs valeurs initiales. Il est clair que les valeurs initiales de ces trois fonctions arbitraires doivent être égales.

Les principales applications géométriques concernent les systèmes à lignes conjuguées que l'auteur a déjà étudiées dans la quatrième Partie de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*.

Si l'on cherche deux systèmes de coordonnées curvilignes dans l'espace, tels qu'aux points correspondants les plans tangents aux surfaces coordonnées soient parallèles (les tangentes aux courbes coordonnées seront aussi parallèles), on trouve que les systèmes sont à lignes conjuguées. [On exclut, bien entendu, le cas de deux systèmes homothétiques.] Réciproquement, tout système à lignes conjuguées admet une infinité de systèmes parallèles.

L'auteur fixe le degré de généralité de ces systèmes à lignes conjugués et arrive à la propriété géométrique suivante :

Considérons trois surfaces (Σ), (Σ_1), (Σ_2) *se coupant en un point* M, *et désignons par* (C_i) *la courbe d'intersection des deux surfaces* (Σ_k) *et* (Σ_l). *Nous supposerons que les trois surfaces soient assujetties à l'unique condition que les tangentes en* M *à* (C_k) *et à* (C_l) *soient des tangentes conjuguées de* (Σ_i). *Alors, il sera possible, et d'une infinité de manières, de tracer sur chaque surface* (Σ_i) *un réseau conjugué comprenant les courbes* (C_k) *et* (C_l). *Quand on aura ainsi tracé les trois réseaux sur les surfaces* (Σ_i), *ce qui comporte l'introduction de trois fonctions arbitraires de deux variables, il existera un système de coordonnées à lignes conjuguées, et un seul, com-*

prenant comme surfaces coordonnées les trois surfaces (Σ_i) *et comme courbes coordonnées toutes celles des trois réseaux tracés sur les surfaces* (Σ_i).

La détermination des systèmes à lignes conjuguées dépend de l'intégration des systèmes suivants :

$$(A) \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \xi_i} = \beta_{ii}\beta_{ik} \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(B) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k} = \beta_{ik} U_i,$$

$$(C) \qquad \frac{\partial H_i}{\partial \xi_k} = \beta_{ki} H_i,$$

$$(D) \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi_i} = H_i U_i.$$

On peut ramener l'intégration du système (A) à la détermination d'une fonction V qui satisfait à une équation du sixième ordre ; cette fonction V est telle que

$$\beta_{01}\beta_{10} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_0 \partial \xi_1}, \qquad \beta_{12}\beta_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \qquad \beta_{20}\beta_{02} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2 \partial \xi_0}.$$

L'auteur définit ensuite les *systèmes conjugués supplémentaires*. Ils sont caractérisés par cette propriété qu'aux points correspondants, les trièdres formés par les tangentes aux courbes coordonnées sont supplémentaires. En étudiant les cas où les fonctions V relatives à deux systèmes supplémentaires sont identiques, l'auteur arrive à trouver des systèmes conjugués tels que : *Chacune des familles du système est engendrée par une surface qui demeure invariable de forme et est animée d'un mouvement de translation rectiligne.*

La considération des systèmes conjugués ramène aux systèmes triples orthogonaux, qui en sont des cas particuliers. Dans ce cas la recherche des conditions aux limites conduit au résultat suivant :

Il existe un système triple orthogonal, et un seul, assujetti à comprendre trois surfaces appartenant respectivement aux trois familles qui composent le système, surfaces qui, d'après le théorème de Dupin, doivent se couper mutuellement à angle droit et suivant une ligne de courbure commune.

Ce théorème ne peut s'appliquer au cas où quelqu'une des trois surfaces se réduit à une sphère ou à un plan, que si l'on

a tracé arbitrairement sur cette surface le réseau orthogonal qui doit jouer le rôle des lignes de courbure.

Dans le cas des systèmes triples orthogonaux, il y a confusion entre les systèmes parallèles et les systèmes supplémentaires. De chaque système triple orthogonal on peut donc en déduire de nouveaux en considérant les systèmes parallèles, ou, si l'on veut, les systèmes qui ont *même représentation sphérique*. C'est un résultat qui a été établi par Combescure; aussi l'on donne le nom de *transformation de Combescure* à l'opération qui consiste à passser d'un système triple orthogonal à un système parallèle.

Soient alors M et M' deux points qui se correspondent dans une transformation de Combescure; sur la droite MM' il y a, en dehors de M et M', des points qui dérivent des systèmes triples orthogonaux. On obtient ainsi une transformation des systèmes triples orthogonaux qui revient à celle qui a été indiquée, en 1869, par Ribaucour. Au fond, cette transformation de Ribaucour est composée d'une inversion et d'une transformation de Combescure. L'auteur étudie, avec soin, ces diverses transformations qui constituent, à l'heure actuelle, le plus puissant moyen de recherche des systèmes triples orthogonaux.

On peut remarquer que les équations auxquelles satisfont les fonctions β_{ik} ne sont autres que les relations différentielles entre les rotations du trièdre (T) formé par les normales aux surfaces coordonnées; pour que les lignes coordonnées soient des lignes de courbure, il faut et il suffit que les rotations p, q_1, r_2 soient nulles. Par conséquent, *on aura un système d'équations aux dérivées partielles, au nombre de trois seulement, propres à remplacer les neuf équations aux β_{ik}, en définissant l'orientation du trièdre* (T) *à l'aide de trois arbitraires et en déterminant ces arbitraires de manière à annuler les trois rotations p, q_1, r_2.*

Si l'on prend comme arbitraires les trois angles θ, φ, ψ d'Euler, on obtient les formules

$$\sin\theta \sin\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \cos\varphi \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\sin\theta \cos\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1} - \sin\varphi \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} - \cos\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_2} = 0,$$

qui ont été établies, en 1862, par Ossian Bonnet.

Si l'on exprime φ en fonction de ψ, de ρ et de ρ_1

$$\varphi = f(\psi, \rho, \rho_1),$$

on trouve que la fonction f doit satisfaire à une équation du troisième ordre qui a été formée par Ossian Bonnet. Quand on connaît une solution de cette équation, on a facilement l'orientation du trièdre (T), il faut ensuite, pour achever le problème, déterminer les fonctions H, H_1, H_2 de Lamé et effectuer les quadratures que donnent les coordonnées du point qui décrit le système triple orthogonal.

Une autre application très intéressante de la remarque précédente est obtenue par l'emploi des imaginaires; si l'on désigne par X_i, Y_i, Z_i les cosinus directeurs de la normale à la surface de paramètre ρ_i, on pose

$$\alpha = \frac{X_2 - iY_2}{1 - Z_2}, \qquad \beta = \frac{X_2 + iY_2}{1 + Z_2}, \qquad \frac{Z - iZ_1}{1 - Z_2} = \frac{1}{\lambda},$$

α, β, λ sont liés aux angles d'Euler par les formules

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = i\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}, \qquad e^{i\psi} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}, \qquad e^{i\varphi} = \lambda\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},$$

on trouve que α, β, λ sont solutions du système

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial\rho} &= \lambda^2\frac{\partial\alpha}{\partial\rho} \\ \frac{\partial\beta}{\partial\rho_1} &= \lambda^2\frac{\partial\alpha}{\partial\rho_1} \end{aligned} \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_2} + \frac{\partial\beta}{\partial\rho_2} = (\beta - \alpha)\frac{\partial\log\lambda}{\partial\rho_2},$$

Ce système de trois équations du premier ordre est de beaucoup le plus simple de tous les systèmes connus. On ramène ce système à une seule équation du troisième ordre en posant

$$\alpha + \beta = u, \qquad \alpha - \beta = iv, \qquad \lambda = e^{i\varphi}.$$

On trouve que μ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_1\,\partial\rho_2} + \operatorname{tang}\mu\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho\,\partial\rho_2} + \cot\mu\frac{\partial\mu}{\partial\rho_2}\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = 0.$$

Avec les variables adoptées, l'équation du plan tangent à la surface de paramètre ρ_2 est

$$(1 - \alpha\beta)x + i(1 + \alpha\beta)y + (\alpha - \beta)z + \xi = 0.$$

On peut supposer que ξ est une fonction de α, β et ρ_2. On en déduit facilement l'équation du troisième ordre, à laquelle satisfait cette fonction ξ. Cette équation a été formée par M. Adam, en 1887.

L'auteur étudie ensuite une classe très remarquable de systèmes triples : les systèmes (E). Ces systèmes ont été signalés pour la première fois, en 1866, dans un travail de l'auteur. Ils ont été étudiés depuis par MM. Ribaucour, Fouché, Petot et Egorov.

Ces systèmes sont caractérisés par ce fait que, si l'on choisit convenablement les variables indépendantes, on a

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}.$$

Les rotations ne dépendent que des différences des variables, et la solution du problème se ramène à l'intégration d'une équation du troisième ordre à deux variables indépendantes. Toutes les surfaces d'une même famille ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Si l'on désigne par P_i la distance de l'origine au plan tangent à la surface de paramètre ρ_i, le système d'équations auquel satisfont les P_i est identique à celui auquel satisfont les H_i, d'où la remarque fondamentale faite par Egorov :

Si l'on connaît un système (E) *particulier, on pourra en déduire deux autres de même représentation sphérique, en prenant pour les* P_i *du nouveau système les* H_i *de l'ancien, ou inversement.*

Parmi ces systèmes (E) se trouvent ceux qui sont formés de trois familles engendrées par la translation rectiligne d'une surface de forme invariable.

Les systèmes (E) forment un cas particulier des systèmes de M. Guichard. Il s'agit de trouver deux systèmes triples tels que les β_{ik} du premier soient égaux aux β_{ki} du second. On trouve alors que les β_{ik} doivent satisfaire à un système de douze équations. En appliquant le théorème de Cauchy on démontre que la solution générale du système dépend de six fonctions arbitraires d'une variable.

Si l'on désigne par des lettres accentuées les éléments du second système on a les équations fondamentales

$$\beta_{ki} = \beta_{ik};$$

il en résulte que les P_i satisfont aux mêmes équations que les H_i et de même les fonctions P_i satisfont aux mêmes équations que les fonctions H_i. Si donc on connaît un système orthogonal (S) de la première série on pourra en déduire deux systèmes (S′) de la seconde en prenant

$$\text{soit } P_i = H_i, \qquad \text{soit } H_i = P_i.$$

On déduit de là tous les systèmes orthogonaux tels que

$$H_1 = H_1^2 = H_2^2 = \alpha x^2 + y^2 + z^2 = \beta,$$

α et β étant des constantes.

L'Ouvrage se termine par quatre Notes qui traitent de sujets variés. Dans la première, l'auteur montre comment l'application du théorème d'Abel relatif aux intégrales algébriques permet d'obtenir une suite illimitée de systèmes complètement orthogonaux algébriques dans un espace à n dimensions. Les deux suivantes sont consacrées à l'étude des cyclides de Dupin et des systèmes triples qui comprennent une famille composée de telles surfaces, ou plus généralement, de surfaces à lignes de courbures planes dans les deux systèmes. Enfin, dans la dernière Note, l'auteur donne un certain nombre de théorèmes nouveaux sur les déformations ponctuelles de l'espace définies par les équations

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Il cherche, en particulier, quelle doit être la fonction U pour que les faces du *trièdre principal* relatif à chaque point de l'espace soient les plans tangents aux surfaces d'un système triple *orthogonal*.

C. Guichard.

VEBLEN (Oswald) and YOUNG (John Wesley). — Projective Geometry. Volume I. 8 vol., x-342 pages, with 115 figures in the text. Boston, New-York, Chicago, London, Ginn and Company, August 1910.

MM. Veblen et Young présentent le premier Volume d'un Ouvrage sur la *Géométrie projective*, destiné aux étudiants des

classes supérieures des Universités américaines, et ils promettent l'apparition du second Volume dans le courant de l'année 1911.

Ce premier Volume traite uniquement des propriétés projectives des figures. Les Auteurs ont eu pour but d'exposer les principes de la Géométrie en tenant compte des idées modernes et des méthodes nouvelles. Par exemple, ils se servent des coordonnées, de la détermination des figures par des équations, des invariants de formes binaires, linéaires ou quadratiques, des complexes de lignes. Ce Volume contient des questions qui, en France, sont enseignées dans les classes de mathématiques élémentaires et dans les classes préparatoires aux grandes Ecoles du Gouvernement. MM. Veblen et Young ont présenté méthodiquement les théories, avec des démonstrations claires et des discussions toujours complètes.

Signalons les principales théories et propositions :

Le Chapitre II contient les théorèmes de Desargues relatifs à deux triangles perspectifs l'un de l'autre et les théorèmes analogues pour le tétraèdre; les théorèmes sur le quadrilatère complet et sur deux quadrilatères complets situés dans un même plan, ou chacun dans un plan différent.

On trouve dans le Chapitre IV la théorie des points harmoniques et des points en involution; l'étude de la configuration de Pappus.

Le Chapitre V, intitulé *Conic Sections*, contient les théorèmes de Pascal et de Brianchon, avec leurs conséquences, la théorie des pôles et polaires, le théorème de Desargues sur les coniques; les propriétés relatives aux droites qui passent par les points d'intersection de deux coniques; l'étude des cas où les coniques sont tangentes entre elles ou à des droites.

MM. Veblen et Young, en tenant compte des idées émises par von Staudt dans sa *Geometrie der Lage* (1857) et des simplifications apportées aux méthodes de ce géomètre, ont développé, dans le Chapitre VI, l'Algèbre des points; dans le Chapitre VII, la représentation, au moyen d'un système particulier d'axes de coordonnées, des points et des lignes d'un plan, l'équation d'une conique, l'emploi d'un tétraèdre de référence pour l'espace; dans le Chapitre VIII, les théorèmes sur la projectivité des coniques et sur l'involution associée à cette projectivité.

Le Chapitre IX est consacré à la classification des problèmes de Géométrie : aux constructions relatives aux problèmes du premier degré et du second ; aux invariants des formes binaires, linéaires ou quadratiques, ainsi que des formes ternaires et quaternaires.

Le Chapitre X traite de la corrélation des figures, c'est-à-dire de la correspondance entre les éléments d'un groupe de points et d'un faisceau de lignes ; il contient des théorèmes sur les pôles et polaires dans les coniques et donne les solutions de problèmes du troisième degré et du quatrième.

Enfin, dans le Chapitre XI, se trouvent les propriétés des deux systèmes de droites de la surface gauche de révolution ; l'application de ces propriétés à deux coniques projections l'une de l'autre ; l'étude des complexes linéaires.

MM. Veblen et Young se sont appuyés sur les travaux des géomètres tant modernes que contemporains, soit pour composer le texte d'étude de leur Ouvrage, soit pour proposer plusieurs des exercices placés à la suite des principales subdivisions de chaque Chapitre. Er. L.

NEUMANN (C.). — Ueber das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. 1 volume in-8, 80 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1909.

Dans ce court travail, M. Neumann démontre un élégant théorème qu'on peut énoncer ainsi :

Appelons, pour l'instant, *ovale* la courbe obtenue en transformant une ellipse par inversion, le pôle d'inversion étant placé arbitrairement à l'intérieur de l'ellipse.

Supposons que l'intérieur de cette ovale soit recouvert d'une couche matérielle homogène.

Le potentiel logarithmique de cette couche sur les points intérieurs sera le même que s'il émanait de deux points fixes m_1 et m_2 qui sont à l'intérieur de la couche, et d'une ligne *double* réunissant ces deux points.

Comme la ligne double est supposée chargée d'une matière de densité uniforme, son potentiel est égal à l'angle multiplié par

une constante, sous lequel on voit, du point sur lequel elle agit, le segment $\varpi_1 \varpi_2$.

La démonstration de M. C. Neumann repose sur l'emploi des fonctions circulaires et exponentielles. Nous croyons qu'avec les fonctions elliptiques on pourrait résoudre le même problème pour la surface limitée par les courbes planes que nous avons appelées *cycliques* et qui sont caractérisées par la propriété d'être du quatrième ordre et d'avoir comme points doubles les points à l'infini sur le cercle, par exemple les ovales de Descartes, les ellipses de Cassini, etc. On sait que, comme les coniques, toutes celles de ces courbes qui ont les mêmes foyers forment un système double orthogonal et donnent, par conséquent, naissance à un système de coordonnées curvilignes analogues aux coordonnées elliptiques. J. G.

STURM (R.). — Die Lehre von den Geometrischen Verwandtschaften. — Zweiter Band : *Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe*. 1 volume in-8 VIII-346 pages, 1908. Dritter Band : *Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe*. 1 volume in-8, VIII-574 pages, 1909. Vierter Band : *Die nicht linearen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe*. 1 volume in-8, X-486 pages, 1909. Leipzig et Berlin. B.-G. Teubner.

En rendant compte, au cours de l'année 1909, du premier Volume de cette œuvre si distinguée et si consciencieuse, qui résume le travail de toute une vie scientifique, nous émettions l'espoir que la suite nous en serait promptement donnée. On voit que cet espoir a été réalisé. En moins de deux ans, nous avons reçu les trois Volumes qui complètent l'œuvre entreprise par M. Sturm. La maison Teubner, qui se dispose à célébrer, le 3 mars 1911, le centième anniversaire de sa fondation, pourra certes s'y glorifier, entre autres mérites, de l'activité inépuisable et éclairée qu'elle a mise au service des géomètres allemands, nos savants et éminents collègues, et du service qu'elle a rendu par là à la cause de la Science universelle.

Le deuxième Volume, dont nous avons à rendre compte tout

d'abord, traite, comme l'indique son titre, des transformations linéaires des figures à deux dimensions.

Une première Partie, la troisième de l'Ouvrage, traite de la collinéation, ou homographie, et de la corrélation. Les figures qui y sont étudiées sont : 1° ce que l'auteur appelle le *champ*, l'ensemble des points ou l'ensemble des droites d'un plan; 2° le *réseau*, qui est l'ensemble de tous les rayons ou de tous les plans passant par un point fixe; le sommet du réseau. Le principe de dualité, les cas particuliers de la collinéation (affinité, similitude, égalité) et de la corrélation (polarité par rapport à une conique) y sont successivement exposés. Un alinéa est consacré à cette homographie considérée par Hermite, qui conserve une conique donnée. Un autre applique les théories générales à la génération de la surface du troisième ordre; un autre, à l'étude d'un complexe particulier du second ordre, envisagé par Hirst pour la première fois.

La quatrième Partie de l'Ouvrage aborde les problèmes les plus essentiels relatifs aux corrélations et aux collinéations. Par exemple, un article est consacré à la détermination du nombre des corrélations qui satisfont à huit conditions élémentaires données, un autre aux systèmes linéaires de corrélation, etc.

La cinquième Partie, qui ouvre le troisième Volume, traite des transformations linéaires des figures à trois dimensions, de la collinéation et de la corrélation dans l'espace, de l'homologie, de l'affinité, de la similitude et de la congruence, dans le cas de trois dimensions; du complexe tétraédral, de la transformation d'une cubique gauche en elle-même par l'homographie, de cette espèce de corrélation dont l'étude a été faite d'abord par Möbius et dans laquelle un point est situé dans le plan correspondant, corrélation qui se présente dans l'étude du complexe linéaire; des propriétés métriques et focales, des groupes de collinéations et de corrélations.

La sixième Partie a pour objet les systèmes linéaires de courbes et de surfaces, leurs relations collinéaire et corrélative, les systèmes linéaires de corrélations et de collinéations, etc.

Avec la septième Partie commence l'étude des transformations d'ordre supérieur. L'auteur étudie d'abord celles qui sont rationnelles réciproques, c'est-à-dire les transformations de Cremona. Il

envisage les cas particuliers de la transformation quadratique et de la transformation circulaire.

La huitième Partie traite des correspondances sur une courbe-support de genre nn, en particulier sur une courbe plane générale du troisième ordre. A cette occasion, M. Sturm introduit la courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce, les courbes planes du quatrième ordre à deux points doubles et les surfaces réglées du quatrième ordre avec deux directrices doubles rectilignes.

La neuvième Partie, fort courte, traite des correspondances multiples.

La dixième Partie aborde un sujet qui, durant la vie de Clebsch, semblait appelé à prendre une grande importance et dont les géomètres se sont un peu désintéressés, nous ne savons pourquoi : celui des représentations simples des surfaces sur un plan. M. Sturm y passe en revue les principales surfaces auxquelles cette méthode a été appliquée : la surface du second degré, la surface cubique générale, la surface de Steiner; diverses surfaces du quatrième, du cinquième ordre et même une surface d'ordre n avec une droite multiple d'ordre $n-2$.

La onzième Partie traite d'un sujet que la mort de Cremona a laissé inachevé : les transformations rationnelles réciproques dans l'espace, dont on connaît plusieurs exemples fort intéressants.

La douzième Partie traite des correspondances qui ne sont plus rationnelles. Nous y remarquons, en particulier, une étude de cette transformation que Jacobi a introduite dans l'étude des propriétés focales des surfaces du second degré.

En terminant son grand Ouvrage, M. R. Sturm fait précéder son quatrième Volume d'une préface quelque peu découragée, où il déplore le discrédit dans lequel sont tombées les études de géométrie pure. Il rappelle les paroles que M. Darboux a prononcées à ce sujet dans la Conférence de Saint-Louis, et il remarque, avec lui, que beaucoup des méthodes dont se servent aujourd'hui les analystes ont leurs racines et leur origine dans les travaux des géomètres du commencement du XIXe siècle. Et pourtant, si les géomètres manquent à la tâche, ce n'est pas la tâche qui manquerait aux géomètres.

La géométrie de la surface générale du quatrième ordre est,

pour ainsi dire, totalement ignorée. Beaucoup d'autres chapitres de la Géométrie appellent, eux aussi, des recherches qu'il serait bien désirable d'entreprendre sans retard.

M. Sturm, envigeant d'un œil pessimiste cette situation, a bien le droit de penser et de dire qu'il a fait tout ce qui pouvait dépendre de lui pour en conjurer les périls et pour développer le goût de la Géométrie. Qu'il se console en pensant qu'il y a des engouements et des modes, dans la Science comme ailleurs. Quand le goût tentera des études de géométrie pure, à défaut de son enseignement ses quatre Volumes seront là pour guider les néophytes et les travailleurs. J. G.

FABRY (E.). — THÉORIE DES SÉRIES A TERMES CONSTANTS. *Applications aux calculs numériques*. 1 volume grand in-8. IV-198 pages. Paris, A. Hermann et fils, décembre 1910.

Cet Ouvrage a été rédigé afin de rendre service aux jeunes gens qui travaillent pour acquérir des connaissances générales, et non pas seulement pour obtenir un diplôme; à ceux qui étudient les Mathématiques en vue des applications : tels sont les élèves de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, les candidats au Certificat de Mathématiques générales, les auditeurs des cours de Mécanique et d'Astronomie. Les professeurs de Mathématiques spéciales pourront trouver dans ce Livre des simplifications pour l'exposé de questions théoriques et des exercices se rapportant aux matières qu'ils ont à traiter.

Signalons les parties de cette *Théorie des séries à termes constants* où M. E. Fabry a amélioré les méthodes connues.

N° 12. En général, on démontre que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite, $\sqrt[n]{u_n}$ a la même limite. L'Auteur a présenté la démonstration d'une façon qui s'applique à tous les cas, en montrant que la plus petite limite de $\sqrt[n]{u_n}$ et la plus grande comprennent celles de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

N° 22. Il faut savoir gré à M. E. Fabry d'avoir précisé la croissance extrêmement rapide des nombres $e, e^e, e^{e^e}, \ldots$, car ce fait n'a pas été clairement signalé.

N° 27. Lorsque le terme général u_n d'une série à termes positifs tend vers zéro, l'Auteur montre qu'on peut ranger les termes dans un ordre tel que les règles de Bertrand sont inapplicables, bien que la série reste convergente ou divergente. L'idée d'attirer l'attention sur ce fait paraît nouvelle.

N°s 47 et 48. Le produit de deux séries a été exposé par une méthode, due à Cesaro (*Bull. des Sc. math.*, 1890), d'où l'on déduit aisément les cas particuliers qu'on est amené à traiter.

Pour la transformation des séries (Chap. V), les diverses méthodes classiques d'Euler, de Stirling, de Kummer sont exposées avec plusieurs applications, parmi lesquelles on trouve le calcul de L2, de π, de π^2. La méthode de Markoff (n°s 95 à 98) a l'avantage de donner à certaines séries une convergence très rapide et peut rendre service aux calculateurs : l'Auteur montre qu'elle donne assez vite une valeur de L2 avec 20 décimales exactes.

M. E. Fabry est parvenu à faire ressortir ce fait important que, pour utiliser numériquement une série à termes constants, il est indifférent que celle-ci soit convergente ou divergente, pourvu que le reste soit de même ordre que le dernier terme conservé et que les premiers termes décroissent rapidement. Ainsi la constante d'Euler, dans la fonction Γ, se calcule plus facilement par la série divergente du n° 113 que par la série convergente du n° 102. On trouve de ce fait des exemples bien remarquables dans les séries employées en Mécanique céleste.

L'Ouvrage se termine par une Note sur la plus grande limite et sur la plus petite : cette Note n'est pas sans utilité, car les étudiants, habitués à ne rencontrer que des expressions ayant une limite, peuvent être portés à penser que toute suite a une limite.

Er. L.

BOREL (ÉMILE). — Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par M. *Arnaud Denjoy*. 1 volume de VI-168 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

L'importance manifeste du rôle joué dans l'étude des fonctions par la notion de croissance rendait nécessaire un exposé systématique de la théorie de la croissance. C'est cet exposé que M. Borel

nous donne dans ses *Leçons sur la théorie de la croissance*, avec ce souci de rigueur et de clarté, et de se limiter dans l'abstraction aux notions presque immédiatement utilisables qu'on reconnaît dans tous ses ouvrages.

Le théorème de Paul du Bois-Reymond rend illusoire tout essai d'exposition d'une théorie générale de la croissance : si l'on choisit une suite infinie de fonctions dont chacune croît plus vite que la précédente, il existe une fonction croissant plus vite que chaque fonction de la suite. Il est donc indispensable de se borner : c'est pourquoi l'auteur a laissé en dehors du cadre de son étude la plupart des fonctions qu'on ne rencontre qu'exceptionnellement et s'est attaché à l'étude des types de fonctions croissantes employées fréquemment en Analyse : « Ces fonctions limitent, dit-il, le champ de nos recherches, de la même façon que, dans les sciences d'observation, l'expérimentation se limite actuellement aux phénomènes observables par le microscope, d'une part, et par le télescope, de l'autre. » En Mathématiques, la limite est arbitraire, mais il faut en choisir une. Les types de croissance ainsi introduits se présentent très nettement à l'esprit du lecteur, l'étude des premiers Chapitres est rendue plus aisée, plus concrète ; les résultats sont plus facilement utilisables. Les deux derniers Chapitres illustrent les premiers, en donnant des applications à la théorie des fonctions et à la théorie des nombres, applications dont l'intérêt propre vient s'ajouter à celui qu'elles offrent de nous exercer à manier les types de croissance. Ces Chapitres sont d'ailleurs rédigés de façon que les principaux résultats puissent être compris sans le secours des notations introduites dans les Chapitres précédents.

Il importe, avant tout, de préciser le sens des notions qu'on emploiera : c'est pourquoi une introduction nous fait connaître les idées de bornes, de limites, d'extrêmes limites d'une suite de nombres ou de fonctions. Avec le Chapitre I, nous entrons immédiatement dans l'étude des types fondamentaux de croissance. Ici, à chaque fonction va correspondre un signe unique qui caractérisera cette fonction ; par exemple : la croissance de x^n se note n, la croissance de e^x se note ω. La convention suivante permet d'étendre considérablement le champ des fonctions ainsi désignées ; on définit une opération déterminée pour les fonctions et une

opération correspondante pour les ordres, et la fonction unique obtenue par la première opération aura, par définition, son ordre de croissance noté identiquement à l'aide du nombre obtenu dans la seconde opération. C'est ainsi que la multiplication des fonctions conduit à l'addition des ordres types de croissance ($x^{n_1+n_2}$ a pour ordre $n_1 + n_2$, $x^n e^x$ a pour ordre $n + \omega$), que la composition des fonctions conduit à la multiplication des types ($f[\varphi(x)]$ a pour ordre $\alpha \times \beta$, α étant l'ordre de f et β celui de φ; $\alpha\beta$ est en général différent de $\beta\alpha$). En particulier l'élévation d'une fonction à une puissance entière introduit la multiplication d'un ordre par un entier et l'itération introduit l'élévation à une puissance entière des types fondamentaux : e^{nx} a pour ordre ωn, e^{e^x} a pour ordre ω^2, $\log x$, $\log\log x$ ... ont pour ordres $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega_2}$, ... L'itération conduit ainsi à des suites dénombrables de fonctions de plus en plus croissantes. Mais c'est ici le lieu de rappeler le théorème de du Bois-Reymond énoncé précédemment, et la proposition correspondante relative à l'existence d'une fonction indéfiniment croissante qui croît moins vite que chaque fonction d'une suite dénombrable de fonctions indéfiniment croissantes.

En résumé, dans ce premier Chapitre apparaissent des signes notant identiquement certaines fonctions; on peut dire que l'auteur nous fait connaître une notation nouvelle qui, à l'aide des nombres Arithmétiques, du symbole ω et des signes de l'Algèbre, permet de désigner explicitement les fonctions, la notation indiquant à la fois la constitution même de la fonction et son mode de croissance.

La classe des fonctions qu'on peut atteindre par les procédés précédents est beaucoup trop restreinte pour les applications; ce sera l'objet du Chapitre II d'étudier des conventions nouvelles permettant de représenter la croissance d'un groupe plus considérable de fonctions. La fonction x^n a son ordre *identique* à n, nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est d'ordre *égal* à n lorsqu'elle est de la forme hx^n, h ayant des limites d'indétermination finies; s'il n'en est pas ainsi, nous dirons que la fonction $f(x)$ a pour ordre (n) [qu'on lit *n parenthèse*], si l'on peut mettre cette fonction sous la forme $x^{(n-\varepsilon(x))}$, $\varepsilon(x)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Dans les deux cas qui précèdent, le rapport $\frac{\log f(x)}{\log x}$ a pour limite n lorsque

x croît indéfiniment ; si ce rapport a pour extrêmes limites p et q, nous dirons que la fonction a pour ordre (p, q). La notation des ordres parenthèses est relative seulement aux nombres arithmétiques n et non au symbole ω. Les fonctions d'ordre (n) sont dites *régulières* par rapport au type fondamental n, les fonctions d'ordre (p, q) sont dites *irrégulières*. Ces nouvelles notations introduites, l'auteur s'occupe des opérations arithmétiques relatives aux nouveaux ordres.

Le Chapitre III nous conduit à l'étude des modifications que l'intégration et la dérivation apportent aux ordres de croissance, soit dans le cas des ordres identiques, soit dans celui des ordres égaux ou approchés. Un exemple relatif au cas des croissances irrégulières, la recherche de l'ordre de l'intégrale $\int_m^x \frac{dx}{u(x)}$ comparée à $\frac{1}{u(m)}$ ou à $\frac{1}{u(n)}$ avec l'hypothèse que l'ordre de $u(x)$ soit de la forme (p, q), intégrale étudiée par M. P. Boutroux dans ses travaux sur les fonctions entières de genre fini, et l'examen de l'ordre des intégrales relativement aux paramètres qui entrent dans l'élément différentiel terminent cet intéressant Chapitre.

Nous arrivons avec le Chapitre IV aux applications aux séries et aux produits infinis, en particulier à l'étude de la croissance de la somme des n premiers termes d'une série divergente, à celle de l'ordre infinitésimal du reste d'une série convergente. Viennent ensuite les formules d'approximation de la fonction eulérienne $\Gamma(x)$ et les démonstrations des propriétés fondamentales de cette fonction et de la fonction entière $\frac{1}{\Gamma(x)}$, déduites des théories qui précèdent. Prenant alors comme exemple les fonctions entières de la forme $\prod_0^\infty \left(1 + \frac{x}{\varphi(n)}\right)$ dans lesquelles $\varphi(n)$ est une fonction positive croissante de n, l'auteur compare la croissance des fonctions entières à celle de leurs zéros. Si $\varphi(n)$ est régulière relativement à certains types, la croissance de la fonction entière est aussi régulière relativement à un ordre déterminé et réciproquement. Inversement, on voit, sur un exemple, comment l'irrégularité de la croissance d'une fonction entière peut entraîner une irrégularité très profonde dans la croissance des zéros. On indique ensuite les

résultats de MM. E. Lindelöf et P. Boutroux sur la corrélation existant entre l'ordre de grandeur du $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction entière et celui du module maximum de cette fonction sur un cercle de rayon croissant indéfiniment. Pour les ordres de croissance identiques les propositions obtenues ont des réciproques exactes, mais ces ordres ne sont pas les seuls pour lesquels cette propriété subsiste.

Au début des applications arithmétiques du cinquième Chapitre M. E. Borel fait une étude approfondie du paradoxe de Richard, qui s'introduit naturellement à propos de la démonstration de Cantor sur la non-dénombrabilité du continu, et du paradoxe analogue auquel conduit le théorème de Paul du Bois-Reymond. L'auteur montre que les nombres ou les fonctions qu'on peut ou pourra effectivement définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable; la définition d'un élément qui n'appartient pas à cet ensemble ne peut donc être donnée dans un temps fini.

Voici maintenant comment s'introduit la notion de croissance dans l'approximation et la classification des incommensurables : soit α_n la valeur absolue de la différence qui sépare un nombre de celle de ses deux valeurs approchées à $\frac{1}{n}$ près par défaut ou par excès, dont il est le plus voisin; la suite $\frac{1}{\alpha_n}$ croît indéfiniment avec n, on en déduit aisément une fonction $\psi(n)$ constamment croissante avec n et dont l'ordre de croissance nous indique la rapidité avec laquelle on approche du nombre lorsque n croît. L'étude de l'approximation des incommensurables par des nombres rationnels est rendue plus commode, si l'on a recours à la théorie des fractions continues dont l'auteur expose ici les principes essentiels. Les nombres pour lesquels les quotients incomplets de leur développement en fraction continue sont inférieurs à un nombre fixe forment une première classe pour laquelle l'ordre de $\psi(n)$ est égal à n^2. Pour les nombres algébriques de degré p, le type de croissance de $\psi(n)$ est égal à n^p; en particulier, pour les nombres algébriques du second ordre on retrouve directement le résultat grâce à leur développement en fractions continues périodiques : les nombres du second ordre appartiennent donc à la première classe.

L'approximation par un nombre rationnel n'est remarquable

que si elle est inférieure au carré de l'inverse du dénominateur; on appellera alors *écart relatif de deux nombres rationnels*, le quotient de leur différence par la somme des carrés des inverses des dénominateurs; *écart relatif d'un nombre rationnel et d'un nombre incommensurable* le quotient de la différence des deux nombres par le carré de l'inverse du dénominateur du nombre rationnel. Considérons maintenant trois réduites consécutives d'une fraction continue : l'écart relatif des deux premières ou celui des deux dernières est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Appelons *intervalle canonique* attaché à la fraction $\frac{p}{q}$, l'intervalle $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{5}q^2}, \frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{5}q^2}\right)$: tout nombre appartient à une infinité d'intervalles canoniques; on peut d'ailleurs, d'une infinité de manières, recouvrir entièrement l'intervalle $(0, 1)$, par exemple, à l'aide d'un nombre fini de tels intervalles formant ce que M. E. Borel appelle un *système complet*, deux systèmes complets différents n'ayant en commun aucun intervalle canonique; l'auteur donne en outre le moyen de calculer effectivement de tels systèmes.

Passons maintenant à l'approximation par des nombres algébriques : on démontre d'abord la transcendance de e d'après la méthode de Hermite, modifiée par M. Hurwitz et l'on établit que, de même que pour l'approximation d'un nombre algébrique de degré p par un nombre rationnel il y a une limite au-dessous de laquelle on ne peut tomber si le dénominateur de la fraction est limité supérieurement, de même, pour l'approximation du nombre e par des nombres algébriques, il y a une limite inférieure obtenue en fonction des limites supérieures du degré et du module des coefficients de l'équation dont le nombre algébrique est racine. Les mêmes principes de démonstration sont appliqués à l'approximation des nombres algébriques par des nombres algébriques de degrés moindres ou par des combinaisons linéaires de tels nombres.

On voit dans quelles régions intéressantes et fécondes ce Livre nous fait pénétrer et quels résultats nouveaux viennent enrichir les importantes théories qu'il aborde. P. M.

HARET (Spiru C.). — Mécanique sociale. Grand in-8, v-256 pages. Paris, Gauthier-Villars, et Bucarest, st. Rasidescu, 27 novembre 1910.

Dans sa *Mécanique sociale*, M. Spiru Haret propose une méthode, fondée sur l'Analyse mathématique et la Mécanique rationnelle, dont le but est d'introduire dans l'étude des questions sociales la rigueur de ces sciences. Il est vrai que les causes qui déterminent l'équilibre et le mouvement en Sociologie sont encore mal connues.

Il a essayé d'examiner ces diverses causes et les a classées d'après leur degré d'importance ; puis il a montré comment on pourrait appliquer à chacune des questions sociales qu'il a exposées les principes mathématiques qui permettent d'obtenir des formules représentant les résultats connus, et qui donnent, dans une certaine mesure, le moyen de prévoir le développement futur de quelques questions sociales.

Par exemple, il fait remarquer que la société est une réunion d'individus soumis à leurs actions réciproques et à des actions extérieures ; que l'individu joue, pour le corps social, le même rôle que l'atome pour un corps matériel ; que les nombreuses causes qui font varier une société peuvent être rangées en trois groupes caractérisés par les épithètes *économique*, *intellectuel* et *moral*. Ensuite il montre comment la Mécanique peut être appliquée au corps social.

Il est ainsi amené à étudier la composition des forces sociales, leur résultante, leur équilibre, leur centre de gravité ; à appliquer le principe des vitesses virtuelles à la question de la stabilité de l'équilibre d'un corps social ; à discuter des idées différentes sur une même question étudiée par Herbert Spencer et par B. Brunhes ; à montrer qu'on peut appliquer aux phénomènes sociaux les trois principes de l'inertie, de l'égalité de l'action et de la réaction, des mouvements relatifs, puis le théorème des forces vives et l'équation des quantités de mouvement.

Après avoir constaté que les équations différentielles du mouvement social seront difficiles à intégrer, parce que l'expression analytique des forces sera compliquée, il montre que la solution de ce problème social ne doit pas, pour cette raison, être aban-

donnée, mais qu'il faut chercher des expressions approchées qui permettront d'arriver plus tard à une solution satisfaisante.

M. Spiru Haret examine les effets produits sur une masse sociale par les chocs sociaux tels que la guerre, les grèves, les révolutions, les épidémies, les invasions, les inondations, les tremblements de terre, la famine ; et il démontre qu'un choc social produit toujours, dans une masse sociale, une perte de force vive ou d'énergie. Il a même abordé la manière de traiter mathématiquement la question de la périodicité de certains phénomènes sociaux. Il a examiné quelques forces sociales pouvant produire un mouvement social, mais il a été obligé de constater que la loi de ces forces n'est pas encore susceptible d'être exprimée par une formule.

D'une rapide étude du mouvement social pendant les quinze siècles qui ont précédé le nôtre, il déduit que ce mouvement peut être considéré comme ayant suivi une trajectoire formée de quatre branches de courbe ascendantes et raccordées successivement par trois branches plus courtes montant beaucoup plus rapidement.

La question si importante du capital est traitée mathématiquement, et l'Auteur montre que la formule de l'intérêt composé ordinairement appliquée conduit à des conséquences absurdes, et qu'il faudrait la remplacer par la formule rationnelle connue ae^{r}.

Le Livre se termine par un aperçu général de la civilisation, où sont examinés les principaux caractères de l'état civilisé, où est effleurée l'histoire des civilisations passées, où sont exposées quelques-unes des causes qui s'opposent au développement de la civilisation, où l'Auteur explique pourquoi il donne à la Suède et à la Norvège la place d'honneur parmi les nations civilisées.

Le travail de M. Spiru Haret est le résultat du rapprochement que ses fonctions de Ministre d'État lui ont permis de faire entre le mode de développement des questions sociales et certaines lois scientifiques, notamment la loi de l'attraction universelle. En soumettant son Ouvrage aux savants, l'Auteur espère que, de leurs réflexions, résultera une méthode sûre pour traiter les questions sociales dont la solution est, à présent, due le plus souvent à l'inspiration du moment ou à l'esprit de parti. Er. L.

MÉLANGES.

SUR UNE MÉTHODE DE TISSOT RELATIVE A LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. GASTON DARBOUX.

On sait qu'en dehors d'une théorie rationnelle de la déformation, on doit à Tissot une méthode nouvelle pour obtenir, à l'aide des développements en série, le meilleur mode de représentation d'un pays donné, tel que la France, l'Espagne, etc. Tissot, s'appuyant sur ce que la région à représenter est toujours fort petite relativement à la surface du globe, s'efforce d'obtenir des développements en série réduisant au minimum les altérations d'angles et de distances. Son exposition m'a paru quelque peu confuse, et il m'a semblé qu'en restant dans le même ordre d'idées on pourrait suivre avec avantage la méthode suivante.

I.

Rapportons une surface quelconque à son plan tangent et à des tangentes principales. Son équation sera de la forme

$$x = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'} + \ldots, \tag{1}$$

R et R′ désignant les rayons de courbure principaux à l'origine et les termes négligés étant au moins du troisième ordre en x, y. On peut même remarquer que, dans le cas de la sphère, les termes du troisième ordre disparaissent, et qu'ils sont très petits dans le cas où l'on considère la terre comme un ellipsoïde aplati.

On aura donc, pour l'élément linéaire de la surface, l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{x\,dx}{R} + \frac{y\,dy}{R'}\right)^2, \tag{2}$$

les termes négligés ne contenant que les troisièmes puissances et les puissances supérieures de x et de y.

Essayons de trouver des séries

$$(3) \qquad \alpha = f(x, y), \qquad \beta = \varphi(x, y),$$

telles que

$$d\alpha^2 + d\beta^2$$

coïncide avec ds^2 jusqu'aux termes de degré le plus élevé possible. En désignant par α_0, β_0 les premiers termes des séries (3), il faudra qu'on ait

$$d\alpha_0^2 + d\beta_0^2 = dx^2 + dy^2.$$

On connaît la solution la plus générale de cette équation. On sait que, par un choix convenable des axes, on la ramène à la forme

$$\alpha_0 = x, \qquad \beta_0 = y.$$

C'est ce que nous supposerons dans la suite. On pourra donc poser

$$\alpha = x + u, \qquad \beta = y + v,$$

u et v étant au moins du second ordre. Mais comme il n'y a pas dans ds^2 de termes du premier ordre en x, y, il faudra supposer que u et v sont au moins du troisième ordre, et écrire

$$(4) \qquad \alpha = x + u_3 + \ldots, \qquad \beta = y + v_3 + \ldots.$$

Alors on aura, pour l'élément linéaire du plan, l'expression

$$(5) \qquad d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 = dx^2 + dy^2 + 2\,du_3\,dx + 2\,dv_3\,dy,$$

les termes négligés étant du troisième ordre en x, y.

Si l'on pouvait disposer de u_3 et de v_3 de telle manière qu'on eût

$$2\,du_3\,dx + 2\,dv_3\,dy = \left(\frac{x\,dx}{R} + \frac{y\,dy}{R}\right)^2,$$

il y aurait identité entre les développements de ds^2 et de $d\sigma^2$ jusqu'au troisième ordre exclusivement. Mais il est aisé de voir que l'identité précédente est généralement impossible (nous ne faisons pas ce calcul parce qu'il est compris implicitement dans le suivant). Il est donc impossible d'assurer la conservation des grandeurs jusqu'au second ordre inclusivement.

Voyons du moins s'il serait possible de conserver la similitude des infiniment petits et si l'on pourrait avoir

$$(6) \qquad d\sigma^2 = (1 + \lambda)^2\,ds^2.$$

en prenant pour λ une quantité qui sera nécessairement du second ordre en x, y, puisque $ds^2 - d\sigma^2$ est du second ordre. Alors, en égalant les termes du second ordre dans l'équation précédente et désignant par λ_0 la partie homogène du second ordre de λ, on devra avoir

$$2\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{x^2}{R^2} + 2\lambda_0,$$

$$2\frac{\partial u_3}{\partial y} + 2\frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{2xy}{RR'},$$

$$2\frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{y^2}{R'^2} + 2\lambda_0.$$

Ces équations sont faciles à résoudre. On en déduit d'abord

$$\frac{\partial^2\lambda_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\lambda_0}{\partial y^2} = \frac{1}{RR'}, \tag{7}$$

et par suite

$$\lambda_0 = \frac{x^2 - y^2}{4RR'} + A(x^2 - y^2) + 2Bxy, \tag{8}$$

A et B désignant des constantes,

Portant cette valeur de λ_0 dans les identités précédentes, on obtiendra aisément les valeurs de u_3 et de v_3. On trouve ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= x + \frac{x^3}{6R^2} + \frac{x^3 - 3xy^2}{12RR'} + \frac{A}{3}(x^3 - 3xy^2) + \frac{B}{3}(3x^2y - y^3) + \ldots, \\ \beta &= y + \frac{y^3}{6R'^2} - \frac{y^3 - 3x^2y}{12RR'} - \frac{A}{3}(y^3 - 3yx^2) + \frac{B}{3}(3y^2x - x^3) + \ldots, \\ m &= 1 + \frac{x^2 + y^2}{4RR'} + A(x^2 - y^2) + 2Bxy + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

m désignant le rapport de similitude

Si l'on résout ces équations par rapport à x, y, on aura évidemment, au même ordre d'approximation,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha - \frac{\alpha^3}{6R^2} - \frac{\alpha^3 + 3\alpha\beta^2}{12RR'} - \frac{A}{3}(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) - \frac{B}{3}(3\beta\alpha^2 - \beta^3), \\ y &= \beta - \frac{\beta^3}{6R'^2} - \frac{\beta^3 - 3\beta\alpha^2}{12RR'} + \frac{A}{3}(\beta^3 - 3\beta\alpha^2) - \frac{B}{3}(3\alpha\beta^2 - \alpha^3), \\ m &= 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4RR'} + A(\alpha^2 - \beta^2) + 2B\alpha\beta. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On pourrait déduire de ces expressions le théorème de Gauss; car si l'on prend la valeur moyenne de m sur un cercle de rayon ρ

ayant l'origine pour centre, on trouve

$$m = 1 + \frac{\rho^2}{4\,RR'}.$$

Comme les mêmes représentations conformes conviennent à toutes les surfaces applicables sur la première, on voit que la courbure totale doit être la même pour toutes ces surfaces aux points correspondants.

Pour déterminer les constantes A et B, Tissot a un procédé ingénieux. Admettons, pour fixer les idées, qu'on suppose la terre sphérique et qu'on fasse

$$R = R' = 1.$$

Tissot cherche, parmi les coniques représentées par l'équation

$$\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - A(\alpha^2 - \beta^2) + 2B\alpha\beta = \text{const.},$$

celle qui, en épousant le mieux la forme de la surface, correspond à la plus petite valeur de λ.

On peut employer d'autres considérations.

Par exemple, on peut vouloir que, dans l'aire à représenter, la valeur moyenne de $(m - 1)^2$ soit la plus petite possible.

On peut aussi demander que la valeur moyenne du carré du gradient de λ soit la plus petite possible. Cette valeur moyenne est égale à l'intégrale

$$(11) \qquad I = \int\int \left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2\right] d\alpha\, d\beta,$$

divisée par la surface totale. Si l'on pose

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= \int\int (\alpha^2 + \beta^2)\, d\alpha\, d\beta, \\ \nu &= \int\int (\alpha^2 - \beta^2)\, d\alpha\, d\beta, \\ \nu' &= 2\int\int \alpha\beta\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned}\right.$$

on trouve par un calcul facile

$$(13) \qquad A = \frac{-\nu}{4\mu RR'}, \qquad B = \frac{-\nu'}{4\mu RR'},$$

et le minimum de l'intégrale I est

$$\frac{\mu^2 - \nu^2 - \nu'^2}{4\mu R^2 R'^2}.$$

La valeur de λ pourra alors s'écrire

$$\lambda = \frac{1}{2\mu RR'} \int\int (\alpha\beta_0 - \beta\alpha_0)^2 \, d\alpha_0 \, d\beta_0. \tag{14}$$

Dans le cas où la courbe limite est une ellipse, on obtient un résultat remarquable.

Supposons que l'ellipse soit définie par les équations

$$\begin{cases} \alpha = a \cos\varphi + b \sin\varphi, \\ \beta = a' \cos\varphi + b' \sin\varphi, \end{cases} \tag{15}$$

où φ varie de 0 à 2π, ce qui donnera l'équation suivante

$$(a'\alpha - a\beta)^2 + (b'\alpha - b\beta)^2 = (ab' - ba')^2, \tag{16}$$

de cette courbe.

Les points intérieurs à l'ellipse seront définis par les équations

$$\alpha_0 = \varepsilon(a \cos\varphi + b \sin\varphi),$$
$$\beta_0 = \varepsilon(a' \cos\varphi + b' \sin\varphi),$$

où ε variera de 0 à 1 et φ de 0 à 2π.

L'élément d'aire sera

$$(ab' - ba')\varepsilon \, d\varepsilon \, d\varphi,$$

et la valeur (14) de λ deviendra

$$\lambda = \frac{ab' - ba'}{2\mu RR'} \int\int \varepsilon^3 [(a'\alpha - a\beta)\cos\varphi + (b'\alpha - b\beta)\sin\varphi]^2 \, d\varepsilon \, d\varphi.$$

Un calcul facile donne

$$\lambda = \frac{\pi(ab' - ba')}{8\mu RR'} [(a'\alpha - a\beta)^2 + (b'\alpha - b\beta)^2]. \tag{17}$$

On a d'autre part

$$\mu = \frac{\pi}{4}(ab' - ba')(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2). \tag{18}$$

On voit donc, en rapprochant les équations (16) et (17), que la valeur de λ sera *maximum sur l'ellipse qui sert de contour* et qu'elle y prendra la valeur *constante*

$$\lambda = \frac{(ab' - ba')^2}{2RR'(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2)}. \tag{19}$$

Or, si l'on désigne par A′ et B′ les demi-axes de l'ellipse, on trouve facilement qu'on a

$$(ab' - ba')^2 = A'^2 B'^2,$$

$$a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 = A'^2 - B'^2.$$

On a donc

$$\lambda = \frac{A'^2 B'^2}{2RR'(A'^2 - B'^2)}. \tag{20}$$

Or, si l'on appelle ρ le demi-diamètre de l'ellipse qui fait des angles égaux avec les deux axes, on a

$$\frac{2}{\rho^2} = \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2},$$

et par conséquent

$$\lambda = \frac{\rho^2}{4RR'}. \tag{21}$$

Dans le cas de la sphère, on a

$$\lambda = \frac{\rho^2}{4}.$$

Le fait que λ est constant sur le contour, quand ce contour est une ellipse, se rattache au théorème de Tchebychef, que nous avons démontré dans une Note antérieure. Car, à l'ordre d'approximation adopté, l'intégrale I considérée plus haut ne diffère pas de celle

$$\int\int \left[\left(\frac{\partial \log m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log m}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

qui figure dans la théorie de Tchebychef.

Remarquons encore que cette théorie rationnelle fournit, dans une certaine mesure, la justification du procédé quelque peu élémentaire de Tissot et de l'emploi de son jeu de coniques pour le choix de la meilleure représentation d'une contrée. Car puisque, d'après le théorème de Tchebychef, λ devrait être constant sur le contour, et puisque, à l'aide de l'approximation adoptée, ses valeurs demeurent constantes sur des coniques concentriques, il est naturel de choisir parmi ces coniques celle qui recouvre le mieux, et avec la plus petite valeur de λ, la contrée considérée ou, plus correctement, sa projection orthogonale sur le plan tangent.

II.

On peut aborder la même théorie par une voie plus rigoureuse, où les développements en série n'interviennent qu'à la fin et dans des conditions plus générales.

A cet effet, considérons une surface rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques, et soit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{22}$$

la formule qui fait connaître son élément linéaire. La théorie de la représentation conforme repose sur la considération de l'équation fondamentale

$$d(\alpha + i\beta) = \mu\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right), \tag{23}$$

où H désigne la quantité

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \tag{24}$$

et où μ est un facteur à déterminer.

Ce facteur devra évidemment satisfaire à la condition

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mu\sqrt{E}) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\mu\frac{F + iH}{\sqrt{E}}\right), \tag{25}$$

qui est à la fois nécessaire et suffisante.

Posons

$$\mu = \lambda e^{i\sigma}, \tag{25}$$

λ étant le module et σ l'argument de μ; et remarquons que, d'après l'équation (23) et celle qu'on obtient en changeant i en $-i$, on aura

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \lambda^2\,ds^2, \tag{26}$$

λ sera donc le rapport de similitude de la Carte à la surface et aura une signification géométrique tout à fait indépendante du choix des coordonnées. Nous allons établir qu'il satisfait à une équation aux dérivées partielles très simple.

Séparons dans l'équation (23) les parties réelles et les parties imaginaires, après l'avoir divisée par μ. Nous aurons

$$\sqrt{E}\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{E}}\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} - \frac{H}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E},$$

$$\sqrt{E}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{H}{\sqrt{E}}\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H}{\sqrt{E}}\right).$$

Tirons de ces équations les deux dérivées de σ, ce qui donnera

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial u} = \dfrac{E}{H}\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} - \dfrac{F}{H}\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} - \dfrac{1}{2H}\dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{E}}{H}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{F}{\sqrt{E}}\right), \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = \dfrac{G}{H}\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} - \dfrac{F}{H}\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} - \dfrac{1}{2H}\dfrac{\partial G}{\partial u} - \dfrac{F}{2EH}\dfrac{\partial E}{\partial v}. \end{cases}$$

Éliminons σ en égalant les deux valeurs qu'on obtient pour la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}$, il viendra, en adoptant le symbole $\Delta_2\theta$ de Beltrami,

$$(28)\quad \Delta_2 \log\lambda = \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-1}{H}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right),$$

équation fondamentale qui est due à Beltrami.

Le second membre est évidemment un invariant. Pour connaître sa signification géométrique, on peut évidemment le calculer en se servant de l'élément linéaire donné par la formule (2). On trouve ainsi qu'il est égal à $\dfrac{1}{RR'}$. Ainsi on a

$$(29)\quad \Delta_2 \log\lambda = \frac{1}{RR'}.$$

Réciproquement, supposons qu'on ait obtenu une solution *quelconque* de cette équation. Les formules (27) feront connaître σ par une quadrature. On aura donc le facteur μ. En le portant dans la formule (23), on aura $\alpha + i\beta$ et par conséquent α et β par une nouvelle quadrature. Donc à toute solution de l'équation (26) correspond une solution du problème de la représentation conforme. On s'assure aisément que cette solution est unique et bien déterminée. Les constantes qu'on introduit par les intégrations donnent la même Carte, rapportée à des axes différents.

On a, comme on sait,

$$(30)\quad \Delta_2\theta = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{H}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{F}{H}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{H}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{F}{H}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right).$$

D'après cela, si l'on revient à la méthode du développement en série et si l'on veut représenter la région qui entoure le point de coordonnées curvilignes u_0, v_0, on voit qu'on pourra adopter, pour le développement de la valeur de $\log\lambda$ satisfaisant à l'équa-

tion (29) suivant les puissances de $u - u_0$, $v - v_0$, une série privée des termes constants et des termes du premier degré. Mais cette série contiendra *nécessairement* des termes du second degré sans quoi $\Delta_2 \log\lambda$ serait nul, ce qui est impossible tant que la courbure totale n'est pas nulle. Nous sommes donc conduits au même résultat que par notre première méthode.

Si l'on pose

$$\log\lambda = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots,$$

λ_2 désignant l'ensemble des termes du second degré, λ_2 sera déterminé, autant qu'il peut l'être, par l'équation

$$\frac{G}{H^2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial u^2} - \frac{2F}{H^2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial u\,\partial v} + \frac{E}{H^2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial v^2} = \frac{1}{RR'},$$

où l'on a remplacé, dans les coefficients et dans le second membre, u par u_0, v par v_0.

III.

Nous montrerons, en terminant, comment on peut étendre l'équation (29) à la correspondance avec similitude des éléments infiniment petits entre deux surfaces quelconques (S) et (S_1).

Supposons qu'entre les éléments linéaires de ces surfaces on ait la relation

$$ds_1^2 = m^2\,ds^2.$$

Si la première est représentée sur le plan d'élément linéaire de σ à l'aide de la formule

$$\lambda^2\,ds^2 = d\sigma^2,$$

la seconde le sera sur le même plan à l'aide de la formule

$$\frac{\lambda^2}{m^2}\,ds_1^2 = d\sigma^2.$$

Donc si Δ_2 désigne le paramètre linéaire relatif à la première surface, on aura

$$\Delta_2 \log\lambda = \frac{1}{RR'}, \tag{31}$$

R, R′ étant les rayons de courbure de (S). On aura de même pour (S_1)

$$\Delta_2' \log\frac{\lambda}{m} = \frac{1}{R_1 R_1'}, \tag{32}$$

Δ'_2 désignant l'invariant linéaire relatif à la seconde surface, et R_1, R'_1 ses rayons de courbure principaux. Or, l'expression (30) de Δ_2 montre immédiatement qu'on aura

$$H\,\Delta_2\theta = H_1\,\Delta'_2\,\theta$$

ou

$$\Delta_2 = m^2\,\Delta'_2.$$

Donc l'équation (32) peut s'écrire

$$\Delta_2 \log\frac{\lambda}{m} = \frac{m^2}{R_1 R'_1}.$$

En la retranchant alors de l'équation (31), on élimine λ et il vient

$$\Delta_2 \log m = \frac{1}{RR'} - \frac{m^2}{R_1 R'_1}. \tag{33}$$

Telle est l'équation générale que nous voulions obtenir. Elle comprend évidemment comme cas particulier l'équation (29).

On en déduit une propriété nouvelle et curieuse de la courbure totale. Si l'on veut représenter une surface (S) sur une surface (S_1) de telle manière qu'un point M de (S) corresponde à un point M_1 de (S_1) et que le développement du rapport de similitude dans le voisinage de M soit privé des termes du premier et du deuxième ordre, $\Delta_2 \log m$ sera nul au point M et, par conséquent, le rapport de similitude devra être égal à

$$\frac{\sqrt{R_1 R'_1}}{\sqrt{RR'}}.$$

C'est à cette condition seulement que le développement de $\log m$ commencera aux termes du troisième ordre.

On voit que la solution réelle de ce problème sera impossible, si les courbures totales ne sont pas de même signe.

Le résultat que nous venons d'obtenir justifie jusqu'à un certain point l'artifice de Prony qui, pour tenir compte de l'aplatissement terrestre, substituait en un point à l'ellipsoïde terrestre la sphère tangente ayant même courbure totale. Mais c'est Gauss qui, dans son magistral Mémoire de Copenhague et dans ses écrits géodésiques, a mis au point cette question et donné à l'idée de Prony la forme précise et rigoureuse qui lui manquait.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

POINCARÉ (H.). — LEÇONS DE MÉCANIQUE CÉLESTE. Tome II, Deuxième Partie : THÉORIE DE LA LUNE. In-8, 136 pages. Paris, Gauthier-Villars.

L'élaboration d'une théorie satisfaisante de la *Lune* est un des problèmes les plus difficiles de la Mécanique céleste. De nombreux géomètres y ont consacré leurs efforts, depuis Newton qui traitait déjà avec quelques détails de l'inégalité de la longitude connue sous le nom de *variation*.

Les difficultés proviennent de la grandeur de la force perturbatrice relativement à la force d'attraction de la masse principale, circonstance qui fait échouer les procédés mis en œuvre dans les théories de planètes.

Bien que les éphémérides modernes soient tirées des Tables de Hansen, corrigées empiriquement, il est vrai, par Newcomb, M. Poincaré n'expose pas leur formation en raison de la complication de la méthode, qui est une méthode *numérique* ; le calcul des coefficients ne demanda-t-il pas, en effet, à Hansen une douzaine d'approximations successives et trois ans de travail.

C'est, avec quelques variantes de détails, la méthode de Brown qu'on trouvera dans le présent Ouvrage. Sa théorie occupe une position intermédiaire entre la voie purement *numérique* de Hansen et celle purement *analytique* de Delaunay.

Le Chapitre XXIV, qui est le premier Chapitre du fascicule, donne, sur la nature du développement des coordonnées, des renseignements généraux auxquels conduisent des considérations d'homogénéité ou de symétrie.

Suivant une idée qui remonte à Euler, on introduit un système d'axes mobiles tournant avec une vitesse angulaire égale au moyen mouvement du Soleil.

Chapitre XXV. La *variation* fait l'objet du Chapitre suivant. Il s'agit là des termes d'ordre zéro par rapport à la parallaxe, les excentricités et l'inclinaison de l'orbite lunaire. Les magistrales

recherches de Hill ont donné la solution complète du problème.

Chapitre XXVI. Puis, c'est la recherche des inégalités du premier ordre par rapport à l'inclinaison de l'orbite lunaire. La coordonnée z de la Lune dépend de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dz^2} - z(\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau - 2\Theta_2 \cos 4\tau \ldots) = 0.$$

les Θ ayant des développements connus. La solution périodique de cette équation, donnée par M. Hill, repose sur la considération d'un déterminant d'ordre infini dont M. Poincaré a démontré la convergence. Dans l'expression de z figure la constante permettant de définir le *moyen mouvement du nœud*.

Chapitre XXVII. Les inégalités de l'ordre de la première puissance de l'excentricité lunaire donneront le mouvement du *périgée*, l'*équation du centre* et l'*évection*. La solution dépend de certaines équations linéaires du second ordre, ici sans seconds membres, appelées *équations aux variations*.

Chapitre XXVIII. Les premiers membres des mêmes équations, égalés à des seconds membres tout connus, fournissent les termes d'ordres supérieurs, dont la détermination est ainsi ramenée à de simples quadratures.

Chapitre XXIX. Après cet exposé de la méthode de Brown, M. Poincaré donne quelques indications sur une deuxième méthode qui fournirait, plus simplement que ne l'a fait Delaunay, un développement analytique des coefficients ; le problème est ramené à la résolution d'un système de deux équations linéaires à seconds membres et du premier ordre.

Enfin, se trouvent exposés les théorèmes d'Adams relatifs aux particularités du développement de $\frac{1}{r}$, quand on néglige la parallaxe.

Chapitre XXX. Ce Chapitre traite de l'action des planètes par la méthode de la variation des constantes, question étudiée par Newcomb, puis par M. Radau.

Chapitre XXXI. Les dernières pages du fascicule résument le problème des accélérations séculaires des moyens mouvements.

Et ainsi se trouve exposée la théorie si ardue de la Lune avec un maximum de concision limpide et d'élégance.

Là, autant qu'ailleurs, le plaisir du lecteur qui se laisse conduire par M. Poincaré, c'est qu'il arrive très rapidement au but, comme sans effort et par un chemin tout droit.

A. Lambert.

MÉLANGES.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA.

PRIX BOLYAI [1].

Procès-verbal des séances de la Commission internationale de 1910.

A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Jean *Bolyai*, l'Académie hongroise des Sciences, voulant perpétuer le souvenir de cet illustre savant, ainsi que celui du profond penseur que fut Farkas Bolyai, son père et son maître, avait décidé de fonder un prix international qui devait porter le nom de *Prix Bolyai*. Ce prix devait être décerné pour la première fois en 1905, puis de cinq en cinq ans à l'auteur du meilleur Ouvrage de Mathématiques paru au cours des cinq années précédentes, en prenant en considération toute son œuvre antérieure.

D'après le règlement du prix, l'Académie avait confié le soin de le décerner pour les années 1905-1909 à une Commission composée de deux membres résidants : M. Jules König, secrétaire de la classe des Sciences; M. Gustave Rados, membre de la Classe, et deux membres étrangers : M. Gösta Mittag-Leffler, membre de l'Académie des Sciences suédoise; M. Henri Poincaré, membre de l'Institut de France.

La Commission s'est réunie à Budapest les 17 et 18 octobre 1910 et elle a désigné comme président M. Jules König et comme rapporteur M. Henri Poincaré.

---

[1] Voir *Bulletin*, 1906, p. 103, pour la première attribution du prix international.

Parmi les travaux les plus dignes d'attention publiés dans les cinq dernières années, la Commission a particulièrement remarqué ceux de M. David Hilbert, qui, par la profondeur de la pensée, l'originalité des méthodes, la rigueur logique des démonstrations, ont déjà exercé une influence considérable sur les progrès des sciences mathématiques.

Après avoir examiné les titres divers de cet auteur, et prenant en considération non seulement ses travaux des cinq dernières années, mais ses recherches antérieures et l'ensemble de sa carrière scientifique, la Commission a unanimement décidé de décerner le prix Bolyai de l'Académie des Sciences hongroise, pour les années 1905-1909, à

M. David Hilbert.

Les motifs de cette décision seront exposés dans le Rapport de M. Poincaré.

Ce procès-verbal a été accepté à l'unanimité.

Budapest, 18 octobre 1910.

Signé :

KONIG, Président.

POINCARÉ, Rapporteur.
MITTAG-LEFFLER.
RADOS.

Rapport de M. Henri POINCARÉ.

Les problèmes traités par M. Hilbert sont tellement variés et leur importance est si évidente qu'un long préambule ne nous semble pas nécessaire. Je crois préférable d'entrer immédiatement dans l'exposé détaillé de ses principaux Mémoires. Le lecteur, en présence de résultats si considérables, tirera la conclusion de lui-même.

Les invariants. — Les premiers travaux de M. Hilbert sont relatifs à la théorie des invariants. On sait avec quelle passion cette partie des Mathématiques a été cultivée vers le milieu du

siècle dernier et combien elle a été délaissée depuis. Il semblait en effet que les Clebsch, les Gordan, les Cayley, les Sylvester eussent épuisé tout ce qu'on pouvait tirer des méthodes anciennes et qu'il n'y eût plus après eux que peu de chose à glaner. Mais les progrès de l'Algèbre et de l'Arithmétique, et en particulier la théorie des nombres entiers algébriques, l'extension qu'on en fit bientôt aux polynomes entiers, la théorie des modules de Kronecker, allaient permettre d'aborder la question par un côté encore inexploré. C'est ce qu'a fait M. Hilbert en s'attaquant tout d'abord au célèbre théorème de Gordan, d'après lequel tous les invariants d'un système de formes peuvent s'exprimer d'une façon rationnelle et entière en fonctions d'un nombre fini d'entre eux. On ne saurait mieux mesurer le progrès accompli qu'en comparant le volume que Gordan avait dû consacrer à sa démonstration aux quelques lignes dont Hilbert a pu se contenter. La méthode gagnait en généralité autant qu'en simplicité et l'on pouvait entrevoir toute une série de généralisations possibles. Un lemme très simple inspiré par les idées de Kronecker avait rendu ce résultat possible :

Considérons une série indéfinie de formes F dépendant de n variables; on peut trouver parmi elles un nombre fini de formes $F_1, \ldots, F_p$ telles qu'une forme quelconque F de la série puisse être égalée à

$$F = A_1 F_1 + \ldots A_p F_p, \tag{1}$$

les A étant des formes dépendant des mêmes variables. C'est là une conséquence de la notion fondamentale de module introduite par Kronecker dans la Science. Cela veut dire, dans le langage de Kronecker, que les diviseurs communs à plusieurs modules, ceux-ci fussent-ils en nombre infini, sont les sous-multiples de l'un d'entre eux, qui est leur plus grand commun diviseur, et dans le langage géométrique (en supposant 4 variables et les regardant comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace), que l'ensemble des points communs à un nombre infini de surfaces algébriques se compose d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de courbes gauches algébriques.

Mais ce n'est pas tout : supposons que les F soient les invariants d'un système de formes et les A des fonctions des coefficients de

ces formes. On peut toujours supposer que les A sont aussi des invariants, sans quoi on pourrait effectuer sur les formes une transformation linéaire arbitraire. Alors, dans la relation (1) ainsi transformée, figureraient les coefficients de cette transformation. En appliquant, à la relation (1) transformée, un certain processus de différentiations successives (les différentiations s'effectuant par rapport aux coefficients de la transformation linéaire), on arrive à une relation de même forme que (1) mais où les A sont des invariants. La démonstration du théorème de Gordan s'en déduit immédiatement.

Mais ce n'est pas tout : entre ces invariants fondamentaux, il y a un certain nombre de relations appelées *syzygies*. Toutes les syzygies peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication. Entre ces syzygies fondamentales du premier ordre il y a des syzygies du second ordre, qui peuvent aussi se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication, et ainsi de suite.

M. Hilbert déduit ce résultat d'un théorème général d'algèbre. Considérons un système d'équations linéaires de la forme :

$$\sum F_{ik} X_i = 0$$

où les F sont des formes données et les X des formes inconnues homogènes par rapport à certaines variables; l'étude des solutions de ce système et des relations qui les lient conduit à considérer une série de systèmes dérivés jusqu'à ce qu'on arrive à un système dérivé qui n'admet plus aucune solution. C'est ainsi d'ailleurs que M. Hilbert fut amené à déterminer et à étudier le nombre $\chi(R)$ des conditions distinctes auxquelles doit satisfaire une forme de degré R pour être congrue à zéro par rapport à un module donné.

Mais, pour compléter la théorie, il ne suffisait pas d'établir l'existence d'un système d'invariants fondamentaux, il fallait donner les moyens de le former effectivement, et ce problème a été ramené par l'auteur à une question qui se rattache à la théorie des nombres entiers algébriques étendue aux polynomes entiers.

Le problème est ainsi décomposé en trois autres :

1° Trouver des invariants J_m en fonctions desquels tous les

autres puissent s'exprimer sous une forme *entière et algébrique*, c'est-à-dire tels qu'un invariant quelconque J satisfasse à une équation algébrique

$$J^k + G_1 J^{k-1} + G_2 J^{k-2} + \ldots + G_{k-1} J + G_k = 0,$$

les G étant des polynomes entiers par rapport aux J_m;

2° Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer rationnellement;

3° Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer sous forme entière et rationnelle.

De ces trois problèmes le premier est le plus difficile. Si on le suppose résolu, l'ensemble des invariants se présente comme un *corps algébrique*, et le premier pas à faire c'est de déterminer le degré de ce corps; c'est à quoi parvient M. Hilbert, au moins pour les formes binaires, en évaluant de deux manières différentes le nombre $\varphi(\sigma)$ des invariants linéairement indépendants de degré σ, ou plutôt la valeur asymptotique de cette fonction numérique $\varphi(\sigma)$ pour σ très grand.

Une fois le premier problème résolu, la solution des deux autres se ramène à une question classique de l'arithmétique des polynomes et de la théorie des corps algébriques. Il s'agit donc de trouver les invariants fondamentaux à l'aide desquels tous les autres s'expriment sous forme entière et algébrique.

A cet effet M. Hilbert remarque que ce sont ceux qui ne peuvent s'annuler sans que tous les autres s'annulent. On conçoit ainsi que la recherche de ces invariants fondamentaux sera singulièrement facilitée par l'étude des *formes nulles*, c'est-à-dire de celles dont les coefficients numériques sont choisis de telle sorte que les valeurs numériques de tous les invariants soient nulles.

Dans le cas des formes binaires, les formes nulles sont celles qui sont divisibles par une puissance suffisamment élevée d'un facteur linéaire; mais dans les autres cas le problème est plus délicat. L'auteur met d'abord en évidence un certain nombre de théorèmes.

Considérons une forme à coefficients numériques et sa transformée par une substitution linéaire quelconque; les coefficients de cette transformée seront des polynomes entiers par rapport aux coefficients de la substitution. Si le déterminant de la substitution

est une fonction *algébrique et entière* de ces polynomes entiers, la forme proposée n'est pas une forme nulle. Dans le cas contraire, c'est une forme nulle.

Considérons d'autre part les transformées d'une forme par une substitution linéaire dépendant d'un paramètre arbitraire t et de telle façon que les coefficients de cette substitution soient des séries développables suivant les puissances entières, positives ou négatives mais croissantes, de ce paramètre. S'il s'agit d'une forme nulle, on peut choisir une substitution de cette nature de telle sorte que son déterminant devienne infini pour $t = 0$, tandis que les coefficients de la forme transformée restent finis. M. Hilbert montre que cette condition est nécessaire pour que la forme proposée soit nulle, et il est d'ailleurs évident qu'elle est suffisante. A chaque forme nulle correspond donc une et peut-être plusieurs substitutions linéaires jouissant de la propriété énoncée. Cela posé, l'auteur démontre que, partant d'une forme nulle quelconque, on peut, par une transformation linéaire, la transformer en une forme nulle *canonique*. Une forme est dite *canonique* quand la substitution linéaire qui lui correspond et qui jouit par rapport à elle de la propriété que nous venons d'énoncer est de la forme simple :

$$\begin{vmatrix} t^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{\lambda_3} \end{vmatrix}$$

La recherche des formes nulles est ainsi ramenée à celle des formes nulles canoniques, qui est beaucoup plus simple. On trouve que les formes nulles canoniques sont celles auxquelles il manque certains termes; et la détermination des termes qui doivent manquer peut se faire aisément, grâce à un schéma géométrique simple. On voit sous quel aspect nouveau et élégant se présentent aujourd'hui, grâce à M. Hilbert, des problèmes qui avaient tenté tant de géomètres il y a cinquante ans.

Le nombre e. — M. Hermite a le premier démontré que le nombre e est transcendant et peu de temps après M. Lindemann étendait ce résultat au nombre π. C'était là une conquête importante pour la Science, mais les méthodes d'Hermite étaient encore susceptibles de perfectionnements; quelque ingénieuses et

quelque originales qu'elles fussent, on sentait qu'elles ne conduisaient pas au but par le plus court. Ce chemin le plus court, M. Hilbert l'a trouvé et il semble qu'on ne puisse plus apporter désormais à la démonstration de simplification nouvelle.

C'était la seconde fois que M. Hilbert donnait d'un théorème connu, mais qu'on ne pouvait établir que par des considérations ardues, une démonstration d'une étonnante simplicité. Cette faculté de simplifier ce qui avait d'abord semblé complexe se présentait ainsi comme un des caractères de son talent.

Arithmétique. — Les travaux arithmétiques de M. Hilbert ont principalement porté sur les corps algébriques. L'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer rationnellement en fonctions d'un ou de plusieurs nombres algébriques constitue un domaine de rationalité, et l'ensemble des nombres de ce domaine qui sont des entiers algébriques constitue un corps. Si l'on envisage ensuite tous les nombres algébriques d'un corps qui peuvent être mis sous la forme :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p$$

où les α sont des nombres *donnés* du corps, et les x des nombres indéterminés de ce même corps, l'ensemble de ces nombres est ce qu'on appelle un *idéal*. Ce qui fait l'intérêt de cette considération c'est que les idéaux obéissent, en ce qui concerne leur divisibilité, aux lois habituelles de l'Arithmétique et qu'en particulier tout idéal est décomposable d'une manière et d'une seule en idéaux premiers. C'est là le *théorème fondamental de Dedekind.*

D'autre part, nous pouvons considérer des nombres qui satisfont à une équation algébrique dont les coefficients appartiennent à un domaine D de rationalité. Ces nombres et ceux qui peuvent s'exprimer rationnellement par leur moyen définiront un nouveau domaine de rationalité D′, plus étendu que D, et un corps algébrique K′, plus étendu que le corps K qui correspond à D. On peut alors rapporter le corps K′, non pas aux nombres rationnels vulgaires et au corps des entiers de l'Arithmétique ordinaire, mais au domaine D et au corps algébrique K. On pourra alors parler du degré *relatif* de K′ par rapport à K, de la *norme relative* d'un nombre algébrique de K′ par rapport à K, etc. Il y aura des corps

relativement quadratiques obtenus par l'adjonction au domaine D d'un radical $\sqrt{\mu}$, μ étant un nombre du domaine D, et des corps relativement abéliens, obtenus par l'adjonction à D des racines d'une équation abélienne. Il y a là une sorte de généralisation des idées de Dedekind, que Hilbert n'est sans doute pas le premier à avoir entrevue, mais dont il a tiré un parti inattendu.

Nous devons aussi parler des corps *galoisiens*, dont l'équation génératrice est une équation de Galois. Un corps quelconque est contenu dans un corps galoisien, de la même façon que le corps K dont nous parlions tout à l'heure est contenu dans le corps K'; et ce corps galoisien s'obtient sans peine en adjoignant, au domaine de rationalité, non seulement l'une des racines de l'équation algébrique génératrice de K, mais *toutes* ses racines. Les questions relatives à un corps quelconque sont ainsi ramenées aux problèmes analogues pour les corps galoisiens.

Après avoir montré comment on pouvait, par la discussion d'une congruence, former tous les idéaux de norme donnée, M. Hilbert a cherché une démonstration nouvelle du théorème fondamental de Dedekind; il l'a établi d'abord pour les corps galoisiens et l'a étendu ensuite sans peine à un corps quelconque.

M. Hilbert fut ainsi conduit à étudier la théorie générale des corps galoisiens, et il introduisit une foule de notions nouvelles, en définissant une série de sous-corps, correspondant à divers sous-groupes du groupe de Galois de l'équation génératrice; ces sous-groupes sont définis par certaines relations qu'ils ont avec un idéal premier quelconque du corps, et l'étude de ces sous-corps nous ouvre des aperçus nouveaux et intéressants sur la structure du corps.

L'auteur donna en 1896 une démonstration nouvelle du théorème de Kronecker d'après lequel les racines des équations abéliennes peuvent s'exprimer par les racines de l'unité. Cette démonstration purement arithmétique met en évidence la façon de construire tous les corps abéliens d'un groupe et d'un discriminant donné.

Mais les travaux de M. Hilbert ont eu pour objet principal l'étude des corps relativement quadratiques et relativement abéliens. Un des points essentiels de la théorie des nombres est la loi de réciprocité de Gauss au sujet des résidus quadratiques; on sait

avec quelle prédilection le grand géomètre est revenu sur cette question et combien il a multiplié les démonstrations.

Cette loi de réciprocité est susceptible de généralisations intéressantes lorsqu'on passe du domaine des nombres rationnels ordinaires à un domaine de rationalité quelconque. M. Hilbert a pu réaliser cette généralisation dans le cas où le corps k est imaginaire et a un nombre de classes impair. Il a introduit un symbole analogue à celui de Legendre, et la loi de réciprocité à laquelle il est parvenu se présente sous une forme simple; le produit d'un certain nombre de pareils symboles doit être égal à 1. Cette généralisation présente d'autant plus d'intérêt que l'auteur a pu montrer qu'il y a des genres correspondant à la moitié de tous les systèmes imaginables de caractères, résultat qui doit être rapproché de celui de Gauss et qui permet l'extension à un domaine de rationalité quelconque de cette notion du genre des formes quadratiques qui fait l'objet d'un des chapitres les plus attrayants des *Disquisitiones Arithmeticæ*.

Pour aller plus loin, M. Hilbert est obligé d'introduire une notion nouvelle et de modifier la définition de la classe. Deux idéaux appartiennent à la même classe au sens large ou ancien si leur rapport est un nombre algébrique existant quelconque; ils appartiennent à la même classe au sens étroit ou nouveau si leur rapport est un nombre algébrique existant *qui est positif ainsi que tous ses conjugués*. Les nombres de classes, entendus soit au sens large, soit au sens étroit, sont évidemment en relation intime et l'auteur explique quelle est la nature de cette relation. Mais cette définition nouvelle permet à M. Hilbert d'exprimer dans un langage plus simple les théorèmes qu'il avait en vue. Ces théorèmes, énoncés sous leur forme la plus générale, sont, comme le dit M. Hilbert, d'une remarquable simplicité et d'une beauté cristalline; leur démonstration complète apparaissait à l'auteur comme le but final de ses études sur les corps algébriques. C'est sous cette forme générale que nous les énoncerons.

Si k est un corps quelconque, il existe un groupe Kk qu'on peut appeler son *Klassenkörper*. Son degré relatif est égal au nombre des classes au sens étroit. Il est non ramifié, c'est-à-dire qu'aucun idéal premier de k n'est divisible par le carré d'un idéal premier

de Kk et il contient tous les corps non ramifiés relativement abéliens par rapport à k.

Son groupe relatif est isomorphe au groupe abélien qui définit la composition des classes d'idéaux de k.

Les idéaux premiers de k, quoique premiers par rapport à k, ne le sont pas en général par rapport à Kk; ils peuvent donc être décomposés en facteurs idéaux premiers par rapport à Kk; le nombre de ces facteurs et la puissance à laquelle ils sont élevés, en un mot le mode de décomposition, dépendent uniquement de la classe à laquelle appartient dans le corps k l'idéal envisagé.

Appelons *ambige* un nombre de Kk qui est positif, ainsi que tous ses conjugués et qui ne diffère de ces conjugués que par un facteur, qui est une unité complexe.

Chaque ambige de Kk correspond à un idéal de k et réciproquement. Cette propriété est caractéristique du corps Kk parmi tous les corps relativement abéliens par rapport à k.

On voit quelle est la portée de ces théorèmes et quelle lumière elle jette sur la notion de classe, puisque les relations mutuelles des classes d'idéaux sont reproduites comme par une image fidèle par celles des entiers algébriques d'un corps.

A la vérité, M. Hilbert n'a démontré complètement ces théorèmes que dans des cas particuliers, mais ces cas particuliers sont très nombreux, très variés et très étendus. Il est d'ailleurs, dit-il, persuadé que ses méthodes sont applicables au cas général. Tout en partageant sa conviction, nous sommes obligés de faire des réserves, tant que cet espoir, si légitime qu'il soit, n'a pas été effectivement réalisé.

Nous avons parlé plus haut de la loi de réciprocité relative aux restes quadratiques; nous aurions dû ajouter que M. Hilbert a donné une loi analogue pour ses restes de puissances quelconques, au moins pour certains corps particuliers.

En résumé, l'introduction des idéaux par Kummer et Dedekind a été un progrès considérable, elle a généralisé et éclairé en même temps les résultats classiques de Gauss sur les formes quadratiques et leur composition. Les travaux de M. Hilbert que nous venons d'analyser constituent un nouveau pas en avant et qui n'est pas moins important que le premier.

Théorème de Waring. — Parlons maintenant d'un autre travail arithmétique entièrement différent. Il s'agit de démontrer le théorème de Waring d'après lequel tout entier peut être décomposé en une somme de N puissances $n^{\text{ièmes}}$, N ne dépendant que de n, de même qu'il peut par exemple être toujours décomposé en une somme de quatre carrés. Inutile de rappeler que ce théorème avait jusqu'ici été simplement énoncé.

Ce qui mérite surtout d'attirer l'attention dans la démonstration de M. Hilbert, c'est qu'elle repose sur une façon nouvelle d'introduire les variables continues dans la théorie des nombres.

On part d'une identité où une intégrale 25^{uple} est égalée à la puissance $m^{\text{ième}}$ de la somme de cinq carrés. Décomposant le domaine d'intégration en domaines plus petits de façon à avoir une série de valeurs approchées de l'intégrale, comme s'il s'agissait de l'évaluer par quadratures mécaniques, et par les méthodes de passage à la limite familières à l'auteur, on arrive à une autre identité :

$$(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^m = \sum r_h Y_h^{2m}$$

où les r_h sont des nombres positifs rationnels et les Y des fonctions linéaires des x à coefficients entiers. Les coefficients r et ceux des Y, ainsi que le nombre de ces fonctions linéaires, ne dépendent que de m.

Jusqu'ici nous ne sommes pas sortis de l'Algèbre, si ce n'est pour montrer que les coefficients r et ceux de Y sont rationnels. Pour aller plus loin l'auteur établit une série de lemmes dont l'énoncé est trop compliqué pour pouvoir être reproduit ici et qui l'amènent finalement à la démonstration complète du théorème. Nous ne devons pas douter que ces considérations, qui permettent ainsi d'obtenir des relations arithmétiques en les faisant sortir d'identités où figurent des intégrales définies, ne puissent un jour, quand on en aura bien compris le sens, être appliquées à des problèmes bien plus étendus que celui de Waring.

Géométrie. — J'arrive aux travaux si originaux de M. Hilbert sur les fondements de la Géométrie. Il y a, dans l'histoire de cette philosophie géométrique, trois époques principales : la première est celle où des penseurs, à la tête desquels nous devons citer

Bolyai, ont fondé la Géométrie non euclidienne; la deuxième est celle où Helmholtz et Lie ont montré le rôle en Géométrie de la notion de mouvement et de groupe; la troisième a été ouverte par Hilbert. L'auteur allemand se place au point de vue logique : quels sont les axiomes que l'on énonce et ceux que l'on sous-entend; quel en est le véritable contenu logique et qu'en pourrait-on tirer par la simple application des règles logiques et sans nouvel appel à l'intuition; sont-ils enfin indépendants, ou pourrait-on au contraire les déduire les uns des autres? Voilà quelles sont les questions à traiter.

M. Hilbert commence donc par établir la liste complète des axiomes, en s'efforçant de n'en pas oublier un; cela n'est pas aussi facile qu'on pourrait croire et Euclide lui-même en applique qu'il n'énonce pas. L'intuition géométrique nous est tellement familière que nous faisons usage des vérités intuitives pour ainsi dire sans nous en apercevoir. De là, pour atteindre le but que se proposait Hilbert, la nécessité de ne pas accorder à l'intuition la plus petite place.

Le savant professeur répartit les axiomes en cinq groupes :

I. *Axiome der Verknüpfung* (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connexion*, qui ne saurait être satisfaisante).

II. *Axiome der Anordnung* (axiomes de l'ordre).

III. Axiomes de la Congruence, ou axiomes métriques.

IV. Axiome d'Euclide.

V. Axiome d'Archimède.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue : *par deux points passe une droite et une seule*.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers :

« Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B, etc. »

Ici encore on remarquera que nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir le sens du mot *entre*, toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot.

Le troisième groupe comprend les axiomes métriques, où nous distinguerons trois sous-groupes, relatifs respectivement aux longueurs, aux angles, et aux triangles.

Un point important ici n'est pas traité; il aurait fallu compléter la liste des axiomes en disant que le segment AB est congruent au segment inverse BA. Cet axiome implique la symétrie de l'espace et l'égalité des angles à la base dans un triangle isoscèle. M. Hilbert ne traite pas ici cette question, mais il en a fait l'objet d'un Mémoire sur lequel nous reviendrons plus loin.

Le quatrième groupe ne comprend que le postulatum d'Euclide.

Le cinquième groupe comprend deux axiomes; le premier et le plus important est celui d'Archimède :

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a : AA_1, A_1A_2, ... $A_{n-1}A_{n^{\text{ième}}}$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grande que L.

Le second est l'*Axiom der Vollständigkeit*, dont j'expliquerai plus loin le sens.

Indépendance des axiomes. — La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la Géométrie existe; et M. Hilbert avait d'abord répondu *oui* en construisant une Géométrie. Mais, chose étrange, cette Géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de

deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas d'angle de 10°.

Dans sa seconde édition, M. Hilbert a voulu compléter sa liste de façon à retrouver notre Géométrie et à n'en pas retrouver d'autre, c'est pour cela qu'il introduisit l'*Axiom der Vollständigkeit* qu'il énonce comme il suit :

Au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre un autre système d'objets tel que le système complet satisfasse à tous les autres axiomes.

Il est clair alors que cet espace dont je parlais, qui ne contient pas tous les points de notre espace, ne satisfait pas à ce nouvel axiome, car on peut lui adjoindre ceux des points de notre espace qu'il ne contenait pas, sans cesser de satisfaire à tous les axiomes.

Il y a donc une infinité de Géométries qui satisfont à tous les axiomes, moins l'*Axiom der Vollständigkeit*, mais il n'y en a qu'une, la nôtre, qui satisfasse en outre à ce dernier axiome.

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une Géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe IV (postulatum d'Euclide) on obtient la Géométrie non euclidienne de Bolyai.

On peut également supprimer le groupe III. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, IV et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition III, 6.

La Géométrie non archimédienne. — Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de nombres non archimédiens*, c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Arithmetische Axiome der Verknüpfung*) subsistent sans changement;

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Arithmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour éléments, des séries de la forme suivante :

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \ldots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante : nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens*. Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque, entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Il y aura également sur cette droite une infinité de points nouveaux qui seront à droite de

tous les points vulgaires. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non archimédien.

On voit quelle est la portée de cette invention et en quoi elle constitue dans la marche de nos idées un pas presque aussi hardi que celui que Bolyai nous a fait faire; la Géométrie non euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La Géométrie non archimédienne détruit cette conception; elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Dans cette conception si audacieuse Hilbert avait eu un précurseur. Dans ses *Fondements de la Géométrie*, Veronèse avait eu une idée analogue. Le Chapitre VI de son Introduction est le développement d'une véritable Arithmétique et d'une véritable Géométrie non archimédiennes où les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle prépondérant. Toutefois par l'élégance et la simplicité de son exposition, par la profondeur de ses vues philosophiques, par le parti qu'il a tiré de l'idée fondamentale, Hilbert a bien fait sa chose de la nouvelle Géométrie.

La Géométrie non arguésienne. — Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières :

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques.

Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *Géométrie non arguésienne*, qui est, bien entendu, une Géométrie plane.

La Géométrie non pascalienne. — M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens*. Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront :

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication;

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités;

3° La loi de commutativité de la multiplication, d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit;

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les deux premiers groupes seront dits *arguésiens;* ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens*, selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe; ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens*, suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archi-

mède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

Il est aisé de former, en revanche, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme :

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \ldots,$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et $T_0, T_1, \ldots$, des nombres du système T; si donc on remplaçait les coefficients $T_0, T_1, \ldots$ par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries, on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle : t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions, les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre, sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre Géométrie *sans nous servir des axiomes métriques;* le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressources.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures et, par elle, les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition,* nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, *pourvu qu'ils soient parallèles.*

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments, mais *pourvu que ces segments soient parallèles.* La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de Desargues est vrai, comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un *système arguésien.* Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une Géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

L'équation du plan sera une équation linéaire comme dans la Géométrie analytique ordinaire; mais, comme dans le système S, la multiplication ne sera pas commutative, en général; il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire, ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens, correspondra une Géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux

de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal;* je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi le théorème de Pascal sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des Géométries non pascaliennes.*

Le théorème de Pascal peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de Pascal peut également se déduire de l'axiome d'Archimède, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute Géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenübertrager. — Citons encore une autre conception de Hilbert. Il étudie les constructions qu'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier, qu'il appelle *Streckenübertrager*, et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenübertrager* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles, ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenübertrager* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle.* M. Hilbert cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas peuvent se faire également par la règle et le *Streckenübertrager*, *si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel.* Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire, car

un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Mais ce n'est pas tout; dans toutes ces constructions, comme l'a remarqué le premier M. Kürschák, il serait possible de remplacer le *Streckenübertrager* par l'*Eichmass*, instrument qui permet de porter, sur une droite quelconque à partir d'un point quelconque, non plus une longueur quelconque, mais une longueur égale à l'unité.

Une question analogue est traitée dans un autre article de M. Hilbert : *Über die Gleichheit des Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*.

Dans la Géométrie plane ordinaire, le plan est symétrique, ce qui se traduit par l'égalité des angles à la base du triangle isoscèle.

On doit faire figurer cette *symétrie du plan* dans la liste des axiomes métriques. Dans toutes les Géométries plus ou moins étranges dont nous avons parlé jusqu'ici, dans celles du moins où l'on admet les axiomes métriques, dans la Géométrie métrique non archimédienne, dans les Géométries nouvelles de M. Dehn, dans celles qui ont fait l'objet du Mémoire *Über eine neue Begründung*..., cette symétrie du plan est toujours supposée. Est-elle une conséquence des autres axiomes métriques? Oui, comme le montre M. Hilbert, si l'on admet l'axiome d'Archimède. Non, dans le cas contraire. Il y a des Géométries non archimédiennes où tous les axiomes métriques sont vrais, à l'exception de celui de la symétrie du plan.

Dans cette Géométrie, il n'est pas vrai que les angles à la base d'un triangle isoscèle soient égaux : il n'est pas vrai que dans un triangle un côté soit plus petit que la somme des deux autres; le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse n'est pas vrai. C'est pour cette raison que cette Géométrie s'appelle *non pythagoricienne*.

J'arrive à un important Mémoire de M. Hilbert, qui est intitulé : *Grundlagen der Geometrie*, qui porte par conséquent le même titre que sa *Festschrift*, mais où il se place cependant à un point de vue tout différent. Dans sa *Festschrift*, en effet, comme on l'a vu par l'analyse qui précède, les rapports de la notion d'espace

et de la notion du groupe, tels qu'ils résultent des travaux de Lie, sont laissés de côté ou relégués au second plan. Les propriétés générales des groupes n'apparaissent pas dans la liste des axiomes fondamentaux. Il n'en est pas de même dans le Mémoire dont nous allons parler.

Par rapport aux idées de Lie, le progrès réalisé est considérable. Lie supposait que ses groupes étaient définis par des équations analytiques. Les hypothèses de M. Hilbert sont beaucoup plus générales. Sans doute cela n'est pas encore entièrement satisfaisant, puisque si la *forme* du groupe est supposée quelconque, sa *matière*, c'est-à-dire le plan qui subit les transformations, reste assujetti à être une *Zahlenmannigfaltigkeit* au sens de Lie. Ce n'est pas moins un pas en avant, et d'ailleurs M. Hilbert analyse mieux qu'on ne l'avait fait avant lui l'idée de *Zahlenmannigfaltigkeit* et donne des aperçus qui pourront devenir le germe d'une théorie axiomatique de l'*Analysis situs*.

Il est impossible de n'être pas frappé du contraste entre le point de vue où se place ici M. Hilbert et celui qu'il avait adopté dans sa *Festschrift*. Dans cette *Festschrift* les axiomes de continuité occupaient le dernier rang et la grande affaire était de savoir ce que devenait la Géométrie quand on les mettait de côté. Ici au contraire, c'est la continuité qui est le point de départ et M. Hilbert s'est surtout préoccupé de voir ce qu'on tire de la continuité seule, jointe à la notion du groupe.

Il nous reste à parler d'un Mémoire intitulé : *Flächen von konstanter Krümmung*. On sait que Beltrami a montré qu'il y a dans l'espace ordinaire des surfaces qui sont l'image du plan non euclidien, ce sont les surfaces à courbure constante négative; on sait quelle impulsion cette découverte a donnée à la Géométrie non euclidienne. Mais est-il possible de représenter le plan non euclidien tout entier sur une surface de Beltrami sans point singulier? M. Hilbert démontre que non.

En ce qui concerne les surfaces à courbure constante positives auxquelles se rapporte la Géométrie de Riemann, M. Hilbert démontre que, à part la sphère, il n'y a pas d'autre surface fermée de cette sorte.

Équations intégrales. — Dans ces dernières années, M. Hilbert

s'est surtout occupé de perfectionner la théorie des équations intégrales. On sait que les fondements de cette théorie ont été jetés il y a quelques années par M. Fredholm; depuis, la fécondité de sa méthode et la facilité avec laquelle elle s'applique à tous les problèmes de la Physique mathématique se sont affirmées chaque jour avec plus d'éclat. C'est là certainement une des découvertes les plus remarquables qui aient été faites en Mathématiques, et, à elle seule, elle mériterait les plus hautes récompenses; si aujourd'hui, cependant, ce n'est pas au premier inventeur, mais à l'auteur de perfectionnements importants que nous avons décidé de décerner le prix Bolyai, c'est que nous avons dû prendre en considération, non seulement les travaux de M. Hilbert sur les équations intégrales, mais l'ensemble de son œuvre qui intéresse les branches les plus diverses de la Science mathématique et dont les autres parties de ce Rapport permettent d'apprécier l'intérêt. Mais nous ne pouvions aborder ce sujet sans rendre hommage au service immense que M. Fredholm a rendu à la Science.

La théorie de M. Fredholm est une généralisation des propriétés élémentaires des équations linéaires et des déterminants. Cette généralisation pouvait être poursuivie de deux façons différentes : soit en envisageant une infinité *discrète* de variables liées par une infinité d'équations linéaires, ce qui conduit aux déterminants d'ordre infini; soit en considérant une fonction inconnue $\varphi(x)$ (c'est-à-dire en dernière analyse une infinité *continue* d'inconnues) et cherchant à la déterminer à l'aide d'équations où cette fonction figure dans des intégrales sous le signe $\int$. C'est cette seconde voie où s'est engagé M. Fredholm.

Soit $K(x, y)$ une fonction qu'on appelle le *noyau;* l'intégrale

$$\psi(x) = \int K(x, y)\varphi(y)\,dy,$$

prise entre des limites fixes, peut être regardée comme une transformée de $\varphi(x)$ par une sorte de transformation linéaire et être représentée par $S\varphi(x)$.

Les équations intégrales peuvent alors se mettre sous la forme

$$a\varphi(x) + \lambda S\varphi(x) = f(x) \tag{1}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée; l'équation est dite *de la première sorte* si le coefficient a est nul, et *de la seconde sorte* si ce coefficient est égal à 1.

La relation (1) doit être satisfaite pour toutes les valeurs de y comprises dans le champ d'intégration; elle équivaut donc à une infinité *continue* d'équations linéaires.

Fredholm a traité le cas des équations de la seconde sorte; la solution peut se mettre alors sous la forme du quotient de deux expressions analogues aux déterminants et qui sont des fonctions entières de λ. Pour certaines valeurs de λ, le dénominateur s'annule. On peut alors trouver des fonctions $\varphi(x)$ (appelées *fonctions propres*) qui satisfont à l'équation (1) quand on y remplace $f(x)$ par 0.

Le résultat suppose que le noyau $K(x, y)$ est limité; s'il n'en était pas ainsi on serait amené à envisager les noyaux *réitérés*: si l'on répète n fois la substitution linéaire S, on obtient une substitution de même forme avec un noyau différent $K_n(x, y)$; il suffit qu'un de ces noyaux réitérés K_n soit limité pour que la méthode reste applicable moyennant un artifice très simple. Or cela arrive dans un grand nombre de cas, comme l'a montré Fredholm. La généralisation, pour le cas où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables et pour celui où il y a plusieurs fonctions inconnues, se fait sans difficulté.

Fredholm a appliqué ensuite sa méthode à la résolution du problème de Dirichlet et à celle d'un problème d'élasticité, montrant ainsi par quelle voie on peut aborder toutes les questions de Physique mathématique.

Telle est la part du premier inventeur; quelle est maintenant celle de M. Hilbert? Considérons d'abord un nombre fini d'équations linéaires; si le déterminant de ces équations est symétrique, leurs premiers membres peuvent être regardés comme les dérivées d'une forme quadratique, et il en résulte pour les équations de cette forme une série de propriétés bien dignes d'intérêt et bien connues des géomètres. Le cas correspondant pour les équations intégrales est celui où le noyau est symétrique, c'est-à-dire où

$$K(x, y) = K(y, x).$$

C'est celui auquel s'attache M. Hilbert. Les propriétés des

formes quadratiques d'un nombre fini de variables peuvent être généralisées de façon à s'appliquer aux équations intégrales de cette forme symétrique. La généralisation se fait par un simple passage à la limite; mais ce passage présentait des difficultés dont M. Hilbert s'est tiré par une méthode dont on doit admirer la simplicité, la sûreté et la généralité. Les développements auxquels on parvient sont *uniformément* convergents; mais cette uniformité se présente sous une forme nouvelle qui mérite d'attirer l'attention. Dans les développements figure une fonction arbitraire $u(x)$ (ou plusieurs), et le reste de la série quand on y a pris n termes est inférieur à une limite qui ne dépend que de n et ne dépend pas de la fonction arbitraire pourvu que cette fonction soit assujettie à l'inégalité

$$\int u^2(x)\,dx < 1,$$

l'intégrale étant prise entre des limites convenables. C'est là une considération entièrement nouvelle, utilisable dans des problèmes bien différents.

Hilbert retrouve ainsi quelques-uns des théorèmes de Fredholm par une voie nouvelle; mais j'insisterai surtout sur les résultats les plus originaux.

Tout d'abord le dénominateur des expressions de Fredholm est une fonction de λ qui n'admet que des zéros réels et c'est là une généralisation du théorème élémentaire relatif à « l'équation en S ». Vient ensuite une formule où figurent sous le signe $\int$ deux fonctions arbitraires $x(s)$ et $y(s)$ et que l'on doit considérer comme la généralisation des formules élémentaires qui permettent la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés.

Mais j'ai hâte d'arriver à la question du développement d'une fonction arbitraire procédant suivant les fonctions propres. Ce développement, analogue à la série de Fourier, ou à tant d'autres séries qui jouent un rôle capital en Physique mathématique, est-il possible dans le cas général? La condition suffisante pour qu'une fonction soit susceptible d'un tel développement, c'est qu'on puisse la mettre sous la forme $Sg(x)$, $g(x)$ étant continue. C'est là la forme définitive du résultat, tel qu'Hilbert l'énonce dans sa

cinquième Communication. Dans la première il avait dû lui imposer certaines restrictions; nous devons ici citer le nom de M. Schmidt qui, dans l'intervalle, avait fait paraître un travail qui a aidé M. Hilbert à s'affranchir de ces restrictions. La seule condition imposée à notre fonction est de pouvoir se mettre sous la forme $S g(x)$, et au premier abord elle paraît assez complexe, mais dans un grand nombre de cas et par exemple si le noyau est une fonction de Green, elle exige seulement que la fonction possède un certain nombre de dérivées.

M. Hilbert fut conduit ensuite à développer ses vues de la manière suivante : il considère cette fois une forme quadratique à un nombre infini de variables et il en étudie les transformations orthogonales; c'est comme s'il voulait étudier les diverses formes de l'équation d'une surface du second degré dans l'espace à un nombre infini de dimensions lorsqu'on la rapporte à divers systèmes d'axes rectangulaires. Il forme à cet effet ce qu'il appelle la *forme résolvante* de la forme donnée. Soit $K(x)$ la forme donnée, $K(\lambda, x, y)$ la forme résolvante cherchée; elle sera définie par l'identité

$$K(\lambda, x, y) = \frac{1}{2}\lambda \sum_r \frac{dK(x)}{dx_r}\frac{dK(\lambda, x, y)}{dx_r} = \sum x_r Y_r.$$

Lorsque la forme $K(x)$ ne dépend que d'un nombre fini de variables, la forme résolvante se présente comme le quotient de deux déterminants qui sont des polynomes entiers en λ. L'auteur applique à ce quotient les procédés de passage à la limite qui lui sont familiers; la limite du quotient existe même quand celles du numérateur et du dénominateur n'existent pas.

Dans le cas d'un nombre fini de variables, $K(\lambda, x, y)$ est une fonction rationnelle de λ et cette fonction rationnelle peut être décomposée en fractions simples. Qu'advient-il de cette décomposition quand le nombre des variables devient infini? Les pôles de la fonction rationnelle en λ peuvent, dans ce cas, ou bien tendre vers certains points limites en nombre infini, mais discrets. L'ensemble de ces points constitue ce que l'auteur appelle le *spectre discontinu* de sa forme. Ils peuvent aussi admettre comme points limites tous les points d'un ou de plusieurs segments de l'axe réel. L'ensemble de ces segments constitue le *spectre continu* de la forme.

Les fractions simples correspondant au spectre discontinu formeront par leur ensemble une série convergente; celles qui correspondent au spectre continu se changeront à la limite en une intégrale de la forme

$$\int \frac{\sigma\, d\mu}{\lambda - \mu}$$

où l'on fait varier la variable d'intégration μ tout le long des segments du spectre continu, et où σ est une fonction convenable de μ. La fonction rationnelle $K(\lambda, x, y)$ n'a donc pas alors pour limite une fonction méromorphe, mais une fonction uniforme avec des coupures. La décomposition en éléments simples ainsi transformée reste valable. Si la forme donnée est *limitée*, c'est-à-dire si elle ne peut dépasser une certaine valeur quand la somme des carrés des variables est inférieure à 1, on peut déduire de là une manière de simplifier cette forme par une transformation orthogonale analogue à la simplification qu'éprouve l'équation d'un ellipsoïde quand on rapporte cette surface à ses axes.

Parmi les formes quadratiques nous distinguerons celles qui sont *proprement continues* (vollstetig) c'est-à-dire celles dont l'accroissement tend vers zéro, quand les accroissements des variables tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque. Une pareille forme ne possède pas de spectre continu et il en résulte des simplifications considérables dans les formules.

D'autres théorèmes sur les systèmes de formes quadratiques simultanées, sur les formes bilinéaires, sur la forme d'Hermite, s'étendent également au cas d'un nombre infini de variables.

Il y avait dans cette théorie le germe d'une extension de la méthode de Fredholm à des noyaux auxquels l'analyse du géomètre suédois n'était pas applicable, et des élèves de M. Hilbert devaient mettre ce fait en évidence. Quoi qu'il en soit, M. Hilbert s'occupa d'abord d'étendre sa façon d'envisager les équations intégrales aux cas où le noyau est dissymétrique. A cet effet il introduit un système quelconque de fonctions orthogonales, suivant lesquelles il est possible de développer une fonction arbitraire par des formules analogues à celle de Fourier. Au lieu d'une fonction inconnue, il prend comme inconnues les coefficients du développement de cette fonction; une équation intégrale peut ainsi être remplacée par un système d'une infinité *discrète* d'équations linéaires entre

une infinité *discrète* de variables. La théorie des équations intégrales se trouve ainsi rattachée d'une part aux idées de M. von Koch sur les déterminants infinis, et d'autre part aux recherches de M. Hilbert que nous venons d'analyser et où le rôle essentiel est joué par des fonctions dépendant d'une infinité discrète de variables.

A chaque noyau correspondra ainsi une forme bilinéaire dépendant d'une infinité de variables. Si le noyau est symétrique, cette forme bilinéaire est symétrique et peut être regardée comme dérivant d'une forme quadratique. Si le noyau satisfait aux conditions énoncées par Fredholm, on voit que cette forme quadratique est proprement continue et par conséquent ne possède pas de spectre continu. C'est là une manière de retrouver les résultats de Fredholm, et, si indirecte qu'elle soit, elle ouvre des vues entièrement neuves sur les raisons profondes de ces résultats et par là sur la possibilité de nouvelles généralisations.

Les équations intégrales se prêtent à la résolution de certaines équations différentielles dont les intégrales sont assujetties à certaines conditions aux limites et c'est là un problème fort important pour la Physique mathématique. Fredholm l'avait résolu dans quelques cas particuliers et M. Picard avait généralisé ses méthodes. M. Hilbert devait faire de la question une étude systématique. Considérons une équation différentielle

$$\Delta u = f$$

où u est une fonction inconnue d'une ou de plusieurs variables, f une fonction connue et Δ une expression différentielle linéaire quelconque. Cette équation peut être considérée au même titre qu'une équation intégrale comme un système infini d'équations linéaires liant une infinité continue de variables, comme une sorte de transformation linéaire d'ordre infini permettant de passer de f à u. Si l'on résout cette équation, on trouve

$$u = \mathrm{S} f$$

$\mathrm{S}(f)$ se présentant cette fois sous la forme d'une expression intégrale. Alors Δ et S sont les symboles de deux transformations linéaires d'ordre infini inverses l'une de l'autre. Le noyau de cette expression intégrale $\mathrm{S}(f)$ est ce qu'on appelle une *fonction de*

Green. Cette fonction avait été rencontrée pour la première fois dans le problème de Dirichlet, c'était alors la fonction de Green proprement dite, trop connue pour que j'insiste; on en avait déjà obtenu des généralisations diverses. Il appartenait à Hilbert de donner une théorie complète. A chaque expression différentielle Δ, supposée du second ordre et de type elliptique, à chaque système de conditions aux limites, correspond une fonction de Green. Citons la formation des fonctions de Green dans le cas où l'on n'a qu'une variable indépendante et où elles se présentent sous une forme particulièrement simple, et la discussion des diverses formes que peuvent affecter les conditions aux limites. Cela posé, imaginons qu'on ait résolu le problème dans le cas d'une équation différentielle auxiliaire peu différente de celle qui est proposée, n'en différant pas en tout cas par les termes du second ordre; on pourra alors, par une transformation simple, ramener le problème à la résolution d'une équation de Fredholm, où le rôle du noyau est joué par la fonction de Green relative à l'équation différentielle auxiliaire.

Toutefois la considération de cette équation auxiliaire, la nécessité de la choisir et de la résoudre pouvait encore constituer un embarras. M. Hilbert s'en est affranchi dans sa sixième Communication. L'équation différentielle est encore transformée en une équation de Fredholm, où le rôle du noyau est joué par une fonction que l'auteur appelle *Paramétrix*. Elle est assujettie à toutes les conditions qui définissent la fonction de Green, une seule exceptée, la plus gênante il est vrai : elle n'est pas astreinte à satisfaire à une équation différentielle; elle reste donc arbitraire dans une très large mesure. La transformation subie par l'équation différentielle est comparable à celle qu'éprouverait un système d'équations linéaires si l'on remplaçait les variables primitives par des combinaisons linéaires convenablement choisies de ces variables. La méthode n'est nullement restreinte au cas où l'équation différentielle envisagée est adjointe à elle-même.

M. Hilbert a examiné en passant une foule de questions relatives aux équations intégrales et montré la possibilité de leur application dans les domaines les plus variés. Il a, par exemple, étendu la méthode au cas d'un système de deux équations aux dérivées partielles de premier ordre du type elliptique, aux équa-

tions intégrales *polaires*, c'est-à-dire où le coefficient a dans l'équation intégrale (1), au lieu d'être constamment égal à 1, est une fonction de x et en particulier est égal tantôt à $+1$, tantôt à -1.

Il l'a appliquée au problème de Riemann pour la formation des fonctions d'une variable complexe assujetties à certaines conditions aux limites, au théorème des oscillations de Klein, à la formation des fonctions fuchsiennes, et en particulier au problème suivant :

Déterminer λ de façon que l'équation

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0$$

soit une équation fuchsienne.

Une des applications les plus inattendues est celle que fait M. Hilbert à la théorie des volumes et des surfaces de Minkowski, et par laquelle il rattache à la méthode de Fredholm une question importante pour ceux qui s'intéressent à l'analyse philosophique des notions fondamentales de la Géométrie.

Principe de Dirichlet. — On sait que Riemann avait démontré d'un trait de plume les théorèmes fondamentaux sur le problème de Dirichlet et la représentation conforme en s'appuyant sur ce qu'il appelait le principe de Dirichlet; envisageant une certaine intégrale dépendant d'une fonction arbitraire U, et que nous appellerons l'intégrale de Dirichlet, il montrait que cette intégrale ne peut s'annuler et il en concluait qu'elle devait avoir un minimum, et que ce minimum ne pouvait être atteint que quand la fonction U était harmonique. Ce raisonnement était fautif, comme on l'a montré depuis, car il n'est pas certain que le minimum puisse être effectivement atteint, et, s'il l'est, qu'il puisse l'être pour une fonction continue.

Les résultats étaient exacts cependant; on a beaucoup travaillé sur cette question, on a montré que le problème de Dirichlet peut toujours être résolu; et on l'a même effectivement résolu; il en est de même pour un grand nombre d'autres problèmes de Physique mathématique qui auraient pu autrefois paraître abordables par la méthode de Riemann. Ce n'est pas ici le lieu de faire le long histo-

rique de ces travaux; je me bornerai à mentionner le point final d'aboutissement qui est la méthode de Fredholm.

Il semblait que ce succès eût rejeté pour jamais dans l'oubli l'aperçu de Riemann et le principe de Dirichlet lui-même. Beaucoup le regrettaient cependant; ils sentaient qu'on était privé ainsi d'un instrument puissant et ils ne pouvaient croire que la force de persuasion que conservait malgré tout l'argument de Riemann, et qui semblait reposer sur je ne sais quelle adaptation de la pensée mathématique à la réalité physique, ne fût en réalité qu'une pure illusion due à de mauvaises habitudes d'esprit. M. Hilbert voulut rechercher s'il ne serait pas possible, avec les nouvelles ressources de l'Analyse mathématique, de transformer l'aperçu de Riemann en une démonstration rigoureuse.

Voici comment il y est parvenu : considérons l'ensemble des fonctions U satisfaisant aux conditions proposées; choisissons dans cet ensemble une suite indéfinie S de fonctions telles que les intégrales de Dirichlet correspondantes tendent en décroissant vers leur limite inférieure. Il n'est pas certain qu'en chaque point du domaine envisagé cette suite S converge; elle pourrait osciller entre certaines limites. Mais on peut détacher dans S une suite partielle S_1 qui converge en un point M_1 du domaine; dans S_1, détachons une autre suite partielle S_2 qui convergera toujours en M_1, mais qui de plus convergera encore en M_2. En continuant de la sorte nous obtiendrons une suite qui convergera en autant de points que nous voudrons; et, par un artifice simple, nous en déduirons une autre suite qui convergera en tous les points d'un ensemble dénombrable, par exemple en tous les points dont les coordonnées sont rationnelles. Si l'on pouvait alors démontrer que les dérivées de toutes les fonctions de la suite sont inférieures en valeur absolue à une limite donnée, on pourrait conclure immédiatement que la suite converge uniformément dans tout le domaine, et l'application des règles du calcul des variations ne présenterait plus de difficulté spéciale.

Pour établir le point qui reste à démontrer, M. Hilbert a employé deux artifices différents, il n'a pas développé le premier autant qu'il serait désirable, et il s'est surtout attaché au second. Celui-ci consiste à remplacer la fonction u proposée par la fonction v qui s'en déduit par une double quadrature et dont elle est la dérivée

seconde par rapport aux deux variables indépendantes. Les dérivées de v étant les intégrales premières de u, on peut leur assigner une limite supérieure, à l'aide de quelques inégalités faciles à démontrer. Seulement il faut se résigner à un détour nouveau et à un artifice d'ailleurs simple pour appliquer à cette nouvelle fonction inconnue v les règles du calcul des variations qui s'appliquaient tout naturellement à la fonction u.

Il est inutile d'insister sur la portée de ces découvertes, qui dépasse de beaucoup le problème spécial de Dirichlet. Nous ne devons pas nous étonner que de nombreux chercheurs se soient engagés sur la voie ouverte par M. Hilbert. Nous devons citer MM. Levi, Zaremba et Fubini; mais je crois avant tout devoir signaler M. Ritz qui, s'écartant un peu de la route commune, a imaginé une méthode de calcul numérique applicable à tous les problèmes de Physique mathématique, mais qui y a utilisé plusieurs des procédés ingénieux créés par son maître M. Hilbert.

M. Hilbert a récemment appliqué sa méthode à la question de la représentation conforme. Je n'analyserai pas ce Mémoire dans le détail. Je me bornerai à dire qu'il fournit le moyen de faire cette représentation pour un domaine limité par un nombre infini de courbes ou pour une surface de Riemann simplement connexe d'une infinité de feuillets. C'est donc une solution nouvelle du problème de l'uniformisation des fonctions analytiques.

Divers. — Nous avons passé en revue les principaux sujets d'études où M. Hilbert a marqué sa trace, ceux pour lesquels il montrait une sorte de prédilection et où il est revenu à diverses reprises; nous devons signaler encore d'autres problèmes dont il s'est occupé occasionnellement et sans y insister. Je crois devoir me borner à énoncer dans un ordre chronologique les résultats les plus saillants qu'il a obtenus de la sorte.

Si l'on excepte les formes binaires, les formes quadratiques, et les formes ternaires biquadratiques, la forme définie la plus générale de son degré n'est pas décomposable en une somme de carrés d'autres formes en nombre fini.

On peut trouver par des procédés élémentaires les solutions en nombres entiers d'une équation diophantine de genre nul.

Si un polynome entier dépendant de plusieurs variables et de

plusieurs paramètres est irréductible quand ces paramètres restent arbitraires, on peut toujours attribuer à ces paramètres des valeurs entières telles que le polynome reste irréductible.

Par conséquent il existe toujours des équations d'ordre n à coefficients entiers et admettant un groupe donné.

Le théorème fondamental de Dedekind sur les nombres complexes à multiplication commutative peut s'établir aisément en s'appuyant sur l'un des lemmes fondamentaux de la théorie des invariants de M. Hilbert.

L'équation diophantine, obtenue en égalant à ± 1 le discriminant d'une équation algébrique de degré n, possède toujours des solutions rationnelles, mais sauf pour le second et le troisième degré ne possède pas de solutions entières.

Parmi les surfaces réelles du quatrième ordre, certaines formes, logiquement concevables, ne sont pas possibles; par exemple il ne peut pas y en avoir qui soient composées de douze surfaces fermées simplement connexes ou d'une surface unique avec onze trous.

Conclusions. — Après cet exposé, un long commentaire serait inutile. On voit quelle a été la variété des recherches de M. Hilbert, l'importance des problèmes auxquels il s'est attaqué. Nous signalerons l'élégance et la simplicité des méthodes, la clarté de l'exposition, le souci de l'absolue rigueur. En cherchant à être parfaitement rigoureux, on risque parfois d'être long, et ce n'est pas là acheter trop cher une correction sans laquelle les Mathématiques ne seraient rien. Mais M. Hilbert a su éviter ce que ces longueurs auraient pu avoir d'un peu pénible pour ses lecteurs, en ne leur laissant jamais perdre de vue le fil conducteur qui lui a servi à s'orienter. On voit toujours aisément par quel enchaînement d'idées il a été amené à se poser un problème et à en trouver la solution. On sent que, plus analyste que géomètre au sens ordinaire du mot, il a néanmoins aperçu l'ensemble de son travail d'un coup d'œil, avant d'en distinguer les détails, et il sait faire profiter le lecteur de cette vue d'ensemble.

M. Hilbert a exercé une influence considérable sur les progrès récents des Sciences mathématiques, non seulement par ses travaux personnels, mais par son enseignement, par les conseils qu'il

donnait à ses élèves et qui leur permettaient de contribuer à leur tour à ce développement de nos connaissances en se servant des méthodes créées par leur maître.

Il n'est pas besoin, ce semble, d'en dire davantage pour justifier le choix de la Commission, qui a été unanime à attribuer à M. Hilbert le prix Bolyai pour la période 1905-1909.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique*, trad. par *Édouard Davaux*, notes de *Eug.* et *Fr. Cosserat*. T. III, fasc. 2 : Thermodynamique générale. Fusion et vaporisation. In-8, 350 p. avec 206 fig. Paris, A. Hermann et fils. 11 fr.

Curie (Mme P.). — *Traité de Radioactivité*, 2 vol. in-8, XII-428 et IV-548 p., avec 193 fig. et 7 pl. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Ennis (W.-Duane). — *Applied thermodynamics for engineers*. VIII-438 p. with 316 illustrations, diagrs. New-York. Van Nostrand. 4 $ 50.

Kohlrausch (Frdr.). — *Gesammelte Abhandlungen*. Hrsg. v. *Wilh. Hallwachs*, *Adf. Heydweiller*, *Karl Strecker* u. *Otto Wiener*. 1. Bd. Elastizität, Wärme, Optik, absolute elektr. Messgn. u. Verschiedenes. Gr. in-8, XXXV-1108 p. avec 1 portrait, 1 planche et 117 fig. Leipzig, J.-A. Barth. 25 m. : relié, 27 m.

Schwarzschild (K.). — *Aktinometrie der Sterne B. D. bis zur Grösse 7.5 in der Zone 0°-20° Deklination :* Tl. A. Unter Mitwirkg. v. Br. Meyermann, A. Kohlschütter u. O. Birck. (*Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse.* Neue Folge. VI. Bd. N° 6.) In-8, hrsg, VII-115 p. avec 2 fig. et 1 planche. Berlin, Weidmann. 12 m.

1re partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEHMER (DERRICK-NORMAN). — FACTOR TABLE FOR THE FIRST TEN MILLIONS CONTAINING THE SMALLEST FACTOR OF EVERY NUMBER NOT DIVISIBLE BY 2, 3, 5 OR 7 BETWEEN THE LIMITS 0 AND 10 017 000. Format $31^{cm},5 \times 43^{cm},5$, IX-476 pages. Washington, D. C., Carnegie Institution of Washington, Publication n° 105, 1909.

M. Lehmer a pris une disposition qui avait été proposée en 1864 par un mathématicien français, V.-A. Lebesgue, Correspondant de l'Institut, dans un Opuscule intitulé : *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers* (Paris, Gauthier-Villars, 1864, gr. in-8). On sait que, pour faciliter la construction des Tables de facteurs premiers des nombres, Euler a proposé d'employer la progression arithmétique dont les termes ont pour forme générale $30q + r$ [(*De Tabula numerorum usque...* (*Novi Commentarii...*, XIX, 1774, in-4, p. 132)]. La méthode suivie par Lebesgue est fondée sur la même idée; en effet, il emploie la progression arithmétique dont les termes ont pour forme générale $210q + r$.

M. Lehmer n'a pas adopté la représentation, faite par Lebesgue, des dizaines des facteurs premiers par des lettres, pour réduire l'espace occupé par sa Table, ni l'écriture explicite des nombres dont on inscrit le moindre facteur premier. Il a remplacé ces derniers nombres par les quotients obtenus en les divisant par 210, mais sans faire remarquer que l'idée de la construction d'une Table de facteurs premiers où sont inscrits le quotient et le reste obtenus en divisant un nombre par 210 avait été émise plusieurs années avant l'apparition de sa *Factor Table*.

M. Lehmer a écrit les deux membres de phrase suivants, à la page VI de son *Introduction* : « In the new form of arrangement... » et « This simple plan, which seems not to have been used before... », qui font penser au lecteur que M. Lehmer a imaginé

l'arrangement qu'il a adopté. Cependant M. Lehmer connaît l'Opuscule de Lebesgue, puisqu'il écrit à la page VIII de son *Introduction* : « In a tract published in 1864, entitled *Tables diverses*, etc., Lebesgue has given a small table in which the arrangement is practically the same as that adopted in the tables herewith published ».

La *Factor Table* de M. Lehmer a une hauteur de $3^{dm},15$. Lorsqu'elle est fermée, sa largeur est de $4^{dm},35$; lorsqu'elle est ouverte, sa largeur est de 9^{dm} : elle est donc d'un emploi peu commode. Les chiffres de cette Table, petits et gras, ont été obtenus par la photographie et n'ont pas la netteté des caractères d'imprimerie des anciennes Tables publiées par Burckhardt, Dase, Rosenberg et M. J. Glaisher. On sait que ces Tables forment un ensemble de 1008 Tableaux in-4 qui sont imprimés sur papier fort, et où l'on trouve immédiatement le moindre facteur premier d'un nombre non divisible par 2, 3 ou 5 et inférieur à 9 millions. La *Factor Table* de M. Lehmer contient 476 Tableaux dont chacun occupe une page. Le papier employé est mince et il fléchit quand on tourne les pages. Elle coûte 104^{fr} : ce prix paraît élevé quand on pense qu'elle a été publiée grâce à la libéralité d'un des Mécènes américains, M. Carnegie.

M. Lehmer a fait consciencieusement l'important travail qu'il présente aux mathématiciens; il a relevé des fautes dans les anciennes Tables de facteurs premiers et il a vérifié les résultats de ses calculs avec le Manuscrit de Kulik qui contient la décomposition en facteurs premiers des nombres non divisibles par 2, 3 et 5, jusqu'à 100 330 201. (Ce Manuscrit est, depuis 1867, dans la Bibliothèque de l'Académie royale de Vienne.) Aussi, M. Lehmer mérite-t-il d'être louangé à ce sujet. Mais il y a des réserves à faire en ce qui concerne la publication relative aux nombres des 9 premiers millions.

M. Lehmer résume l'historique de la construction des Tables de facteurs premiers des nombres d'après l'exposition magistrale que M. J. Glaisher en a faite dans sa *Factor Table*. Mais il a oublié de parler des travaux les plus récents relatifs à cette construction et dus notamment à MM. L. Saint-Loup, C.-A. Laisant, E. Lebon, G. Tarry et J. Deschamps. Ils ont cependant été publiés dans des Recueils périodiques bien connus.

M. Saint-Loup a publié en 1890, dans les *Ann. sc. de l'Éc. Norm. sup.* (3e série, t. VII, p. 89), un Mémoire intitulé *Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres.*

M. Laisant a exposé, le 19 septembre 1891, à la Session de Marseille de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, un Mémoire intitulé : *Sur une méthode pour la construction d'une Table de nombres premiers* (*Compte rendu de la* 20e *Session*, 2e Partie, 1891, p. 165).

M. Lebon a d'abord envoyé, pour prendre date, une Note à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, Paris, t. CXLI, 3 juillet 1905, p. 78); il a publié un Mémoire dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas et naturaes* de l'Académie R. des Sciences de Lisbonne (3me série, t. VII, 27 Abril 1906, p. 209, Mémoire daté du 1er août 1905), et un Opuscule intitulé : *Tables de Caractéristiques relatives à la base* 9310 *des facteurs premiers d'un nombre inférieur à* 30030, *non divisible par* 2, 3, 5, 7 *ou* 11 (Paris, Delalain frères, 1er mars 1906, in-8), qui a été honoré d'une Subvention de l'Association française pour l'Avancement des Sciences; il a fait, sur les Tables de Caractéristiques, des Communications aux Congrès des Sociétés savantes réunies à Paris en 1906 et en 1908 par le Ministère de l'Instruction publique, et aux Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences tenus à Reims en 1907 et à Clermont-Ferrand en 1908 (*Comptes rendus*); il a publié des Mémoires dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (28 avr. 1906, p. 168; 24 nov. 1906, p. 270; 11 janv. 1908, p. 4; 25 avr. 1908, p. 60); dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Scienze fisiche, matematiche e naturali*, (Roma, 22 Apr. 1906, p. 439); dans le *Bulletin of the American mathetical Society* (Lancaster and New York, Nov. 1906, p. 74), qui, en outre, contient une analyse de la *Table de Caractéristiques* (déc. 1908, p. 139); le *Bulletin de la Société des Gens de Sciences* (Paris, août 1906, p. 1); dans *Il Pitagora* (Palermo, Marzo-Apr., 1907, p. 81); dans l'*Enseignement mathématique* (Genève et Paris, 15 mai 1907). La plupart de ces Ecrits ont été cités ou analysés par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (Berlin) et par la *Revue semestrielle des Publications mathématiques* (Amsterdam).

Les Mémoires de M. Tarry sur les facteurs premiers des nombres ont été publiés dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (26 mai 1906, p. 174; 9e série, t IX, no 2, 1907, p. 56), et dans les *Comptes rendus* du Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences tenu à Reims en 1907. On doit aussi à M. Tarry un Opuscule intitulé : *Tablettes des cotes relatives à la base* 20580 *des facteurs premiers d'un nombre inférieur à* 100489 *et non divisible par* 2, 3, 5 *ou* 7 (Gauthier-Villars, 1906, in-8 jésus). Un article sur cet Opuscule a été publié par le Journal *Mathesis* (Gand et Paris, 1907, p. 178).

M. Deschamps a publié ses recherches dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (9e série, t. IX, no 4, 1907; t. X, no 1, 1908), et il les a communiquées au Congrès des Sociétés savantes réunies à Paris en 1908 par le Ministère de l'Instruction publique.

Les Auteurs de toutes les publications précédentes ont eu pour but de proposer des modes de construction de Tables de facteurs premiers d'une étendue moindre que les Tables imprimées existantes. Supposons que des Tables analogues à ces dernières soient construites jusqu'à 100 millions, et admettons qu'il n'y ait pas d'accroissement de surface en rapport avec l'accroissement de la valeur du nombre, ce qui est douteux, car, dans ce genre de Tables, les nombres sont explicitement inscrits : l'ensemble des Tables déjà construites de 1 à 8999999 et des Tables que l'on construirait dans le même genre de 9 millions à 100 millions formerait 100 Volumes in-4 d'environ 112 Tableaux chacun. L'expérience faite par M. Lehmer montre que les 49 Tableaux contenant les moindres facteurs premiers des nombres du 10e million font gagner par million 19 Tableaux des Tables anciennes, ce qui réduit à 8.3, au lieu de 100, le nombre des volumes in-4 contenant les facteurs premiers des nombres de 1 à 100 millions. Il me semble que cette réduction du nombre de Volumes paraîtra trop faible pour qu'on pense à continuer dans la voie où M. Lehmer s'est engagé.

En résumé, il est nécessaire d'étudier les diverses propositions qui ont été faites, même d'en imaginer d'autres, avant de commencer la publication d'une nouvelle Table donnant les facteurs premiers des nombres jusqu'à une limite très élevée.

Sans faire allusion aux Écrits cités plus haut, sans même les critiquer, M. Lehmer a publié une *Factor Table* dont 59 Tableaux seulement sur 476 contiennent des renseignements inédits. Afin qu'il puisse juger de l'opportunité de son immense publication, n'y aurait-il pas lieu qu'il la divisât en deux Volumes se vendant séparément? Le premier Volume comprendrait les 427 Tableaux relatifs aux facteurs premiers des nombres de 1 à 9 millions; le second, les 49 Tableaux relatifs aux facteurs premiers des nombres du 10e million. Ce petit Volume, qui renfermerait la partie originale du travail de M. Lehmer, serait, je pense, favorablement accueilli par les mathématiciens.

Er. L.

LANGE (Max). — Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien, mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys. 1 Schachbrett-Tafel und 43 Diagrammen. 1 volume in-8, IV-107 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

Ce petit Volume, qui est le 281e de la Collection *Aus Natur und Geisteswelt*, est une introduction fort intéressante à la théorie du noble jeu des échecs. Un premier Chapitre fait connaître les règles du jeu, la disposition du damier, le mouvement des différentes pièces. Le second traite des applications et de quelques parties destinées à servir d'illustration aux règles posées. C'est dans le troisième que sont développées la stratégie et les finesses du jeu. Un dernier article contient enfin ce qu'on peut appeler les parties finales : tour et roi contre roi, le roi et deux fous contre le roi, le roi, un fou et un cavalier contre le roi, enfin le roi et un pion contre le roi. Ce petit Opuscule, qui sera bien accueilli des joueurs d'échecs, se termine par des indications bibliographiques relatives aux Ouvrages et aux Journaux qui traitent des échecs. Nous y avons appris qu'il n'y a pas moins de six périodiques, hebdomadaires ou mensuels, destinés aux joueurs d'échecs : deux allemands, un autrichien, un anglais, un italien et un français.

J. G.

STURM (R.). — Maxima und Minima in der elementaren Geometrie. 1 volume in-8, VI-138 pages, avec 32 figures dans le texte. Leipzig et Berlin, Teubner, 1910.

Ce petit Volume doit évidemment son origine et son inspiration aux profondes études qu'a faites l'auteur sur ceux des travaux de Steiner qui se rapportent à la Géométrie élémentaire et, en particulier, sur le célèbre Mémoire relatif aux problèmes de maximum et de minimum dans le plan, sur la sphère et dans l'espace. Ces études ont donné naissance à quelques leçons, que M. Sturm a faites à l'Université de Breslau et qu'il a réunies ici pour le plus grand profit des maîtres et des élèves des Ecoles supérieures. Il nous suffira évidemment de donner une analyse des différents Chapitres de l'Ouvrage.

Après une Introduction qui contient les deux théorèmes fondamentaux d'Arithmétique sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante et sur le minimum d'une somme de facteurs dont le produit est constant, M. Sturm traite successivement des maxima et minima dans le triangle, dans le quadrilatère, dans le cercle, dans les polygones, dans le segment de cercle, etc.

La seconde Partie, consacrée à la Géométrie de l'espace, traite plus particulièrement des prismes, des pyramides, des pyramides doubles, des angles polyèdres.

Nos collègues des lycées de France, si désireux de perfectionner et de renouveler leur enseignement, tireront grand profit du nouvel Ouvrage du savant géomètre de Breslau. G. J.

MÉLANGES.

SUR LES TRAJECTOIRES DE LIOUVILLE;

PAR M. HADAMARD.

1. On sait [1], depuis Liouville, que le mouvement d'un système à n paramètres $q_1, \ldots, q_n$, pour lequel la force vive a l'expression

$$(1) \qquad 2T = (f_1 + \ldots + f_n)(\varphi_1^2 q_1'^2 + \ldots + \varphi_n^2 q_n'^2)$$

et la fonction de forces

$$(1') \qquad U = \frac{\psi_1 + \ldots + \psi_n}{f_1 + \ldots + f_n}$$

(f_i, φ_i, ψ_i étant, pour chaque valeur de i depuis 1 jusqu'à n, des fonctions du seul paramètre q_i) se détermine à l'aide de quadra-

[1] *Voir*, par exemple, APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, Chap. XXV, n° 171.

tures. Pour nous borner au cas le plus simple [1], les géodésiques d'une surface rapportée aux paramètres q_1, q_2 et ayant pour élément linéaire

$$(2) \qquad (f_1 - f_2)(\varphi_1^2 dq_1^2 - \varphi_2^2 dq_2^2)$$

(f_i, φ_i étant toujours des fonctions de q_i seul), sont définies par l'équation générale

$$(3) \qquad \int \frac{\varphi_1 dq_1}{\sqrt{f_1 - a}} - \int \frac{\varphi_2 dq_2}{\sqrt{f_2 + a}} = b,$$

a, b étant des constantes arbitraires et l'arc s de la courbe étant donné par la relation

$$(3') \qquad \int \frac{f_1 \varphi_1 dq_1}{\sqrt{f_1 - a}} - \int \frac{f_2 \varphi_2 dq_2}{\sqrt{f_2 + a}} = s,$$

les formules pour le cas général ayant une forme toute semblable, qu'on trouvera à l'endroit cité de la *Mécanique* de M. Appell.

Formellement, le problème est résolu par les formules (3), (3'). M. Staude [2] a montré l'intérêt qu'il y avait à examiner de plus près les expressions de q_1, q_2 en fonction de s auxquelles on est ainsi conduit, et cela surtout dans le cas le plus usuel, celui où les intervalles de variation de q_1, q_2 (définis respectivement par les inégalités $f_1 - a \geqq 0$, $f_2 + a \geqq 0$) sont limités dans les deux sens, de sorte qu'on ait $\alpha_1 \leqq q_1 \leqq \beta_1$ pour le premier, $\alpha_2 \leqq q_2 \leqq \beta_2$ pour le second. Généralisant une marche suivie par Weierstrass pour le cas d'une seule variable, il pose

$$(4) \qquad q_1 = \alpha_1 \cos^2 \frac{u_1}{2} + \beta_1 \sin^2 \frac{u_1}{2}, \qquad q_2 = \alpha_2 \cos^2 \frac{u_2}{2} + \beta_2 \sin^2 \frac{u_2}{2},$$

ce qui met les équations (3), (3') sous la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} \int h_{11}(u_1)du_1 - \int h_{12}(u_2)du_2 + H_{11}(u_1) + H_{12}(u_2) = b, \\ \int h_{21}(u_1)du_1 + \int h_{22}(u_2)du_2 + H_{21}(u_1) + H_{22}(u_2) = s. \end{cases}$$

---

[1] *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, Chap. I, p. 10.

[2] *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 468; *Ibid.*, t. XLI, p. 219; *Journal de Crelle*, t. CV, p. 298.

où, cette fois, *les variables* u_1, u_2 *prennent chacune toutes les valeurs depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$ et où, d'autre part, h_{11}, h_{21}, h_{12}, h_{22} sont des fonctions *périodiques* (toujours finies), les deux premières de u_1, les deux dernières de u_2, H_{ik} étant la primitive de h_{ik}.

Le résultat est tout analogue pour le problème général dont nous avons parlé en commençant : on aboutit à des relations de la forme

$$(6)\quad \begin{cases} H_{11}(u_1) + \ldots + H_{1n}(u_n) = b_1, \\ H_{21}(u_1) + \ldots + H_{2n}(u_n) = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{n-1,1}(u_1) + \ldots + H_{n-1,n}(u_n) = b_{n-1}, \\ H_{n1}(u_1) + \ldots + H_{nn}(u_n) = t. \end{cases}$$

$b_1, \ldots, b_{n-1}$ désignant des constantes arbitraires et t le temps, pendant que H_{ik} est une fonction de u_k dont la dérivée $H'_{ik} = h_{ik}$ est périodique, et que les q_i sont exprimés en fonctions des u par des formules analogues à (4).

Supposons que les équations (5) *puissent être résolues par rapport aux* u, et donnent pour ces quantités des valeurs bien déterminées et continues en fonction des deux seconds membres. En reportant ces valeurs dans les formules (4), on constate que q_1 et q_2 peuvent être considérés comme des fonctions de deux variables de la forme

$$\lambda_1 s + \varphi_1 b, \qquad \lambda_2 s + \varphi_2 b \qquad (\lambda_1, \varphi_1, \lambda_2, \varphi_2 \text{ constants})$$

périodiques séparément par rapport à chacune de ces variables.

Considérés comme fonctions de s seul (b étant laissé constant) q_1, q_2 appartiennent dès lors à un type d'une importance capitale en Mécanique céleste, que M. Staude appelle *bedingt periodische Functionen* et auquel nous donnerons, avec M. Esclangon [1], le nom de fonctions *quasi-périodiques*.

M. Stackel [2], à qui l'on doit une importante généralisation de la méthode de Liouville, a repris également l'analyse de M. Staude

---

[1] *Thèse*, Paris, 1904.

[2] *Habilitationsschrift*, Halle, 1891 (*Math. Ann.*, t. XLII, p. 537); *Journal de Crelle*, t. CXXVIII, p. 222; *Ibid.*, t. CXXX, p. 89.

et montré que si l'on peut résoudre les équations (6), on obtient encore pour les q des expressions quasi-périodiques par rapport au temps.

Mais tout ceci est subordonné à l'inversion des équations (5) *ou* (6), c'est-à-dire à leur résolution par rapport aux u en fonction de s, b (ou de t et des b).

Or, l'inversion d'un système de relations à plusieurs variables offre des difficultés particulières. Pour affirmer que cette inversion est possible, il ne suffit pas, contrairement à ce qu'on a parfois supposé un peu hâtivement, de s'assurer, sans autre précaution, que le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations en question (ici le déterminant des h_{ik}) est toujours différent de zéro.

En raison de cette circonstance, la résolution dont il s'agit occasionna aux auteurs des Mémoires précédemment cités de sérieuses complications et exigea de leur part des discussions des plus délicates auxquelles certains de ces Mémoires sont consacrés à peu près intégralement. En même temps, ils durent introduire des hypothèses supplémentaires assez restrictives.

Or, il est aisé de voir que les difficultés dont il s'agit disparaissent toutes, ainsi que les hypothèses accessoires, dès qu'on fait usage d'un théorème que j'ai établi précédemment [1] relativement aux correspondances ponctuelles en général. D'après ce théorème, étant donné un système d'équations qui expriment n variables v en fonctions continues de n autres variables u, il suffit, pour que l'inversion soit possible et univoque, que :

(A) Cette propriété ait lieu au voisinage d'un point déterminé quelconque de l'espace (u) : autrement dit, qu'autour de ce point on puisse décrire une sphère s, et autour du point correspondant (v) une sphère S, telles qu'à tout point intérieur à S corresponde un point [2] et un seul intérieur à s;

---

[1] *Bull. Soc. math. Fr.*, t. XXXIV, p. 71.

[2] Il faut noter que cette hypothèse (A) peut être, à son tour, simplifiée, si l'on veut utiliser le théorème de M. Schönflies, qui permet de réduire la première partie de cette hypothèse à la seconde. On pourra donc, en d'autres termes, se contenter d'admettre que tout point (u) est le centre d'une sphère s telle que deux points distincts pris à l'intérieur de cette sphère ne puissent avoir la même image (v). Jointe à (B) cette hypothèse est suffisante pour affirmer la conclusion cherchée.

(B) Une ligne continue de l'espace (u) s'en allant à l'infini ne puisse donner comme correspondante, dans l'espace (v), une ligne de longueur finie.

La condition (A) est toujours vérifiée si, les dérivées partielles du premier ordre étant continues, le déterminant fonctionnel est constamment différent de zéro.

Il en est de même pour la condition (B), *dans le cas actuellement étudié* (les variables v étant ici le temps et les b constantes).

Cela résulte de ce que les dérivées partielles (fonctions h de Staude) sont ici n fois périodiques, à savoir périodiques et de période 2π par rapport à chacune des n variables u. Le minimum de la quantité appelée μ dans mon Mémoire cité [1] (autrement dit, le *minimum minimorum* du rapport de deux éléments linéaires correspondants dans les deux espaces) est donc, dans tout l'espace, le même que dans le prismatoïde des périodes obtenu en ne donnant aux u que des valeurs comprises entre 0 et 2π. Il est, dès lors, différent de zéro, puisque μ est continu et ne peut s'annuler qu'avec le déterminant fonctionnel D des équations considérées.

Donc, *la condition* $D \neq 0$ *est entièrement suffisante pour l'inversion considérée.*

2. Mais M. Stäckel a remarqué [2] que, dans le problème de Liouville, cette condition n'est pas réalisée. Le déterminant fonctionnel s'annule lorsque les fonctions inconnues atteignent simultanément les valeurs extrêmes (maxima ou minima) que chacune d'elles est susceptible de prendre : autrement dit, lorsque le point qui a ces quantités pour coordonnées vient en un des sommets du rectangle dans lequel il est assujetti à rester.

Il va nous être très aisé de compléter le raisonnement de manière à tenir compte de cette circonstance.

Tout d'abord, la condition (A) ne peut cesser d'être vérifiée qu'en un point où D s'annule. Nous continuons à supposer que cela a lieu sans changement de signe.

Admettons, en outre, que l'une au moins des quatre dérivées

---

(1) *Bull. Soc. math. Fr.*, *loc. cit.*, p. 75.
(2) *Journal de Crelle*, t. CXXX, p. 94.

partielles, si le nombre n des variables est égal à 2, ou l'un au moins des mineurs de D, pour $n > 2$, ne s'annule pas au point en question.

Alors une démonstration classique du théorème fondamental sur les fonctions implicites [1] continuera à s'appliquer. En effet, le fait qu'un mineur de D est différent de zéro montre qu'on peut exprimer $n - 1$ des variables u, les $n - 1$ premières par exemple, en fonction de la variable u_n restante et de $n - 1$ variables v (que nous supposerons être les $n - 1$ premières). D'autre part, le changement de variables une fois effectué, la dérivée $\frac{\partial v_n}{\partial u_n}$, tout en étant nulle au point considéré, n'y changera pas de signe (en vertu de l'hypothèse faite sur D).

Donc, dans ces conditions nouvelles, (A) continuera à avoir lieu.

Un seul cas fait exception : celui où la dérivée $\frac{\partial v_n}{\partial u_n}$ dont il vient d'être question serait constamment nulle. Dans ce cas, il existerait une ligne de l'espace (u) le long de laquelle tous les v resteraient constants.

Supposons que cette circonstance ne se présente pas et que, par conséquent, (A) soit bien vérifiée. En un point où $D = 0$, il existera une direction de l'espace (u) suivant laquelle tous les dv seront nuls. Cette direction ne sera pas, en général, tangente à la multiplicité définie par l'équation $D = 0$. S'il en était autrement, en effet, cette dernière contiendrait une ligne satisfaisant aux équations différentielles $dv = 0$ et, par conséquent, telle que les v soient constants, contrairement à ce qui vient d'être supposé.

On en déduirait facilement que la condition (B) est encore remplie (grâce à ce fait que le rapport de deux axes correspondants dans les deux espaces ne peut pas être nul en général, soit que la ligne à laquelle le premier d'entre eux est empruntée sorte de la multiplicité $D = 0$, en dehors de laquelle on a $\mu \neq 0$; soit qu'elle y reste et, par conséquent, ne soit pas, en général, tangente à la direction qui correspond à un rapport nul).

---

[1] *Voir*, par exemple, la première édition du *Cours d'Analyse* de M. Goursat (t. I).

Mais nous n'entrerons pas dans le détail de cette démonstration, parce que, pour les trajectoires de Liouville proprement dites (Stäckel, *loc. cit.*), les choses se passent beaucoup plus simplement.

Le déterminant D ne s'annule, en effet, dans ce cas, qu'en des points *isolés* du plan (ceux qui correspondent aux sommets du rectangle mentionné tout à l'heure). Si nous isolons ces points par de petits cercles (tous de même rayon), la quantité μ aura, en dehors de ces cercles, un minimum positif μ_1. Si, d'autre part, nous imaginons que, de toute ligne tracée dans le plan des u et s'en allant à l'infini, on supprime, par la pensée, toutes les portions intérieures aux cercles en question, la partie restante aura encore une longueur infinie, et il en sera de même de son image dans le second espace, en vertu de l'inégalité $\mu > \mu_1$.

3. Je terminerai par une remarque relative à la forme des équations différentielles qui s'intègrent par la méthode de Liouville, telle que l'étudie M. Stäckel dans l'*Habilitationsschrift* citée en commençant.

L'auteur détermine le type le plus général de problèmes possédant la propriété cherchée pour le cas où le premier membre de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi est une somme de carrés sans termes rectangles, et opère, à cet effet, par différentiation. Le calcul est notablement plus simple si, au contraire, on laisse aux équations leur forme finie.

Donnons, en effet, aux constantes [1] $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui figurent dans l'intégrale complète, $n-1$ systèmes de valeurs, et écrivons ainsi $n-1$ fois l'équation (4) de Stäckel [2]. Nous aurons $n-1$ équations linéaires pour déterminer les $n-1$ quantités A_1, $A_2, \ldots, A_n$, Π.

Ces équations seront distinctes, au moins pour un choix convenable des différents systèmes de valeurs données aux α : sans quoi, quelles que soient ces valeurs, elles admettraient au moins deux solutions communes et l'intégrale ω considérée vérifierait deux équations aux dérivées partielles : ce ne serait pas une intégrale complète [3].

---

[1] Notations de Stäckel (*Habilitationsschrift*).

[2] Stäckel, *loc. cit.*, p. 1[illegible].

[3] Goursat, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Chap. IV.

De telles relations déterminent donc les A et H par la règle de Cramer. Si l'on remarque que les quantités $\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2$ sont chacune fonction d'une seule variable, on retombe aisément sur l'expression finale de M. Stäckel.

Une marche toute semblable fournit de même la conclusion finale du n° 3 (page 12) du même travail, relative au cas où l'équation aux dérivées partielles renferme des termes rectangles.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. HADAMARD SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. TOMMASO BOGGIO.

On connaît le théorème de M. Hadamard (1) relatif au maximum du module d'un déterminant à éléments réels ou complexes.

Ce théorème a été démontré par M. Hadamard en 1893; néanmoins il a été inappliqué pendant une dizaine d'années (de sorte qu'on pouvait y voir une curiosité scientifique, plutôt qu'un résultat utile), et cela jusqu'en 1903, où il a été indispensable à M. Fredholm pour démontrer la convergence de ses célèbres séries, qui donnent la solution des équations intégrales.

Après l'application faite par M. Fredholm, le théorème de M. Hadamard a acquis, tout à coup, une très grande importance (2); aussi en a-t-il été bientôt publié, par de nombreux auteurs, différentes démonstrations (3).

---

(1) HADAMARD, *Résolution d'une question relative aux déterminants* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 240-246).

(2) Si les éléments du déterminant sont réels, ce théorème, comme on le sait bien, est susceptible de l'interprétation géométrique suivante : parmi les parallélépipèdes (dans un hyperespace) dont les arêtes ont des longueurs données, c'est le parallélépipède rectangle qui a le plus grand volume.

(3) WIRTINGER, *Sur le théorème de M. Hadamard, relatif aux déterminants* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXXI, 1907, p. 173-179); *Zum Hadamardschen Determinantensatz* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. XVIII, Jahrgang 1907, p. 158-160. — FISCHER, *Ueber den Hadamardschen*

A cette suite, déjà longue, de démonstrations, je ne crois pas inutile d'en ajouter une autre, qui est très courte et élémentaire.

Elle consiste à transformer le déterminant donné en un autre, dont les lignes horizontales vérifient la condition d'orthogonalité.

De cette manière, le carré du module du nouveau déterminant se calcule immédiatement, et de là suit aisément le théorème de M. Hadamard.

Envisageons les déterminants, à éléments complexes,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad A^0 = \begin{vmatrix} a^0_{11} & a^0_{12} & \dots & a^0_{1n} \\ a^0_{21} & a^0_{22} & \dots & a^0_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^0_{n1} & a^0_{n2} & \dots & a^0_{nn} \end{vmatrix},$$

où le symbole x^0 désigne, d'une façon générale, le nombre complexe conjugué de x.

Transformons ces déterminants en deux autres, ayant la même valeur,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b^0_{11} & b^0_{12} & \dots & b^0_{1n} \\ b^0_{21} & b^0_{22} & \dots & b^0_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^0_{n1} & b^0_{n2} & \dots & b^0_{nn} \end{vmatrix}$$

et qui, en outre, soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que les éléments des lignes horizontales vérifient les conditions d'orthogonalité

$$(2) \qquad \sum_1^n {}_t\, b_{rt} b^0_{st} = 0 \qquad (r \neq s;\ r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Pour déterminer les éléments b_{rt}, il suffit d'employer les rela-

---

Determinantensatz (*Archiv der Mathematik und Physik*, Band. XIII, 1908, p. 32-40). — SCHUR, *Ueber die charakteristischen Wurzeln einer linearer Substitution*, etc., *Mathematische Annalen*, Band. LXVI, 1908, p. 488-510, § 5. — TONELLI, *Sul teorema di Hadamard, relativo al valor maggiorante di un determinante* (*Giornale di Matematiche*, 2e série, t. XLVII, 1909, p. 414-418). — HAYASHI, *Démonstration élémentaire du théorème de M. Hadamard sur la valeur maximum du déterminant* (*Ibid.*, 3e série, t. XLVIII, 1910, p. 253-258).

tions récurrentes

$$b_{1i} = a_{1i}, \qquad b_{2i} = a_{2i} - m_{21} b_{1i}, \qquad \ldots$$

et en général

$$(3) \qquad b_{ri} = a_{ri} - \sum_{1}^{r-1}{}_k\, m_{rk} b_{ki} \qquad (r, i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients m_{rk} doivent être déterminés de manière à vérifier les égalités (2); pour cela il suffit de multiplier (3) par b^0_{si}, et de sommer : on a, ayant égard à (2),

$$(4) \qquad m_{rs} \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{si} b^0_{si} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ri} b^0_{si} \qquad (s < r);$$

de cette manière les coefficients m_{rs} sont déterminés.

Les valeurs de b^0_{ri}, m^0_{rs} découlent immédiatement des formules (3), (4), soit :

$$(3') \qquad b^0_{ri} = a^0_{ri} - \sum_{1}^{r-1}{}_k\, m^0_{rk} b^0_{ki}.$$

$$(4') \qquad m^0_{rs} \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{si} b^0_{si} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a^0_{ri} b_{si} \qquad (s < r).$$

Remarquons maintenant qu'une ligne horizontale quelconque des déterminants (1) diffère, à cause des (3), (3'), de la correspondante horizontale des déterminants A, A^0, par une combinaison linéaire des horizontales précédentes; il s'ensuit donc que les deux déterminants (1) ont pour valeur respective A, A^0.

Ceci posé, en multipliant entre eux les déterminants (1), et ayant égard à (2), on trouve

$$AA^0 = \begin{vmatrix} \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{1i} b^0_{1i} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{2i} b^0_{2i} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{ni} b^0_{ni} \end{vmatrix};$$

ou bien

$$(5)\qquad AA^0 = \prod_1^n{}_r \sum_1^n{}_t\, b_{rt} b^0_{rt};$$

calculons le second membre; des (3), (3′) on tire d'abord

$$b_{rt} b^0_{rt} = a_{rt} a^0_{rt} - \sum_1^{r-1}{}_s\, m^0_{rs} a_{rt} b^0_{st} - \sum_1^{r-1}{}_s\, m_{rs} a^0_{rt} b_{st} + \sum_1^{r-1}{}_s \sum_1^{r-1}{}_t\, m_{rs} m^0_{rt} b_{st} b^0_{tt};$$

donc si l'on somme, et si l'on a égard aux (3), (3′), (2), il en résulte

$$(6)\qquad \sum_1^n{}_t\, b_{rt} b^0_{rt} = \sum_1^n{}_t\, a_{rt} a^0_{rt} - \sum_1^{r-1}{}_s\, m_{rs} m^0_{rs} \sum_1^n{}_t\, b_{st} b^0_{st};$$

par conséquent

$$\sum_1^n{}_t\, b_{rt} b^0_{rt} < \sum_1^n{}_t\, a_{rt} a^0_{rt};$$

donc, en vertu de (5),

$$(7)\qquad AA^0 \prod_1^n{}_r \sum_1^n{}_t\, a_{rt} a^0_{rt}.$$

C'est le théorème de M. Hadamard.

De (6) on tire que (7) se transforme dans une égalité seulement si $m_{rs} = 0$ [1], et dans ce cas, comme il résulte des (3), (4), il est nécessaire et suffisant que le déterminant donné A soit, lui-même, orthogonal.

Remarque. — La méthode que je viens d'exposer s'applique, sans modifications, aux matrices.

---

[1] On exclut évidemment le cas où $b_{ii} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, car alors on aurait $A = 0$.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDOYER (H.). — Cours d'Astronomie. Première Partie : Astronomie théorique. Deuxième édition, entièrement refondue. 1 volume in-8, VI-383 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1911.

Les cours d'Astronomie, même ceux écrits en français, ne font pas défaut aujourd'hui, et M. Wolf, qui, dans la préface de la traduction française du traité de Brünnow, se plaignait d'une telle lacune, ne le ferait plus maintenant. Cependant chaque cours a une destination et un caractère particuliers, qui le font rechercher et apprécier par les uns ou par les autres. Il y a des traités destinés à la formation des jeunes astronomes et d'autres à l'usage des étudiants des Facultés. Les premiers supposent la connaissance de la théorie, dont ils se bornent à présenter un exposé sommaire faisant office d'aide-mémoire, et donnent tous leurs soins à l'exposé des méthodes pratiques d'observation et de calcul, aussi bien que des agencements suggérés par l'expérience ; les seconds, sans négliger les applications de la Science, s'arrêtent longuement à l'exposé des théories, en indiquant les différents points de vue sous lesquels on peut les envisager. Ils ne vont pas, comme on dit, au plus pressé (ce que font les premiers) et ils s'arrêtent parfois même à des recherches, à des développements n'ayant pas, pour le moment, d'application immédiate.

C'est ainsi que nous concevons un bon cours de Faculté, et c'est le point de vue auquel s'est placé l'éminent professeur à la Sorbonne en composant le Traité que nous analysons. Le premier Volume avait fait sa première apparition en autographie, le second a paru l'année dernière en typographie. Le Volume qui vient de paraître chez MM. Hermann est la deuxième édition du Tome premier, cette fois imprimé, mais l'Ouvrage a été complètement remanié, sans sortir du plan primitif. Beaucoup de Chapitres y ont été ajoutés, de manière à le rendre un exposé complet de l'Astro-

nomie sphérique et même de toute l'Astronomie théorique, dans le vrai sens de cette expression, qu'aujourd'hui quelques-uns (peut-être à tort) emploient pour désigner la théorie des orbites, qui n'est qu'un Chapitre de la Mécanique céleste.

M. Andoyer a cru avec raison qu'une exposition complète de la Trigonométrie sphérique serait la meilleure introduction à l'Astronomie théorique. Il s'occupe des triangles sphériques dans toute leur généralité, en faisant suivre la démonstration des formules par des remarques intéressant la théorie aussi bien que les calculs numériques.

La formule de Simon L'Huilier tient la place que lui donne son importance. Les caractères que doivent avoir les formules de vérification sont bien mis en relief, aussi bien que le rôle et les avantages des formules différentielles de la Trigonométrie, au sujet desquelles l'auteur fait des remarques très importantes, telles que celles-ci :

« Tout ce qui vient d'être dit sur l'accroissement de Δf cesse » d'exister si dans le domaine des valeurs données x, y, z la fonc- » tion f cesse d'être développable en série de Taylor, c'est-à-dire si » le point analytique (x, y, z) est un point singulier pour la » fonction f. Mais il y a plus : il est évident alors que si ce point » (x, y, z) sans être un point singulier, est voisin d'un point » singulier, le développement de Taylor, qui garde sa valeur » théorique, cesse pratiquement d'être convergent, ses coefficients » devenant très grands; par suite les conclusions énoncées plus » haut, ne sont plus acceptables. »

Les formules de Fabritius trouvent ici leur place et l'on en verra plus tard l'usage dans le calcul des positions apparentes des circompolaires. Les triangles géodésiques sur la sphère et le théorème de Legendre ne sont pas négligés; pour ce dernier on donne une démonstration permettant de retenir autant de termes supplémentaires qu'on veut. Des compléments de Trigonométrie sphérique donnent l'interprétation géométrique de certaines quantités définies ou introduites précédemment, aussi bien que la belle théorie du quadrilatère sphérique inscriptible. De nombreux exemples numériques bien vérifiés complètent cet excellent exposé de la Trigonométrie sphérique.

Le Chapitre II se rapporte à des développements en série dont on fait un usage continuel en Astronomie et qui sont bien démontrés.

Le Chapitre III est le dernier du Livre premier, qui contient ce que l'on pourrait appeler les *prolégomènes* de l'Astronomie. Les systèmes de coordonnées en général, c'est-à-dire au point de vue de la Géométrie analytique, y sont traités; le changement de l'origine est envisagé dans deux cas différents qui recevront leur application plus tard dans le changement des coordonnées héliocentriques en coordonnées géocentriques et dans le calcul des parallaxes par rapport au rayon de la Terre. Viennent ensuite le changement de direction des axes et le changement de coordonnées pour un plan, ainsi que d'autres questions qui servent d'excellente préparation à la théorie de la précession et de la nutation.

Avec le Chapitre IV (le premier du Livre II) on entre dans le domaine de l'Astronomie. Sans suivre l'exemple des anciens astronomes, qui n'envisageaient la Géodésie que comme un Chapitre de l'Astronomie, M. Andoyer consacre dans son Ouvrage un Chapitre à la Terre, où il rassemble des données et des développements en série relatif à l'ellipsoïde terrestre. D'ailleurs l'ordre logique de l'établissement des différents systèmes de coordonnées astronomiques exigeait que l'on s'arrêtât d'abord à la Terre. Les différentes espèces de temps sont illustrées par des exemples numériques, et le mouvement diurne est traité avec ampleur : par exemple, on s'occupe des dérivées du second ordre de la hauteur et de l'azimut par rapport à l'angle horaire.

La réfraction astronomique est exposée avec beaucoup d'étendue et les recherches de M. Radau ne sont pas négligées. A cette théorie se rattachent des questions intéressantes, telles que la recherche de la trajectoire apparente d'une étoile autour de sa position vraie.

La parallaxe et l'aberration sont traitées avec moins de développements, mais rien d'essentiel n'y est négligé.

Dans le Livre III on s'occupe des *mouvements des corps célestes* et du *déplacement des plans fondamentaux*. Les orbites, considérées dans leur plan et dans l'espace, les constantes de Gauss, le calcul des coordonnées écliptiques et équatoriales avec des exemples numériques, les développements en série des différentes anoma-

lies et du rayon vecteur, tous ces sujets sont traités de main de maître. On y trouve aussi les renseignements nécessaires sur les éléments de notre système solaire et sur les différentes espèces de perturbations. La précession et la nutation y sont traitées comme on le peut dans un cours d'Astronomie, c'est-à-dire en empruntant des résultats à la Mécanique céleste; mais l'exposé est très clair, méthodique et précis. L'auteur expose tout ce qu'il faut savoir relativement aux positions moyennes et apparentes des étoiles, et des exemples basés sur les données de la *Connaissance des temps* complètent cette exposition. Le mouvement du Soleil, le mouvement géocentrique des planètes, le mouvement de la Lune et des satellites forment l'objet de trois Chapitres assez courts, mais mettant suffisamment le lecteur au courant de tous ces sujets et des questions intéressantes qui s'y rattachent.

Dans presque tous les cours d'Astronomie la théorie des éclipses n'est exposée que sommairement; on se borne même quelquefois à établir l'équation fondamentale. M. Andoyer a donné avec raison un exposé rigoureux et complet de la théorie des éclipses de Lune et de Soleil, en faisant l'application complète à l'intéressante éclipse de Soleil du 17 avril 1912.

La théorie des occultations des étoiles et des passages de Mercure et de Vénus sur le Soleil complètent le Volume.

Les qualités principales de ce Volume, aussi bien que du deuxième, sont une précision remarquable dans les définitions et dans l'exposé des théories, une grande rigueur dans les démonstrations et dans la discussion des formules, enfin un choix judicieux des exemples numériques. Les mathématiciens seront satisfaits de voir des théories récentes et un langage moderne introduits dans l'ancienne Astronomie sphérique.

Cet Ouvrage est tout indiqué pour les candidats au certificat d'Astronomie; mais il trouvera aussi une bonne place dans la bibliothèque de tout astronome, à côté des cours de M. Faye et de M. Baillaud.

MM. Hermann ont mis un soin spécial dans l'impression de cet Ouvrage, qui fait beaucoup d'honneur à leur maison.

JEAN BOCCARDI.

KORN (A.). — Ueber freie und erzwungene Schwingungen : eine Einführung im die Theorie der linearen Integralgleichungen. 1 volume in-8 de v-136 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

La découverte qui a permis à M. Fredholm d'indiquer une solution unique, simple et directe pour toute une classe de questions de Physique mathématique abordées avant lui par des artifices perpétuellement variés et, en général, des plus délicats, avait cependant été préparée par une série de beaux travaux où ces artifices avaient été progressivement portés à un haut point de perfection.

Le premier d'entre eux fut la méthode même de Neumann, origine première de tous ces progrès successifs, grâce à l'heureuse audace par laquelle son auteur sut à la fois s'inspirer de l'interprétation physique du problème de Dirichlet, en représentant la solution par un potentiel, et s'abstraire de cette interprétation en représentant par un potentiel de double couche ce qu'elle aurait naturellement conduit à considérer comme celui d'une couche superficielle simple.

D'autre part, M. Schwarz apprenait à introduire, dans un problème tout analogue à celui de Dirichlet, un paramètre arbitraire et à définir ainsi le premier nombre fondamental correspondant.

Puis, les nombres fondamentaux suivants sont obtenus par MM. Picard et Poincaré, dont les méthodes consistent, au fond, en un prolongement analytique des séries de M. Schwarz et en la démonstration du fait que ces séries sont méromorphes.

Enfin (et en nous bornant aux principales étapes), M. Poincaré montre comment la méthode de Neumann revient, au fond, à l'introduction d'un paramètre arbitraire et au procédé de Schwarz, et comment, dans l'application, toutes les circonstances importantes se retrouvent semblables de part et d'autre.

La découverte de M. Fredholm était, au fond, étroitement liée aux méthodes antérieures dont nous venons de parler; à un certain point de vue, cependant, elle en était le bouleversement. Les géomètres ont été unanimes à l'admirer; ils l'ont cependant accueillie avec des dispositions assez diverses.

On peut dire que, dans cette découverte, il y a deux choses :

1° Le fait que tous les problèmes de Physique mathématique ainsi envisagés se ramènent à un problème d'Analyse unique lorsqu'on dirige les calculs de manière à faire figurer la fonction reconnue non plus sous des signes de différentiation, mais sous des signes d'intégration; en un mot, lorsqu'on les fait aboutir à une équation intégrale, plus spécialement, à une *équation intégrale de deuxième espèce*. Le mode de mise en équation ainsi systématiquement employé, et dont la possibilité est d'ailleurs la raison d'être du succès des méthodes précédemment mentionnées, a rallié tous les auteurs. Cette innovation est cependant, à elle seule, grosse de conséquences pour la Science; elle marque le point de départ d'une Analyse nouvelle, où la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles ne formera qu'un Chapitre particulier.

2° La résolution de l'équation intégrale de deuxième espèce sous une forme entièrement nouvelle et qui met immédiatement en évidence un certain nombre des propriétés les plus importantes et les plus difficiles à établir autrement : par exemple, le caractère méromorphe des fonctions cherchées par rapport au paramètre.

C'est à ce dernier point de vue que deux attitudes existent.

Je serais, pour ma part, disposé à penser que la solution de Fredholm est la véritable solution du problème, et, quels que doivent être les perfectionnements futurs, que ces perfectionnements doivent la prendre pour base. On peut, semble-t-il, se résigner sans trop de peine à cette attitude, puisqu'elle est nettement celle de M. Poincaré, dont le rôle, dans les recherches qui ont précédé celles de Fredholm, a été si décisif.

Mais on peut aussi appliquer à l'équation intégrale les méthodes par lesquelles on abordait, avant elle, les problèmes de Physique mathématique qu'elle traduit.

M. Korn doit à ces méthodes d'assez belles découvertes pour être fondé à ne pas les abandonner. Pendant ces dernières années, on sait avec quel succès il les a employées à des études sur le problème de l'élasticité et sur les triplets de fonctions fondamentales correspondants. Ses résultats sont connus de tous les géomètres; ceux-ci les apprécient d'autant plus qu'ils les savent obtenus au moment même où leur auteur faisait avancer la Science sur un

tout autre terrain et la dotait de la première solution qui ait été complètement réalisée du problème de la Téléphotographie.

Dans l'Ouvrage actuel, il fait intervenir à la fois les deux points de vue. Cet Ouvrage est d'ailleurs qualifié modestement d'*Introduction à la théorie des équations intégrales linéaires*. Il est rare, on le sait, qu'un peu de coquetterie ne se mêle pas à une pareille modestie, et l'on connaît des « introductions » qui sont assez près d'épuiser les sujets auxquels elles s'attaquent. M. Korn traite le sien assez complètement pour satisfaire nombre de débutants; mais il tient à rester élémentaire. En particulier, il ne s'est pas proposé d'entrer dans le détail des applications physiques. La seule qu'il envisage, la théorie des tuyaux sonores, et par laquelle il débute, est visiblement choisie à cause de sa simplicité, parce qu'elle permet, sur un exemple dont toutes les circonstances sont familières à chacun, de poser les principales questions qui doivent être reprises ensuite. Ce choix est effectivement des plus heureux : on y voit très nettement comment la notion des nombres et des fonctions fondamentales, celle des développements en séries correspondants, et la solution du problème physique sous ses différents aspects, se déduisent de l'intervention (non nécessaire, il est vrai, dans ce cas simple) de l'équation intégrale.

C'est donc bien à celle-ci que, conformément à la conception actuelle, il rapporte tout le reste. Mais, dans son premier Chapitre, il la traite (en supposant le noyau symétrique) exclusivement par les méthodes de Neumann-Poincaré, qu'il arrive d'ailleurs à exposer avec le maximum de simplicité possible. Nombres et fonctions fondamentales, développements de fonctions arbitraires suivant ces fonctions, sont donc introduits et établis avant toute intervention de la méthode proprement dite de Fredholm.

Un second Chapitre est consacré à l'extension de la théorie au cas des noyaux discontinus, lequel n'a peut-être pas été traité par tous les auteurs avec tout le soin qu'il mérite, c'est-à-dire de manière à montrer nettement que toutes les conclusions essentielles du cas primitif continuent à être valables. C'est à quoi s'applique M. Korn, pour les intégrales simples. L'auteur laisse provisoirement de côté les intégrales multiples, bien que les différences entre les deux théories, à ce point de vue, tout en restant si l'on veut superficielles, soient cependant assez notables. Il les men-

tionne, mais très brièvement dans une Note finale en énonçant sans démonstration les résultats qui les concernent.

Ce n'est que dans la dernière Partie que les formules mêmes de Fredholm sont exposées; seulement cette dernière Partie est de beaucoup la plus longue des trois. Le cas où le paramètre λ est racine du déterminant est très complètement discuté. Suivant une marche un peu analogue à celle qu'a indiquée M. Goursat dans son Mémoire des *Annales de Toulouse*, M. Korn établit, pour chacune de ces racines, l'existence d'une série de groupes de fonctions (fonctions fondamentales de première, deuxième, etc. espèces) en nombre égal à l'ordre de multiplicité de la racine en question et qui dérivent les unes des autres par l'équation intégrale donnée elle-même.

Un dernier paragraphe constitue une étude très intéressante des solutions de l'équation lorsque λ est racine du déterminant, comparées avec les limites des solutions lorsque λ tend vers une telle racine. On y constate cette particularité remarquable que la solution correspondant à $\lambda = \lambda_0$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une limite pour λ tendant vers λ_0.

J. Hadamard.

HADAMARD (Jacques). — Leçons sur le calcul des variations, recueillies par M. Fréchet (Cours du Collège de France). T. I. VIII-520 pages. Paris, Hermann, 1910.

1. En publiant les leçons sur le Calcul des Variations, qu'il a professées au Collège de France, M. Hadamard n'a pas seulement comblé une lacune qui se faisait vivement sentir en France, mais avant tout, écrit un Livre qui marquera, me semble-t-il, une date dans l'histoire de ce chapitre de l'Analyse.

Le moment paraît être en effet venu où le Calcul des Variations, que l'on considérait autrefois comme le dernier mot du Calcul infinitésimal, puisse être mis à la base d'un nouvel édifice, du *Calcul fonctionnel*.

L'Ouvrage de M. Hadamard est le premier où cette idée (qui est jusqu'à un certain point dans l'air à l'heure actuelle) est pour-

suivie dans ses diverses conséquences et où l'on voit clairement tout le parti qu'on en peut tirer.

Nous allons tâcher de résumer succinctement de quoi il s'agit, en renvoyant le lecteur, pour plus de détails et pour les démonstrations, aux numéros respectifs du Livre que nous analysons. Il m'a semblé toutefois préférable, pour rendre autant que je l'ai pu la pensée de l'auteur, de ne pas m'astreindre à suivre l'ordre du texte.

2. La définition d'une *fonctionnelle* (ou comme on dit quelquefois d'une fonction de ligne ou de surface) s'obtient en généralisant convenablement celle des fonctions ordinaires.

Il est d'usage (depuis Dirichlet) de dire qu'une fonction est définie pour un certain *ensemble de valeurs de la ou des variables*, lorsqu'à chaque point de l'ensemble en question situé dans un espace à une ou plusieurs dimensions, correspond un nombre bien déterminé.

De même, nous dirons qu'une *fonctionnelle* est donnée, lorsqu'on fait correspondre à chaque élément d'un certain *ensemble de fonctions* d'une ou de plusieurs variables (qu'on pourra considérer comme représentant des courbes, des surfaces, etc.), un nombre bien déterminé (§ 232).

3. *Champ fonctionnel.* — Cependant, cette généralisation, toute simple qu'elle paraisse, ne va pas sans présenter certaines difficultés. Considérons par exemple l'intégrale définie

$$\int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{1}$$

définissant la longueur d'un arc de courbe. Ce sera une fonctionnelle de lignes; mais il est clair qu'il faudra faire sur les courbes en question des hypothèses particulières pour que la formule (1) ait une signification. Il faudra d'abord considérer des arcs de courbes qui ne rencontrent les parallèles à l'axe des y dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ qu'en un seul point, on pourra ensuite supposer par exemple que ces courbes ont en chaque point une tangente bien déterminée et continue.

On dira que toutes les courbes qui vérifient ces diverses conditions font partie d'un même champ fonctionnel K (§ 37).

Mettons au contraire l'intégrale (1) sous forme paramétrique

$$(2) \qquad \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

et supposons qu'on applique à l'intégrale (2) la définition de M. Lebesgue; pour que cette dernière formule ait un sens, il suffira, par exemple, que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ soient à nombres dérivés bornés [1]. L'ensemble des arcs de courbes satisfaisant à cette condition formera un champ fonctionnel K', qui contient le champ K, puisque chaque arc de courbe satisfaisant à nos premières conditions satisfait également aux secondes. Suivant le point de vue où l'on se place, un même problème du Calcul fonctionnel conduit à des champs fonctionnels très différents et qu'il faut définir chaque fois avec beaucoup de soin, tandis que pour les fonctions ordinaires la notion d'intervalle suffit dans la plupart des cas.

4. *Voisinage. Continuité.* — Pour pouvoir étendre les méthodes du Calcul infinitésimal au Calcul fonctionnel on doit d'abord définir ce qu'on entend par *voisinage* de deux couches (ou de deux surfaces, etc.) (§§ 45-48).

La première idée qui se présente est de dire que deux fonctions $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ sont voisines, si leur différence est très petite, pour chaque valeur de x que l'on considère.

D'autre part, si l'on dit que deux fonctions sont voisines il est naturel de se représenter les deux courbes $y = \varphi(x)$ et $y = \Psi(x)$ comme ayant à peu près la même forme.

Or, par exemple, $\alpha \sin \frac{x}{\alpha}$ est très petit quand α tend vers zéro, tandis que la forme de $y = \alpha \sin \frac{x}{\alpha}$ reste différente de celle de la droite $y = 0$ (lorsque α tend vers zéro les tangentes aux deux courbes pour une même valeur de x font entre elles des angles qui ne tendent nullement vers zéro). La fonction $\alpha^2 \left(1 - \cos \frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers zéro ainsi que ses dérivées premières, lorsque α tend vers zéro; la courbe $y = \alpha^2 \left(1 - \cos \frac{x}{\alpha}\right)$ a par conséquent des tangentes dont

---

[1] LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), p. 115.

l'angle avec l'axe des x tend vers zéro avec α; c'est ici la courbure qui ne tend pas vers zéro.

On est ainsi amené à distinguer divers ordres de voisinage ainsi que l'a fait M. Zermelo qui a développé et précisé dans sa thèse les idées de Weierstrass sur ce point. On dira que deux fonctions $\psi(x)$ et $\Psi(x)$ ont un voisinage d'ordre p défini par le nombre positif ε dans un certain intervalle lorsque, pour chaque point de cet intervalle,

$$|\psi(x) - \Psi(x)| < \varepsilon, \qquad |\psi'(x) - \Psi'(x)| < \varepsilon, \qquad \ldots,$$
$$|\psi^{(p)}(x) - \Psi^{(p)}(x)| < \varepsilon$$

(§ 45 la définition du texte est un peu plus générale).

Ces principes étant posés, passons à la *continuité* des fonctionnelles. On dira qu'une fonctionnelle U_y est continue d'ordre p pour une détermination de la fonction sur laquelle elle porte, si z étant une courbe variable quelconque ayant un voisinage d'ordre p défini par ε avec y la quantité $|U_z - U_y|$ tend vers zéro avec ε (§ 234).

La continuité la plus restrictive est naturellement celle d'ordre zéro : une fonctionnelle continue d'ordre zéro est nécessairement aussi continue d'ordre 1, tandis que la réciproque n'a pas besoin d'avoir lieu.

3. *Variation.* — La notion de différentielle se présente lorsqu'on veut étendre la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables. Soit, par exemple, la fonction $f(x, y, z)$ définie dans un certain domaine de l'espace à trois dimensions. Considérons une courbe

$$x = x(\alpha), \qquad y = y(\alpha), \qquad z = z(\alpha),$$

c'est-à-dire une multiplicité à une dimension dépendant du paramètre α et passant pour $\alpha = 0$ par un point (x, y, z) du domaine considéré.

La dérivée de la fonction

$$F(\alpha) = f[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)]$$

pour $\alpha = 0$ a la forme

$$(1) \qquad \left(\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$$

et est simplement multipliée par un facteur constant lorsqu'on conserve la courbe le long de laquelle on différentie et qu'on change de paramètre. On tient compte de ce fait en écrivant

$$(2) \qquad dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

c'est-à-dire en employant la notation des différentielles.

Ces considérations s'étendent tout naturellement au Calcul fonctionnel. Soit par exemple U_y une fonctionnelle de ligne définie dans un champ K ; considérons une fonction particulière $y(x)$ de ce champ et une multiplicité à une dimension de fonctions appartenant à K, multiplicité qui dépend du paramètre α et passe pour $\alpha = 0$ par la fonction $y(x)$ précédemment choisie. Une telle multiplicité est donnée par une fonction $v(x, \alpha)$ prise entre les limites $x_0(\alpha)$ et $x_1(\alpha)$ qui dépendent en général aussi du paramètre α et pour laquelle on a

$$v(x, \alpha)_{\alpha=0} = y(x).$$

Nous supposerons que pour des valeurs suffisamment petites de $|\alpha|$ ces arcs de courbes appartiennent au champ K ; à chacune de ces valeurs correspond une valeur de la fonctionnelle U_y et l'on pourra écrire

$$U_{v(x, \alpha)} = \Phi(\alpha).$$

Il faudra, pour généraliser maintenant notre formule (1), supposer que $\left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$ existe pour toutes les fonctions $v(x, \alpha)$ que nous considérons.

La grandeur $\left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$ sera une fonctionnelle qui dépendra en général non seulement de $y(x)$ mais au moins encore de

$$\left(\frac{\partial v(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$$

qui joue ici le rôle des dérivées $\frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha}$ de la formule (1).

La propriété de la différentielle d'une fonction d'être linéaire par rapport aux différentielles des variables joue un rôle fondamental dans les raisonnements de l'Analyse.

De même les fonctionnelles auxquelles on peut étendre les

méthodes du Calcul infinitésimal sont celles où $\left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$ *sera une fonctionnelle linéaire par rapport à* $\left(\frac{dv(x,\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$ (§ 238).

On dit (§ 239) qu'une fonctionnelle U_y est linéaire lorsque

$$U_{y_1+y_2} = U_{y_1} + U_{y_2},$$
$$U_{cy_1} = c\,U_{y_1},$$

et que de plus U_y est continue.

Il est extrêmement remarquable que les fonctionnelles linéaires puissent être représentées par une intégrale définie et qu'on puisse écrire (§§ 244-247)

$$(3) \qquad U_y = \lim_{\mu=+\infty} \int_{t_0}^{t_1} y(\xi)\Psi(\xi,\mu)\,d\xi,$$

où $\Psi(\xi,\mu)$ est une fonction *indépendante de* y et dépendant seulement de l'opération fonctionnelle donnée [1].

Nous pourrons donc poser

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \lim_{\mu=+\infty} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} \Psi_y(\xi,\mu)\,d\xi,$$

où $\Psi_y(x,\mu)$ est une fonction des deux variables x et μ qui est en outre fonctionnelle de $y(x)$, mais dans laquelle α n'intervient pas ; en d'autres termes $\Psi_y(\xi,\mu)$ ne dépend pas de la multiplicité à une dimension $v(x,\alpha)$.

La formule (4) a donc par rapport à α absolument le même caractère que la formule (1).

On peut donc écrire une formule analogue à la formule (2) en posant, suivant la notation de Lagrange (§ 39),

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \delta U_y,$$
$$\left(\frac{\partial v(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \delta y.$$

---

[1] Tout récemment M. F. Riesz a montré (*Comptes rendus*, 1910) que toute fonctionnelle linéaire continue peut être mise sous la forme

$$U_y = \int_{t_0}^{t_1} y(\xi)\,d\omega(\xi)$$

où $\omega(\xi)$ est une fonction à variation bornée et où l'intégrale est une intégrale de Stieltjes généralisée comme les a considérées M. Hellinger.

On nomme δU_y la variation de la fonctionnelle et δy la variation de la fonction et l'on obtient finalement

$$(5) \qquad \delta U_y = \lim_{\mu = +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \Psi_y(\xi, \mu)\, \delta y\, d\xi.$$

Dans un grand nombre de problèmes, la quantité $\Psi_y(\xi, \mu)$ tend, lorsque μ croît indéfiniment, vers une fonction continue $\theta_y(\xi)$, et cela d'une manière uniforme pour $x_0 \leq \xi \leq x_1$ (§ 246); on peut alors simplifier (5) et écrire

$$(6) \qquad \delta U_y = \int_{x_0}^{x_1} \theta_y(\xi)\, \delta y\, d\xi.$$

Les fonctionnelles qui dépendent de plusieurs fonctions ou celles qui dépendent de fonctions de plusieurs variables conduisent naturellement à des résultats tout à fait analogues.

6. *Le problème du Calcul des variations.* — Les problèmes de maxima et minima ont préparé l'invention du Calcul infinitésimal. Ce sont des questions toutes semblables du Calcul fonctionnel qui font l'objet du Calcul des Variations.

Étant donnée une fonctionnelle U_y définie pour un champ K, on peut demander de trouver (si elle existe) la ou les courbes du champ pour lesquelles U_y a la plus petite valeur possible.

Il est clair que si $y(x)$ appartient au champ K et que, pour une certaine variation δy de cette courbe, δU_y est différente de zéro $y(x)$ ne répondra pas à la question. Car, $\left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$ étant différent de zéro, on pourra trouver des valeurs de α pour lesquelles $\Phi(\alpha) < \Phi(0)$ ou, ce qui est la même chose, des courbes du champ K qui donnent à la fonctionnelle des valeurs plus petites que U_y.

On est donc conduit à chercher d'abord les courbes particulières $y(x)$ du champ K pour lesquelles δU_y s'annule pour toutes les variations δy qu'on peut former, courbes qu'on nomme *extrémales du problème.*

Les premières fonctionnelles pour lesquelles Bernoulli, Euler et Lagrange ont résolu ce dernier problème ont toutes la forme

particulière d'une intégrale définie

$$(7) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} f(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n; y_1, y_2, \ldots, y_n, x)\, dx.$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des fonctions inconnues de x dont l'ensemble représente une courbe $\mathcal{L}$ de l'espace à $(n+1)$ dimensions. Le champ K sera composé de courbes ayant une tangente continue (sauf peut-être en certains points isolés) et passant par deux points fixes A et B d'abscisse x_0 et x_1 (§ 50).

La variation $\delta\mathcal{V}$ de (7) peut se mettre (du moins quand on prend l'intégrale le long d'une courbe $\mathcal{L}$ admettant des dérivées secondes continues et que la fonction f elle-même est continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres) sous la forme simplifiée (6) comme le montre un calcul direct (§ 83). On obtient

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} I_{y_k}\, \delta y_k\, dx,$$

où

$$(8) \qquad I_{y_k} = \frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_k}$$

et l'on en déduit, par un raisonnement classique (§ 56), que la condition nécessaire (et suffisante) pour que δI s'annule, quelle que soit la variation de $\mathcal{L}$, peut s'écrire

$$(9) \qquad I_{y_1} = 0, \qquad I_{y_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad I_{y_n} = 0.$$

Les seules extrémales parmi les courbes que nous avons considérées sont donc les solutions d'un système d'équations différentielles qu'on obtient en annulant les expressions (8).

La grande importance des problèmes de la forme (7) réside dans ce fait que les trajectoires de la Dynamique satisfont à des équations différentielles de la même forme (9) et peuvent par conséquent être considérées comme extrémales de certains problèmes du Calcul des Variations (§§ 63 et 75) appartenant à cette classe.

Il est de grande importance théorique (et même quelquefois utile pour certaines applications) de savoir si les solutions de nos équations différentielles forment ou non la totalité des extrémales pour des champs plus étendus que ceux que nous avons con-

sidéré. Pourrons-nous en particulier, si nous considérons le champ K formé par des courbes à tangente continue (mais sur les dérivées secondes desquelles nous ne ferons plus aucune supposition), trouver des extrémales qui avaient échappé à notre première analyse parce que notre premier champ fonctionnel était trop restreint? Il n'en est rien, comme le montre un raisonnement ingénieux, dû à Du Bois-Reymond (§§ 64-67 et 180; voir aussi § 400), au moyen duquel on prouve que les extrémales du champ K ont toutes des dérivées secondes continues (sauf peut-être en certains points singuliers) et qu'elles appartiennent par conséquent au champ K.

7. *Problèmes sous forme paramétrique.* — Nous avons parlé indifféremment de *fonctions* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de x ou de *lignes* dans l'espace à $(n+1)$ dimensions; ces deux locutions ne sont pas rigoureusement synonymes, comme nous l'avons déjà fait remarquer à propos de la définition du champ fonctionnel.

Quand plusieurs points différents d'une même ligne correspondent à la même valeur de x, on ne pourra pas représenter celle-ci par n fonctions *uniformes* $y_i(x)$ (§ 70).

On pourra, au contraire, représenter une ligne quelconque $\mathcal{C}$ en considérant $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et x comme fonction d'un même paramètre t.

Les intégrales (7) prendront maintenant la forme

$$(10) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} \bar{f}(x, y_1, \ldots, y_n; \dot{x}, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)\, dt,$$

$\dot{x}, \dot{y}, \ldots \dot{y}_n$ désignant les dérivés des $(n+1)$ fonctions $x(t), \ldots, y_n(t)$ par rapport au paramètre. Pour que (10) représente une fonctionnelle de lignes, il faudra exiger que la valeur de cette intégrale ne change pas lorsque l'on conserve la courbe $\mathcal{C}$ et qu'on change le paramètre t (§ 72). Il faut pour cela que $\bar{f}$ satisfasse à la condition

$$(11) \qquad \bar{f}(x, y_1, \ldots, y_n; k\dot{x}, k\dot{y}_1, \ldots, k\dot{y}_n) = k\bar{f}(x, y_1, \ldots, y_n; \dot{x}, \ldots, \dot{y}_n),$$

pour toute valeur positive de k, et cette condition est suffisante.

Mais, la valeur de I pourra d'autre part dépendre du *sens* dans lequel on parcourt la courbe lorsque t varie de t_1 à t_0.

Un exemple très simple pour lequel on voit immédiatement qu'un tel fait peut se présenter est le suivant :

Un cours d'eau dont on connaît la direction et la vitesse en chaque point d'une certaine portion du plan des x, y, est traversé par une embarcation dont la vitesse *relative* par rapport à l'eau est donnée. Le temps que met l'embarcation à parcourir un certain arc de courbe peut être représenté par une intégrale telle que (10). Il est clair que ce temps est autre pour une même courbe suivant qu'on remonte le fleuve ou qu'on le descend.

C'est Weierstrass qui a reconnu l'importance des problèmes paramétriques; il les a même considérés presque exclusivement dans ses cours. On ne peut en effet espérer ramener les problèmes du Calcul des Variations qui ont une signification géométrique à ceux que nous avons d'abord considérés. Tout au plus pourrait-on, en sectionnant la courbe $\mathcal{C}$ et en faisant un changement convenable des coordonnées, représenter cette courbe elle-même par n fonctions de x : ces procédés ne seraient en aucun cas applicables à la courbe variée dont on ne connaît pas la forme (à moins qu'on ne se borne à considérer des courbes dont le voisinage est d'ordre plus grand que zéro, ce qui reviendrait à introduire une restriction non inhérente au problème (§ 75).

Les problèmes paramétriques avaient d'ailleurs été considérés dans les applications antérieurement à Weierstrass ; il suffit de rappeler que l'action maupertuisienne est un problème de cette espèce (§ 75) et que la théorie des rayons lumineux a conduit Hamilton [*Theory of Rays* (*Trans. Roy. Irish Acad.*, 1824, 1830, 1832)] à des intégrales identiques à (10).

Le problème le plus général de l'Optique géométrique présente, en effet, de grandes analogies avec le problème que nous considérons actuellement. Se donner $\bar{f}$ revient à connaître, pour chaque point d'une portion de l'espace à $(n+1)$ dimensions et pour chaque vecteur passant par ce point, une certaine vitesse.

La valeur de I le long d'un arc de courbe est dans ce cas égale au temps T que met un mobile à parcourir cet arc, la vitesse de ce mobile étant déterminée à chaque instant par la distribution des vitesses données.

Le problème de minimum consiste ici à trouver la courbe bra-

chistochrone qui joint deux points donnés, c'est-à-dire celle pour laquelle le temps T est le moindre possible.

La détermination des extrémales pour une intégrale prise sous forme paramétrique conduit à des équations différentielles tout analogues aux équations (9) avec la différence que la relation (11) à laquelle doit satisfaire $\overline{f}$ entraîne une relation identique entre les équations différentielles elles-mêmes (§ 81). Le problème semble donc indéterminé et l'est en effet, mais seulement par rapport au choix du paramètre.

On pourra donc ajouter une nouvelle équation arbitraire au système pour déterminer t, par exemple :

$$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + \ldots + y_n^2 = 1,$$

qui indique que le paramètre t est pris égal à la longueur de l'arc de l'extrémale à partir d'un point fixe.

Les extrémales auront en tout cas une signification géométrique que l'on pourra étudier (§§ 87, 89).

Le raisonnement est grandement facilité par l'introduction de deux courbes ou surfaces (selon que $n = 1$ ou $n > 1$) dont la première n'est autre que l'hodographe de la distribution de vitesses que nous considérions tantôt ; c'est celle que j'avais nommée autrefois *indicatrice* du problème et à laquelle M. Hadamard a donné le nom de *figuratrice* ; la seconde est sa polaire réciproque par rapport à un cercle [ou une sphère de l'espace à $(n+1)$ dimensions] de rayon 1 (§§ 85, 86) ; on la nomme *figuratrice*.

8. *Extrémale passant par deux points.* — Le problème considéré précédemment, de déterminer la courbe joignant deux points P et Q pour laquelle I ait une valeur minimum, ne sera possible que s'il existe une extrémale passant par les points P et Q. Les théorèmes d'existence des solutions d'équations différentielles montrent qu'on pourra faire passer par P une extrémale régulière ayant une direction donnée lorsqu'on pourra résoudre ces équations par rapport aux dérivées secondes des fonctions inconnues. Ceci exige qu'un certain déterminant fonctionnel soit différent de zéro, qui pour la forme particulière des équations (9) n'est autre que le discriminant A de la forme quadratique

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Sigma A_{ik} y_i y_k.$$

dans laquelle

$$A_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'_i \, \partial y'_k} \quad (\S\ 59).$$

Pour les problèmes paramétriques, la condition est un peu plus compliquée (§§ 84 *bis*, 89).

Supposons ces conditions vérifiées pour une certaine direction passant par P. On démontre alors (§§ 99, 105, 110) qu'on pourra entourer l'extrémale satisfaisant à ces conditions initiales par un *faisceau régulier* d'extrémales passant par P, recouvrant uniformément une portion de l'espace et l'on pourra donc, si l'on se trouve à l'intérieur de ce faisceau, résoudre le problème aux limites que nous nous étions proposées.

Considérons un instant le problème du plan ; les extrémales passant par P auront une enveloppe f qui sépare en général les points pour lesquels le problème aux limites est possible de ceux qu'on ne peut joindre à P au moyen d'une extrémale régulière appartenant à notre faisceau. La seule exception est celle où l'enveloppe f a un point de rebroussement (§ 103).

L'enveloppe f, qui dans certains cas (par exemple pour les lignes géodésiques sur la sphère) se réduit à un point, joue donc un rôle important. On la déterminera en cherchant les points où elle touche une extrémale donnée, points qu'on nomme *foyers conjugués* de P (§ 100).

Jacobi a remarqué qu'il n'est pas nécessaire d'avoir l'intégrale générale des extrémales pour obtenir les foyers conjugués sur une extrémale connue, mais qu'il suffit de résoudre dans ce cas une équation linéaire du second ordre dont les coefficients peuvent être déterminés sans nouvelle intégration (§§ 99-115).

9. *Problèmes liés, isopérimétriques. Problèmes de Lagrange et de Mayer.* — On est amené souvent à se donner des problèmes du Calcul des Variations très différents des précédents. Ce sont ceux où l'on cherche la courbe qui rend minimum une fonctionnelle U_y non plus parmi toutes les courbes qui joignent deux points P et Q, mais seulement parmi celles qui donnent à d'autres fonctionnelles V_y, W_y, etc., des valeurs déterminées ; M. Hadamard leur a donné le nom générique de *problèmes liés*.

Pour ces problèmes aussi, la première question qui se pose est la détermination des extrémales, c'est-à-dire des courbes pour lesquelles la variation δU s'annule lorsqu'on varie y en respectant les conditions auxiliaires qu'on peut aussi mettre sous la forme $\delta V = 0$, $\delta W = 0$, ...

Les problèmes liés qu'on rencontre le plus souvent, particulièrement dans certaines questions de Mécanique, sont les problèmes isopérimétriques (Chap. V) pour lesquels les fonctionnelles U_y, V_y, W_y ont toutes la forme (7), et le problème de Lagrange où U_y à la forme (7), tandis que les fonctionnelles V_y, W_y, ... ne sont autre chose que le premier membre d'une équation différentielle ordinaire. Au problème de Lagrange (§ 191) se rattache le problème de Mayer (§ 196) qui en diffère par la forme particulière de la fonctionnelle U_y dont on cherche le minimum.

Dans ce dernier problème, on se donne le point P et au lieu du second point Q une droite

$$(12) \qquad y_0 = s, \quad y_1 = \varphi_1(s), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi_n(s)$$

dépendant du paramètre s. On demande de trouver parmi toutes les courbes satisfaisant aux conditions

$$(13) \qquad \begin{cases} v_y = g_1(y_0, y_1, \ldots, y_n; y_0', \ldots, y_n', x) = 0, \\ w_y = g_2(y_0, y_1, \ldots, y_n; y_0', \ldots, y_n', x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et joignant le point P à la droite (12) celles pour lesquelles s a la plus petite valeur possible.

Tous ces problèmes conduisent, comme le problème ordinaire que nous avions considéré d'abord, à chercher les extrémales parmi les solutions d'un système d'équations différentielles du second ordre, auquel on doit joindre maintenant les conditions auxiliaires relatives à V_y, W_y, etc.

Ils sont d'ailleurs intimement liés entre eux et à d'autres questions plus compliquées encore : celles, par exemple, où l'on se donne pour U_y une relation entre plusieurs intégrales définies de la forme (7), et peuvent même être ramenés l'un à l'autre au point de vue formel. Il faut toutefois bien se garder de croire pour cela qu'ils sont identiques entre eux.

Comparons par exemple le problème isopérimétrique

$$(14) \qquad U_y = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y; y')\, dx = \text{min.},$$

$$(15) \qquad V_y = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y; y')\, dx = a$$

au problème de Lagrange que l'on obtient en remplaçant la condition auxiliaire (15) par la condition

$$(16) \qquad \overline{V}_y = z' - g(x, y; y') = 0.$$

Le champ K (pour le premier problème) sera par exemple composé de courbes joignant deux points A et B du plan des xy pour lesquelles la fonctionnelle (15) aura la valeur a.

Chacune de ces courbes pourra être considérée comme projection d'une courbe de l'espace des x, y, z passant par A et satisfaisant à la relation (16). Les extrémités de ces dernières courbes seront toutes situées en un même point $\overline{B}$ dont l'ordonnée z est égale à a, et la projection sur le plan des xy se confond avec B.

L'ensemble de ces courbes forment un champ $\overline{K}$ et la correspondance des éléments des champs K et $\overline{K}$ sera *univoque* et *réciproque*. De plus, la fonctionnelle U_y aura la même valeur pour deux éléments correspondants de ces champs.

On ne peut cependant pas conclure *a priori* de ces faits qu'aux extrémales de $\overline{K}$ correspondent toujours des extrémales de K parce qu'à deux courbes voisines de K peuvent correspondre deux courbes de $\overline{K}$ qui ne sont nullement voisines (§§ 192 et 196 *bis*).

C'est la méthode bien connue des multiplicateurs (qui est d'ailleurs assez délicate à établir pour les problèmes de Lagrange et de Mayer) qui conduit aux équations différentielles du problème (§§ 196, 204).

10. *Champs singuliers.* — Les problèmes liés présentent certaines singularités sur lesquelles il convient d'attirer l'attention.

Supposons, par exemple, que dans le problème isopérimétrique (14), (15) la variation première δV_y s'annule pour la courbe $\mathcal{C}$ qu'on étudie.

Il se peut alors que cette courbe rende vraiment minimum (ou maximum) la fonctionnelle V_y et la condition $V_y = a$ ne pourra être vérifiée pour aucune courbe voisine de γ : le problème proposé sera alors illusoire.

Mais il se peut aussi que δV_y soit égale à zéro sans que la fonctionnelle V_y soit *extremum* sur γ (par exemple si l'extrémité B de l'arc AB se trouve au delà du point conjugué de A).

On pourra alors construire un champ K^* contenant la courbe γ et vérifiant la condition (15), mais la méthode des multiplicateurs sera en défaut et l'on dit dans ce cas que le champ K^* est *singulier* [1] (§ 187).

Des singularités tout analogues se présentent pour les problèmes de Lagrange et de Mayer (§ 205), et même dans les problèmes de maxima et minima ordinaires (§ 9).

11. *Limites variables.* — La valeur de nos fonctionnelles, I pour le problème libre et U_y pour les problèmes liés, prises le long d'une extrémale est fonction des extrémités de cette courbe.

Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas du problème ordinaire (par exemple, sous forme paramétrique) et dans l'espace à trois dimensions.

Considérons d'abord les extrémales joignant un point fixe $P(x_0, y_0, z_0)$ à un point variable Q de coordonnées x, y, z, et soit $I(x, y, z)$ la valeur de l'intégrale (7) prise le long de cette courbe. Les dérivées partielles de cette fonction sont données par les relations (§§ 129-134 et 145)

$$(14) \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = \bar{f}_x, \qquad \frac{\partial I}{\partial y} = \bar{f}_y, \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = \bar{f}_z,$$

qui montrent que ces dérivées peuvent être calculées directement lorsqu'on connaît la direction de la tangente de l'extrémale au point Q.

Considérons la famille de surfaces $I(x, y, z) = \text{const.}$ qui sont

---

(1) On peut il est vrai trouver des conditions nécessaires pour le *minimum* de la fonction U_y sans rencontrer la singularité en question [*voir*, par exemple, ma Dissertation (Göttingen, 1904), p. 40]. Il n'en est cependant pas de même si l'on cherche des conditions nécessaires pour que δU_y s'annule ; les deux problèmes sont ici foncièrement distincts.

traversées en chaque point par une extrémale (du moins lorsque le point Q est suffisamment rapproché de P ou, ce qui revient au même, lorsque I est suffisamment petit); l'équation du plan tangent en chaque point d'une telle surface est à cause de (14)

$$f_{\dot{x}}(X-x)+f_{\dot{y}}(Y-y)+f_{\dot{z}}(Z-z)=0, \tag{15}$$

x, y, z étant les coordonnées courantes; x, y, z celles du point de contact.

On dit (§ 134) que l'extrémale est transversale aux surfaces $I=$ const. et en général qu'une extrémale est transversale à une surface quelconque S qu'elle traverse en un point A chaque fois où la relation (15) est vérifiée pour ce point.

Étant donnée une surface quelconque S, on peut construire en chaque point de cette surface une extrémale qui lui soit transversale. La valeur de la fonctionnelle I prise le long d'une de ces extrémales passant par le point (x, y, z) et comptée à partir de la surface S est une fonction $I(x, y, z)$ qui satisfait également aux relations (14) (§ 137). Il suit de là que les extrémales, que nous venons de construire, sont transversales ici aux surfaces $I=$ const.

On peut éliminer $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ entre les équations (14) $\left(\text{car les quantités } f_{\dot{x}}, \text{ etc., ne dépendent que des rapports } \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)$ et l'on obtient une équation aux dérivées partielles pour I.

Chaque solution de cette équation peut être considérée comme déterminant une série de surfaces coupées transversalement par une famille d'extrémales (§ 145).

Les propriétés de la fonction $I(x, y, z)$ que nous venons d'énoncer se trouvent pour la plupart dans le Mémoire d'Hamilton (*Theory of Rays*) que nous avons cité plus haut ; le parti que Jacobi en a tiré pour l'intégration des équations de la Mécanique est aujourd'hui du domaine classique.

Les problèmes de Lagrange et de Mayer donnent lieu à une théorie tout analogue (§§ 211 et suiv.).

12. *Conditions suffisantes.* — Nous n'avons jusqu'à présent nullement résolu le problème de minimum que nous nous étions proposé : de trouver la courbe joignant deux points P et Q pour laquelle la fonctionnelle I a la plus petite valeur possible ; nous avons seule-

ment montré que cette courbe *si elle existe* devait nécessairement être une extrémale. Or il n'est nullement prouvé que notre problème a une solution; on peut donner des exemples très simples de fonctionnelles qui, dans un champ donné, n'atteignent pas leur minimum, même si la variation première s'annule pour certaines courbes du champ, c'est-à-dire si le champ contient des extrémales.

Weierstrass a donné une méthode qui permet de comparer la valeur J d'une intégrale telle que (7) prise le long d'une courbe quelconque L d'un certain champ, que nous appellerons la *courbe de comparaison*, avec la valeur I de cette intégrale prise le long d'une extrémale ayant les mêmes extrémités [1]. La méthode de Weierstrass consiste à représenter la différence (J — I) par une intégrale curviligne

$$\int_{\mathfrak{L}} E\,dt$$

prise le long de la courbe de comparaison; si donc on peut s'assurer que la fonction E est positive pour toutes les courbes du champ K, la grandeur (J — I) le sera également, c'est-à-dire qu'on aura

$$I \leqq J,$$

ce qui prouverait la propriété de minimum demandée (§§ 294-311).

Le calcul de la fonction E est intimement lié aux propriétés de transversalité des extrémales. Supposons qu'on puisse entourer l'extrémale PQ par un faisceau transversal d'extrémales la contenant et recouvrant la portion de l'espace qui contient le champ K. Soit S_1 et S_2 deux surfaces coupées transversalement par les extrémales du faisceau; la valeur de I prise le long d'une extrémale quelconque du faisceau allant de S_1 et S_2 sera constante et déterminera une grandeur qu'on pourra appeler la *distance extrémale* des surfaces S_1 et S_2.

En faisant usage des formules (14) et (15) on peut représenter la distance extrémale des deux surfaces S_P et S_Q qui est égale à I par une intégrale curviligne le long de la courbe de comparaison;

---

[1] M. Darboux a traité le problème de l'action maupertuisienne à peu près à la même époque que Weierstrass, au moyen d'une théorie très analogue (§ 314).

J étant une intégrale curviligne prise le long du même chemin, on en déduit la valeur de E (§ 300).

La fonction E de Weierstrass dépend, en un point donné, de la direction de l'extrémale du faisceau régulier passant par ce point et de celle de la courbe de comparaison ; elle donne lieu à une interprétation géométrique simple quand on se sert de la figurative. M. Hadamard ne traite à ce point de vue que le cas où x est pris comme variable indépendante (§ 306).

La construction complète pour l'intégrale prise sous forme paramétrique dans le cas de l'espace à un nombre quelconque de dimensions est la suivante : Menons, par l'origine des coordonnées, un vecteur OA parallèle à la direction de l'extrémale du faisceau transversal au point P que nous considérons et un autre OB parallèle à la direction de la courbe de comparaison, les extrémités A et B étant prises sur la figurative. Menons par A le plan T tangent à la figurative et par B le vecteur BC parallèle à CA, C étant le point de percée de ce dernier vecteur avec le plan T. Le produit de f pour la direction de la courbe de comparaison et de $\frac{BC}{OA}$ pris avec son signe est égal à la valeur de E [1].

E sera donc toujours de même signe si le plan T est un plan extrême de la figurative (§ 350) et si f a un signe constant, ce qui a lieu en particulier lorsque la figurative est une surface convexe.

On peut, en se servant de la formule de Weierstrass, établir rigoureusement une série de conditions suffisantes pour qu'une extrémale donnée rende minimum la fonctionnelle I pour toutes les courbes du champ K (§§ 317-328).

13. *Conclusion.* — Je me suis efforcé, dans l'analyse qui précède, de donner une idée des matières contenues dans le Livre de M. Hadamard. Mais je n'ai pu m'étendre ni sur les applications dont certaines [telles que l'étude des points conjugués pour le méridien de la surface de révolution minima (§ 118) ou le mouvement d'un point pesant avec résistances passives (§ 216)] méritent une

---

[1] Cette construction reste valable dans le cas des problèmes liés : le plan tangent de la figuration qui n'est pas déterminé dans ce cas doit être remplacé par un plan parallèle à celui qui est coupé transversalement au point P par le faisceau transversal considéré.

mention particulière, ni sur certains points spéciaux de la théorie générale malgré leur importance. C'est ainsi que j'ai passé sous silence tout ce qui a trait aux variations unilatérales (§§ 188, 367), aux limites variables (§§ 161, 348), aux solutions discontinues (§§ 170, 360), aux trajectoires fermées (§ 356).

J'ai même omis le théorème de M. Osgood (§ 396) et toute la théorie de la variation seconde (§ 254), pensant qu'il valait mieux attendre que le second Volume de l'Ouvrage ait paru avant de parler de ces sujets, la comparaison de ce qui se passe dans le cas de l'extrémum libre pour les intégrales simples avec le cas de l'extrémum lié et celui des intégrales doubles étant des plus instructives.

C. Carathéodory.

MÉLANGES.

JULIUS WEINGARTEN.

[*Traduction de la Notice nécrologique insérée au programme de l'année scolaire* 1910-1911 *de la Technische Hochschule de Berlin* (1).]

Par M. Stanislas Jolles.

L'École Polytechnique de Charlottenbourg a eu la douleur de perdre en Julius Weingarten, décédé le 17 juin 1910, à Fribourg-en-Brisgau, un de ses plus anciens professeurs, et le monde des mathématiciens un savant éminent et absolument original.

Julius Weingarten, né à Berlin le 26 mars 1836, était le fils d'un tisserand émigré de la Pologne. Tout d'abord élève au gymnase le « Couvent gris », il entra ensuite à la Gewerbeschule,

(1) Technische Hochschule = École technique supérieure, analogue à l'École centrale.

alors florissante sous la direction de von Klöden, et il y passa les examens de sortie en 1852. Il semble que « le vieux Klöden » et le géomètre Röber ont témoigné un intérêt particulier à l'adolescent, car, même dans ses dernières années, Weingarten se souvenait volontiers et avec vénération de ces deux hommes. Ayant montré à l'école des dispositions remarquables pour les Mathématiques et les sciences naturelles, Weingarten se décida à se vouer entièrement à l'étude des sciences. Quoique n'ayant pas le diplôme de bachelier d'un gymnase, il obtint cependant l'autorisation du Ministre, encore nécessaire à ce moment, de se faire immatriculer à l'Université, et il y étudia de 1853 à 1857. Il suivit avec enthousiasme les cours de Dirichlet, qui, de même que les conférences de Physique de Magnus, excitaient vivement son intérêt et lui inspirèrent des idées nouvelles.

En 1854, il s'inscrit à l'Institut des Arts et Métiers, pour y approfondir ses connaissances en Chimie. Déjà l'année suivante, le directeur de cet Institut, Drukenmüller, le nomma son Assistant pour les Mathématiques. Il garda cette place de 1854 à 1857 et finit par se décider à devenir professeur à la Gewerbeschule.

Weingarten échoua à l'examen prescrit en Mathématiques et Mécanique, probablement par suite d'un manque de connaissances en Mécanique. Mais, la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin lui ayant décerné un prix pour son Mémoire *De lineis curvaturæ superficierum*, il se voua à la carrière de professeur, du ressort de la section de l'Enseignement du Ministère de l'Instruction publique, des Cultes et des Affaires médicales. En 1858, il passa à Berlin l'examen *pro facultate docendi*, ce qui l'autorisa à enseigner, en Première, les Mathématiques, la Physique et la Chimie.

Le jeune candidat fit son stage au Séminaire mathématique du gymnase Frédéric-Guillaume, sous Schellbach, il enseigna ensuite, d'abord comme professeur adjoint au gymnase Frédéric, puis à l'école primaire supérieure Frédéric-Werder et enfin à l'école des cadets de Berlin. Ayant présenté son Mémoire couronné à l'Université de Halle, il fut reçu docteur en Philosophie en 1864 et, peu après, il fut agréé à la Bauakademie [1] de Berlin.

Julius Weingarten a connu de bonne heure les difficultés de

---

[1] École d'Ingénieurs et d'Architectes.

l'existence. Ses parents n'étaient pas en état de lui venir en aide, ayant déjà des sacrifices à faire pour leur fils aîné Hermann, qui devint plus tard professeur d'Histoire ecclésiastique à Berlin. D'ailleurs, son père mourut déjà en 1853. C'était donc une grande joie pour le jeune privatdozent d'être nommé professeur rémunéré à la Bauakademie, où il enseigna, dès le 1er octobre 1866, les Mathématiques pures pour les étudiants du premier semestre.

Il obtint le titre de Professeur en 1871, mais ce n'est que trois ans plus tard qu'il eut sa nomination définitive comme professeur de Mécanique. Weingarten a été attaché à la Bauakademie et ensuite à la Technische Hochschule (Ecole Polytechnique de Berlin), pendant vingt-neuf ans. Grâce à ses conférences étincelantes d'esprit, il a été entouré d'abord, pendant une dizaine d'années, de nombreux disciples, mais, plus tard, diverses causes de dissentiment et la maladie vinrent troubler pour lui la joie d'enseigner.

Il réduisit de plus en plus ses conférences à la Hochschule, et seulement un petit nombre de disciples bien doués jouissaient du privilège de suivre ses cours suggestifs. Il ne fréquentait presque plus le monde; lui qui, autrefois, aimait à se voir entouré d'un cercle d'auditeurs, se réjouissant de ses gais récits et de ses aperçus sarcastiques, ne fréquentait plus guère que quelques-uns de ses collègues qui lui étaient particulièrement sympathiques. Mais toujours, comme auparavant, l'habile géomètre éclaira de ses conseils maint jeune mathématicien dans les questions qui concernaient son enseignement. Ainsi, il fut le premier président de la Société berlinoise de Mathématiciens, fondée par de jeunes collègues en 1901. Mais la Société n'a siégé qu'une demi-année sous sa présidence, Weingarten ayant quitté Berlin le 1er avril 1902, avec un congé d'un an pour se remettre à Fribourg-en-Brisgau. Il resta dans cette ville, après avoir pris sa retraite une année plus tard. Dans les dernières années de son séjour à Berlin, il fut nommé membre correspondant de la Société des Sciences de Gœttingue et membre étranger de l'*Accademia dei Lincei* de Rome. Peu de temps après, l'Université de Fribourg-en-Brisgau lui fit le plaisir de le nommer professeur honoraire. Malade et vieillissant, il trouvait un réconfort en l'amitié de ses collègues et particulièrement dans la vive sympathie que lui témoignait la famille de son collègue

Lüroth, mort aussi aujourd'hui. Même, à Fribourg, il reprit le goût d'enseigner. Il éprouvait une grande satisfaction de pouvoir, à un âge avancé, faire pénétrer des étudiants dans le domaine spécial de ses investigations. En 1908, il dut pourtant renoncer à ses cours, à cause des progrès que faisait l'affection dont il était atteint; ses forces déclinèrent de plus en plus; le soir du 16 juin, la mort vint le délivrer des suites d'une attaque d'apoplexie qui le frappa le 6 mars 1910.

Weingarten a publié un premier Mémoire *Sur la théorie du potentiel*, en 1855, étant encore étudiant. Disciple enthousiaste de Dirichlet, il était profondément absorbé par les recherches sur les forces agissant en raison inverse du carré de la distance, et donna une preuve éclatante de ses connaissances mathématiques en développant, d'une manière nouvelle et habile, un théorème connu de la théorie du potentiel. Rien alors ne révèle le futur géomètre éminent. Weingarten ne commença l'étude de la théorie des surfaces, ainsi qu'il s'ensuit de sa dissertation, qu'en 1857, mais, déjà quatre ans plus tard, il publie un Mémoire intitulé : *Sur une classe de surfaces applicables l'une sur l'autre*, qui le signale comme un maître en ce domaine de la science, maître fécond en idées et ayant trouvé des voies originales. Il prouve que toutes les surfaces, dont les rayons de courbure sont liés par une relation, ont des surfaces de centre de courbure qui sont applicables sur une surface de révolution déterminée par la relation des deux rayons de courbure. Le Mémoire que nous venons de citer eut pour suite, en 1863, le Traité *Sur les surfaces pour lesquelles un des deux rayons de courbure est fonction de l'autre*, ou, comme nous le disons maintenant, sur les surfaces de Weingarten ou les surfaces W. La détermination des surfaces W y est ramenée à une forme particulière de l'élément linéaire de la sphère. Ces deux Mémoires ont été le point de départ des travaux des meilleurs géomètres modernes; je ne citerai que Lie, Bianchi et Darboux.

Bianchi et Darboux, dans leurs Ouvrages classiques sur la théorie des surfaces, citent sans cesse les travaux de notre confrère décédé, et M. Darboux, dans sa conférence tenue à Rome, au quatrième Congrès international des Mathématiciens, a même déclaré que les deux principaux résultats ne dépareraient pas le grand Mémoire de Gauss.

De 1862 jusqu'à 1871, Weingarten s'occupa aussi de problèmes de Géodésie qui lui étaient proposés par le général Johann Jacob Baeyer, qui présidait à la mesure du méridien de l'Europe centrale. Après cette époque, les questions de théorie seules l'attirent. En 1877, il donne des critères simples et décisifs pour les familles de surfaces qui appartiennent à un système triple orthogonal. Et, en continuant cette étude, il trouve, en 1880, les conditions qui permettent les surfaces isostatiques. En 1882, il va compléter, quoique d'une manière pas tout à fait correcte, les recherches de Christoffel, qui classe les surfaces par rapport à la possibilité de déplacer leurs triangles géodésiques. Presque en même temps, et dans un Mémoire plus important sur les propriétés de l'élément linéaire des surfaces à courbure constante, il crée la théorie des invariants de déformation et s'en sert pour déterminer les lignes géodésiques des surfaces de courbure constante, en partant d'une forme donnée de leur élément linéaire, problème qui se montre lié étroitement à la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. En 1883, il publie une Note peu développée, mais pleine de résultats *Sur l'équation différentielle des surfaces dont les lignes de courbure les divisent en des carrés infiniment petits*. Cayley avait attiré l'attention des géomètres sur cette famille de surfaces, qu'il croyait difficile à déterminer; Weingarten la trouva d'une manière extrêmement simple, en ramenant le problème à l'intégration d'une équation différentielle partielle du quatrième ordre et linéaire par rapport aux dérivées de cet ordre. En même temps, il obtient les lignes de courbure de ces surfaces par des quadratures.

Un Mémoire étendu de Weingarten, datant de 1884, se trouve dans la *Festschrift* [1] de la *Technische Hochschule* de Berlin. Il traite encore une fois de la théorie des surfaces applicables, mais il a intercalé des réflexions profondes sur les transformations simultanées des formes linéaires et quadratiques pour élucider les recherches antérieures relatives à la théorie de la courbure des surfaces. En particulier, ceci nous éclaire sur l'origine de la Note mentionnée plus haut. Les années 1886 et 1887 sont vouées à des recherches minutieuses sur la déformation des surfaces. Il déve-

---

(1) Rapport solennel.

loppe d'abord, dans les Comptes rendus (*Sitzungsberichte*) de l'Académie de Berlin, les conditions pour qu'une surface admette des déformations infiniment petites sans dilatation qui transforment les lignes de courbure en lignes de courbure. Il donne ensuite dans le *Journal de Crelle* des démonstrations ingénieuses des théorèmes de Jellet sur les surfaces flexibles et inextensibles à courbure constamment positive ou constamment négative. En 1887, il découvre une nouvelle classe de surfaces applicables qui ne contient pas de surface de révolution. En même temps, il complète un travail de M. H.-A. Schwarz sur une famille remarquable de surfaces minima.

Weingarten a salué avec enthousiasme l'Ouvrage classique de M. Darboux sur la théorie des surfaces; il y a trouvé le germe de nouvelles recherches sur la déformation des surfaces et sur les surfaces applicables. Après quelques petites Notes, il expose en 1894, d'une manière complète, l'ensemble de ses résultats, dans un Ouvrage intitulé : *Sur la déformation des surfaces*. Cet Ouvrage, couronné par l'Académie des Sciences de Paris, lui valut le grand prix des Sciences mathématiques. Weingarten ramène le problème de la déformation à une équation aux dérivées partielles du second ordre du type des équations d'Ampère. C'est sur cette équation que repose la découverte de toutes les familles de surfaces applicables connues jusqu'alors. Enfin, dans le cas où l'on connaît une surface réelle, solution de cette équation, elle donne toutes les surfaces réelles applicables sur cette surface par des quadratures seules. L'Ouvrage couronné parut d'abord, en 1896, dans les *Acta mathematica*, et fut suivi de compléments qui parurent deux ans plus tard.

Peu de publications de Weingarten ont trait à la Physique mathématique. La Note de 1855, mentionnée plus haut, sur la théorie du potentiel est suivie peu de temps après d'une démonstration élémentaire de la formule qui donne la durée d'une oscillation du pendule simple. En 1864, un Mémoire de Roch attire son attention sur le mouvement de l'électricité dans les conducteurs. Dans les années qui suivent, ses travaux sur la théorie des surfaces absorbent son activité, mais ces travaux mêmes le poussent en 1890 à étudier les mouvements stationnaires des liquides homogènes et incompressibles, découverts par Helmholtz. Il publie, dans

les *Archiv der Mathematik und Physik*, une Communication sur la théorie des tourbillons et, en même temps, dans les *Comptes rendus de l'Académie dei Lincei*, une Note sur les surfaces discontinues des corps solides élastiques.

Weingarten continua ses travaux scientifiques jusqu'à deux ans avant sa mort, sa dernière Note *Sur la théorie des tourbillons* se trouve dans les *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* de l'année 1906. Il y attire l'attention des physiciens sur la pression hydrodynamique dans un tourbillon et dans son voisinage. Les recherches ingénieuses de Weingarten nous enseignent que cette pression surpassera chaque valeur négative dans l'intérieur et sur la surface d'anneaux infiniment minces, et qu'elle représente ainsi une traction infiniment grande.

L'œuvre de Weingarten ne s'oubliera pas. La Technische Hochschule de Berlin se souviendra toujours avec orgueil de son éminent professeur.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ergebnisse der Arbeiten des Samoa-Observatoriums der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. IV. Tetens, Otto, u. Frz. Linke, Das Klima v. Samoa. (Même Recueil. Neue Folge. VII. Bd. N° 4.) In-8, v-114 p. avec 7 fig. et 3 planches en couleurs. Berlin, Weidmann. 10 m.

Borel (E.). — *Éléments de la théorie des probabilités.* 2e édit. revue. In-8, viii-192 p. Paris, A. Hermann et fils. 6 fr.

Bricard (Raoul). — *Géométrie descriptive.* Avec 107 figures. Paris, O. Doin et fils. 5 fr.

Dalwigk (F. v.). — *Vorlesungen üb. darstellende Geometrie.* (In 2 Bdn.) 1. Bd : Die Methoden der Parallelprojektion. Gr. in-8, xvi-364 p. avec 184 fig. et 12 planches. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 13 m.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRICARD (RAOUL). — GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 1 volume in-18 jésus, cartonné toile, de 275 pages, avec 107 figures dans le texte. Paris, O. Doin et fils, 1911.

On trouvera dans ce Volume, malgré ses dimensions restreintes, un exposé assez complet des méthodes de la Géométrie descriptive. L'auteur a surtout insisté sur les principes généraux, en les illustrant par des exemples convenables. Il a laissé de côté l'examen des cas particuliers sans intérêt, les discussions plus longues qu'instructives. C'est ainsi, pour donner un seul exemple, qu'à propos de la construction d'un trièdre déterminé par trois de ses éléments, il s'est abstenu de rechercher les conditions de possibilité. Elles s'obtiennent beaucoup plus simplement par la Géométrie élémentaire, et il n'y a aucun profit à les retrouver sur l'épure. D'une manière générale, on a systématiquement éliminé tous les problèmes inventés en vue de conférer à la Géométrie descriptive une importance artificielle. La Géométrie descriptive n'est pas une science qui trouve en elle-même son propre but. Elle est uniquement un instrument de représentation au service de la Géométrie pure et des arts, et c'est en méconnaître le caractère que de la considérer autrement.

Les Chapitres I à VIII traitent des principes fondamentaux, de la droite et du plan, des polyèdres, des cônes et des cylindres, de la sphère, des surfaces de révolution, des surfaces du second ordre. Ce sont, en ajoutant la théorie des ombres et celle des projections cotées, les matières qui constituent le programme de notre enseignement secondaire (Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales).

On trouvera, dans le Chapitre IV, des procédés de construction des polyèdres réguliers, nouveaux ou du moins peu connus. Ils sont plus simples que les procédés généralement indiqués et sont immédiatement applicables à l'exécution de modèles solides.

Les Chapitres IX à XII sont relatifs aux surfaces réglées, aux problèmes qui font intervenir la courbure des surfaces, au tracé des ombres.

Les trois derniers Chapitres concernent les projections cotées et les surfaces topographiques, les projections (ou perspectives) axonométriques, et enfin les applications pratiques de la Géométrie descriptive. G. J.

DOUBLET (E.). — CORRESPONDANCE ÉCHANGÉE DE 1720 A 1739 ENTRE L'ASTRONOME J.-N. DELISLE ET M. DE NAVARRE. 1 volume in-16, 87 pages. Bordeaux, G. Gounouilhou, 1910.

M. E. Doublet est parvenu à trouver, à l'Observatoire de Paris et au Dépôt de la Marine, les instructives Lettres échangées, du 24 octobre 1720 au 1er septembre 1739, entre l'astronome Delisle et M. de Navarre, secrétaire perpétuel de l'Académie de Bordeaux. Celui-ci, voulant construire une Table du lever de la Lune pour Bordeaux, s'adressa à Delisle, son ancien maître, qui lui envoya, avec des exemples et des démonstrations, la manière de calculer les passages au méridien, les arcs semi-diurnes, les levers, les couchers des astres dans tous les cas. Notons que M. E. Doublet, dans son historique sur les manuscrits de Delisle, oublie de citer les cinq manuscrits qui se trouvent à la Bibliothèque Nationale (voir le Mémoire intitulé : *Sur un Manuscrit d'un cours de J.-N. Delisle au Collège Royal*, Paris, Delalain, 1902). Le monde savant saura gré à M. Doublet d'avoir publié cette *Correspondance*, qui contient de précises indications pour l'Astronomie pratique, d'utiles conseils pour la rédaction d'un traité d'Astronomie et plusieurs passages que les historiens des Sciences liront avec intérêt.

ÉR. L.

EIBE (THYRA) og MEYER (KIRSTINE) (F. BJERRUM). — OLE RÖMERS ADVERSARIA. *med understottelse af Carlsbergfondet udgivne af det kgl. danske videnskabernes Selskab.* 1 volume in-8 jésus, 7 + 271 pages. Köbenhavn, Bianco Lunos Bogtrykkeri, 1910.

Le titre seul de cet Ouvrage est en danois. La préface, signée par Thyra Eibe et Kirstine Meyer, ainsi que le texte des *Adversaria*, écrit par Rœmer, sont en latin : la Table des Matières et la Table analytique sont en français : les *Adversaria* peuvent donc être aisément lus. Ce Livre, imprimé avec luxe, est « publié par l'Académie royale des Sciences de Copenhague avec une subvention de la fondation Carlsberg ». Thyra Eibe et Kirstine Meyer ont le grand mérite d'avoir apporté tous leurs soins à présenter une édition entièrement conforme au manuscrit de Rœmer, ce qui offrait des difficultés sérieuses, car, d'après la table des matières de ce manuscrit, reproduite en fac-simile, on reconnaît qu'il fut souvent pénible de lire l'écriture de Rœmer. Les figures faites par Rœmer ont été reproduites telles que lui-même les avait dessinées. Le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. G. Darboux (2e série, t. XXXIV, 1re partie, mars 1910, p. 73) contient un important article où Mme Kirstine Meyer, née Bjerrum, démontre que Rœmer, avant Fahrenheit, avait résolu le problème des thermomètres à indication indépendante de la pression de l'atmosphère, et que c'est à lui que Fahrenheit fut redevable de sa méthode. Elle annonce qu'elle a trouvé les éléments de ses assertions dans un manuscrit in-folio écrit par Rœmer et intitulé *Adversaria Rœmeri, uti vocabat*, que la veuve de Rœmer avait déposé, en octobre 1739, à la Bibliothèque de l'Université de Copenhague. Grâce à l'idée que suggéra Mme Kirstine Meyer de faire imprimer ce manuscrit, toutes les personnes qui s'intéressent à l'histoire des Sciences peuvent maintenant consulter, sans se déranger, les nombreux et intéressants sujets abordés ou développés dans les *Adversaria*. Espérant que les lecteurs de ce compte rendu pourront être portés à voir dans l'écrit même de Rœmer les questions qui se rapportent à leurs études favorites, nous allons indiquer les principales matières contenues dans les *Adversaria*.

Relativement à l'*Astronomie*, on trouve des tableaux des longitudes, de l'azimut et des hauteurs du Soleil d'après La Hire et Kepler; des tableaux pour les diamètres apparents et l'ascension droite du Soleil, pour les taches de cet astre, pour les vitesses et les orbites de ces taches; l'observation de l'éclipse de Soleil du 14 septembre 1708; des explications concernant le mouvement de la lumière; des nombres et des réflexions se rapportant aux planètes et aux étoiles; l'étude d'instruments d'observation, le calcul de l'Epacte et de la date de Pâques; des indications sur le croquis et sur les incorrections des Cartes géographiques.

Relativement à la *Physique*, Rœmer s'occupe de la longueur du pendule à seconde, des modifications que la température fait subir à cette longueur, de la balance romaine; il donne le tableau des quantités d'eau de pluie à Paris de 1689 à 1704; il expose en détail la construction du thermomètre; il s'occupe de la réfraction de la lumière en général et dans les lentilles.

Relativement aux *Mathématiques*, on trouve dans les *Adversaria* la solution d'équations du second degré, d'équations bicarrées, de problèmes de géométrie; la formule de Cardan. Rœmer fait l'étude d'une figure qu'il appelle *dodécangle* et cherche à montrer que le monde fini a la forme d'un dodécangle.

En outre, les *Adversaria* contiennent des considérations sur les poids et mesures, sur les monnaies, sur des machines hydrauliques, sur l'écriture chiffrée; des réflexions sur les loteries; des règles de formation de carrés magiques.

Les matières contenues dans l'important travail dont nous venons de parler brièvement ne sont pas rangées comme nous l'avons fait, mais dispersées çà et là, ce qui rend tout à fait précieuse la Table analytique si bien faite par Thyra Eibe et Kirstine Meyer.

Er. L.

JACOB (L.). — Le Calcul mécanique. *Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs.* (Encyclopédie scientifique, publiée sous la direction du Dr *Toulouse. — Bibliothèque de Mathématiques appliquées ;* Directeur : M. *d'Ocagne.*) 1 volume in-18 jésus, XVI-412 pages, 184 figures dans le texte. Paris, Octave Doin et fils, 1911.

Le calcul prenant de jour en jour une importance plus considérable, les méthodes destinées à simplifier les calculs, à les rendre plus rapides et à écarter les chances d'erreurs sont de plus en plus en faveur. Dans son Ouvrage intitulé *Le Calcul mécanique*, M. L. Jacob explique le mécanisme et expose la théorie des machines servant à effectuer des opérations de l'Arithmétique et de l'Algèbre élémentaires, du Calcul différentiel et du Calcul intégral. On doit à M. d'Ocagne une classification méthodique et une description d'ensemble des procédés mécaniques de calcul ; cette classification a été exposée par cet auteur dans un Livre intitulé *Calcul simplifié* et dans un Article de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* : M. L. Jacob, qui a adopté cette classification, fait de nombreux emprunts à ces deux écrits de M. d'Ocagne.

Les appareils réalisés par les constructeurs des machines à calcul peuvent se diviser en un certain nombre de groupes : ce sont ces groupes qui forment les nombreuses subdivisions du Livre publié par M. L. Jacob. Nous ne croyons pas devoir faire l'énumération de ces groupes ; il suffit, nous semble-t-il, pour montrer l'importance et l'utilité du travail de M. L. Jacob, de faire remarquer qu'il donne la description et la théorie des machines pouvant faire : 1° les quatre règles de l'Arithmétique et même l'extraction des racines ; 2° la recherche des racines d'une équation ou de plusieurs équations simultanées ; 3° des opérations de différentiation et surtout d'intégration.

Les descriptions et les démonstrations sont claires, malgré leur concision, surtout pour les personnes connaissant les Mathématiques. Mais il est regrettable que les figures un peu compliquées manquent de netteté, parce qu'elles sont trop petites ; il est à désirer que la prochaine édition contienne des figures plus grandes, où il soit moins pénible de suivre les explications du texte.

Er. L.

BARBETTE (E.). — Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance. 1 volume in-4, XII-154 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

L'Ouvrage dont nous avons à rendre compte n'emprunte rien aux théories les plus élevées de l'Analyse et de la Théorie des nombres. C'est par des procédés élémentaires, et souvent ingénieux, que l'auteur est parvenu à certaines identités, qui intéresseront certainement les amateurs d'Arithmétique supérieure. En s'interdisant ainsi d'employer des méthodes peu connues du plus grand nombre, M. Barbette s'est assuré l'avantage, qui n'est pas méprisable, de demeurer accessible et de rester à la portée de tous.

Une introduction d'une dizaine de pages contient des démonstrations ingénieuses de certaines relations entre les sommes de puissances semblables des nombres naturels. Elle se termine par une Table des puissances successives et des sommes des puissances successives des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 30.

La Partie I a pour titre : *Les sommes de nombres distincts égales à un nombre*. Elle traite de la forme générale des nombres composés; de la décomposition des nombres en facteurs, des méthodes par soustraction, par division, par extraction de racines.

La Partie II traite des *sommes de carrés distincts égales à un carré*. Elle contient un grand nombre d'identités curieuses obtenues par les moyens les plus simples.

La Partie III a pour objet *les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance* pour $p > 2$. Après avoir étudié le cas général, M. Barbette envisage plus spécialement les hypothèses $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$. Citons par exemple l'identité

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 9^3 + 11^3 + 12^3$$

La Partie IV traite *des nombres polygonaux de n côtés*. On y trouve la définition de ces nombres; la somme des puissances semblables des x premiers nombres polygonaux de n côtés, enfin l'étude dans les cas les plus simples du problème qui consiste à rechercher les sommes de deux nombres polygonaux de n côtés égales à un nombre polygonal de n côtés.

L'Ouvrage se termine par une annexe contenant la Table des 5000 premiers nombres triangulaires et la Table des nombres premiers compris entre 1 et 10000.

J. G.

ARCHIMEDIS OPERA OMNIA CUM COMMENTARIIS EUTOCII ITERUM EDIDIT *J. L. Heiberg*. Tome I, 2e édition, in-12, XI-445 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1910.

M. J. L. Heiberg a publié en 1860 et en 1861 la première édition des *Œuvres d'Archimède*. Depuis longtemps, il avait l'intention de refondre cette édition, d'abord, parce qu'il avait rencontré un secours nouveau pour son examen critique dans l'interprétation de Guillaume de Moerbeka trouvée par Valentin Rose (*Deutsche Litteraturzeitung*, 1884, p. 210 et suiv.), puis parce que, son jugement ayant mûri, il pensait pouvoir corriger les défauts d'un travail de jeunesse. C'est pourquoi, d'accord avec son éditeur, il alla à Rome, à Venise, à Milan et à Paris, pendant les années 1903 et 1904, pour examiner l'interprétation de Guillaume et pour recueillir d'autres renseignements. Il fut alors informé par Hermann Schoene de l'existence du manuscrit de Jérusalem coté 355 (*voir* Papadopoulos Kerameus, Bibliothèque de Jérusalem, IV, p. 329). D'après les fragments reproduits dans le catalogue, il jugea que ce manuscrit se rapportait à Archimède, et, pendant l'été de 1906, il se rendit à Constantinople pour en faire l'examen. Alors, à son grand étonnement, il reconnut que ce manuscrit présentait, non seulement des parties importantes des livres sur la sphère et le cylindre, sur la mesure du cercle, sur les spirales, sur l'équivalence des surfaces planes, mais encore des textes nouveaux (*voir* Hermes, XLII, p. 238). D'où il résultait qu'une nouvelle édition des Œuvres d'Archimède devenait absolument nécessaire. Les textes nouveaux seront publiés dans le second Volume.

M. J. L. Heiberg a fait du texte grec d'Archimède, qu'il donne, une interprétation latine, qu'il place en regard du texte grec. Il s'est attaché à rendre très claire chaque phrase de son travail entièrement personnel, et à respecter le style d'Archimède et la

forme de ses démonstrations, en remplaçant toutefois certains mots par les signes usités en Mathématiques. Dans des notes au bas des pages de l'interprétation, il a suppléé à ce qui lui paraissait omis dans le texte grec et donné plus de précision aux expressions obscures. Dans les livres sur la sphère et le cylindre, sur la mesure du cercle, les notes de M. J. L. Heiberg indiquent tout ce qui peut être supposé appartenir au texte primitif d'Archimède ; il lui a paru nécessaire d'agir ainsi, parce que ces livres, non seulement ont été dépouillés de leur caractère de dialecte dorique, mais encore, en plusieurs endroits, ont été modifiés par le transcripteur, qui avait ajouté ce qui lui semblait nécessaire ou omis ce qui lui paraissait inutile, qui avait introduit les noms et les expressions scientifiques usités à son époque. En outre, M. J. L. Heiberg a enfermé entre crochets, au cours du texte grec, de nombreuses additions à ce texte; et il a expliqué dans ses notes les raisons qui lui faisaient croire que certains passages avaient été supprimés postérieurement à l'époque où vivait Archimède.

Dans sa Préface, M. J. L. Heiberg, aux précédentes explications, en joint beaucoup d'autres qui montrent avec quelle conscience, quelle érudition et quel soin il a fait le travail difficile et délicat qu'il avait entrepris. Aussi doit-on considérer sa publication comme étant la meilleure et la plus complète.

Ce premier Volume contient les matières suivantes :

De Sphaera et Cylindro. Libri II (p. 1-229).

Dimensio Circuli (p. 231-243).

De Conoidibus et Sphaeroidibus (p. 245-445).

P. D. et Er. L.

LORIA (Gino), ord. Professor an der Universität Genua. — Spezielle ebene Kurven, deutsche Ausgabe von *F. Schutte*. 2. Auflage, 2. Band : die Transcendenten und die abgeleiteten Kurven. 1 volume in-8 de 184 pages. Leipzig et Berlin, Teubner, 1911.

La première édition de cet Ouvrage a été analysée dans le *Bulletin* (1902). J. Tannery a dit alors qu'il fallait être reconnaissant à M. Gino Loria de cette œuvre dont l'utilité est évidente et dont

l'exécution a été si soignée et si heureusement réussie. Je vais essayer de donner une idée de la variété des questions qui ont été traitées dans le second Volume, en m'excusant à l'avance de ne donner qu'une sorte de catalogue assez long et qui, pourtant, ne peut être complet.

La *quadratrice*, employée par Dinostrate pour la quadrature du cercle, a pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = a\frac{\omega}{\sin\omega} \qquad (a \text{ constant}).$$

C'est un cas particulier d'une courbe considérée par Chasles, perspective d'une section plane d'un hélicoïde gauche, le point de vue étant pris sur la section et le plan du tableau un plan directeur. La courbe inverse

$$\rho = \frac{1}{a}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

est la perspective d'une hélice circulaire.

La *courbe de Cornu* est définie par son équation naturelle (relation entre l'arc s et le rayon de courbure R)

$$\mathrm{R}s = a^2 \qquad (a \text{ constant});$$

on en déduit la représentation

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \qquad y = a\sqrt{\pi}\int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \qquad s = a\sqrt{\pi}v.$$

La *cycloïde* (commune, allongée ou raccourcie) trouve comme généralisation la cycloïde de Fermat

$$x = ka(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Les épicycloïdes, les hypocycloïdes ont comme généralisation les *pseudo-cycloïdes*, courbes réelles qu'on obtient en remplaçant, dans les formules donnant la représentation paramétrique de l'hypocycloïde, les constantes réelles par des imaginaires convenablement choisies.

Alors que l'équation naturelle des épicycloïdes (et des hypocycloïdes) était de la forme

$$\frac{\mathrm{R}^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1,$$

celle des pseudo-cycloïdes est de la forme

$$\frac{R^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a \text{ et } b \text{ constants}).$$

Comme on le pense bien, les propriétés classiques de ces courbes sont exposées et démontrées le plus simplement possible.

La *courbe de Delaunay* s'obtient en faisant rouler sans glissement une ellipse sur une droite Δ et en considérant le lieu d'un foyer de cette ellipse. La surface de révolution engendrée par la rotation de cette courbe autour de Δ a une courbure moyenne constante.

Si l'on remplace l'ellipse par une parabole, le lieu du foyer est une chaînette et la surface de révolution correspondante est une surface minima.

La *courbe de Sturm* est le lieu du centre d'une ellipse roulant sur une droite.

Les problèmes inverses conduisent à des résultats intéressants : la courbe sur laquelle une ellipse doit rouler pour que son centre décrive une droite a pour équation

$$y = a \operatorname{dn}\left(\frac{x}{b}\right) \qquad (a \text{ et } b \text{ constants}),$$

la courbe correspondante pour l'hyperbole est

$$\frac{a}{y} = \operatorname{cn}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

On peut rapprocher de ces courbes celle qui donne la forme d'une corde à sauter

$$y = b \operatorname{sn}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (a, b \text{ constants}),$$

sn, cn, dn désignant les fonctions elliptiques avec la notation de Jacobi.

La plupart des courbes qui suivent s'obtiennent par des quadratures ou en intégrant une équation différentielle.

On appelle *courbes syntrépentes* (σύν, τρέπειν, tourner) deux courbes (C) et (C') telles qu'on peut les faire tourner autour de points fixes O et O', sans qu'elles cessent de rester en contact et sans qu'elles glissent l'une sur l'autre. La courbe (C) étant donnée, ainsi que

les points O et O', la courbe (C') s'obtient par une quadrature. Si (C) est une ellipse, O l'un de ses foyers, O' un point fixe tel que OO' est égale au grand axe de l'ellipse donnée, on trouve pour (C') une ellipse de foyer O', égale à (C). La vérification géométrique est simple; cette propriété et d'autres analogues permettent de transformer un mouvement de rotation uniforme en un mouvement de rotation varié.

Les *courbes* étudiées par *Ribaucour* dans ses recherches sur les surfaces minima peuvent être définies par l'équation différentielle

$$yy' = n(1 - y^2) \quad (n \text{ constant}),$$

ou par les formules

$$r = (m-1)a \int^{\varphi} \sin^{m-1}\varphi \, d\varphi, \qquad y = a \sin^{m-1}\varphi \qquad (a \text{ et } m \text{ constants}).$$

Le rayon de courbure a pour expression

$$R = (m-1)a \sin^{m}\varphi.$$

On appelle ici *courbe d'Euler* une courbe définie par une relation entre le rayon de courbure R et le rayon vecteur ρ,

$$R = f(\rho).$$

Son équation en coordonnées polaires est

$$\omega = \int \frac{p\, d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - p^2}}, \qquad p = \rho^2 \frac{d\omega}{ds},$$

p désignant la distance du pôle à la tangente.

Pour $R = \rho$, on trouve une développante de développante de cercle (spirale de Sturm).

Les *lignes de Sumner* sont les projections, sur la carte de Mercator, de petits cercles de la sphère [1]. On montre aisément que, si l'on note au même instant l'heure du chronomètre et la hauteur du Soleil, le lieu de l'observation est sur un petit cercle déterminé de la sphère; deux observations de cette sorte permettent de trouver la position du navire.

---

[1] Voir GREENHILL, *Fonctions elliptiques et applications*, p. [illegible].

L'équation d'une ligne de Sumner peut être ramenée à l'une des formes

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} \eta &= m \cos \xi \\ \operatorname{sh} \eta &= n \sin \xi \\ \eta &= \log \cos \xi \end{aligned}\right\} \qquad (m, n, \varepsilon \text{ constants}),$$

ξ et η étant les coordonnées de la projection d'un point du petit cercle de la sphère.

Après les propriétés classiques et les applications de la *chaînette* viennent différentes généralisations de cette courbe. L'équation naturelle de la chaînette étant

$$R = \frac{s^2}{a} + a \qquad (a \text{ constant}),$$

les équations

$$(R = a^2 + s^2), \qquad R = a \qquad \frac{s^2}{b} \qquad (a, b, c \text{ constants})$$

définissent *l'alysseïde* et la *pseudo-chaînette;* les lignes

$$y = pe^{\frac{x}{a}} + qe^{-\frac{x}{a}}$$

se rencontrent en Mécanique ; *la chaînette d'égale résistance* a pour équation naturelle

$$R = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

La *tractrice*, courbe aux tangentes égales, est une développante de chaînette.

Les équations

$$n = a \cos \varphi + a \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}, \qquad z = \frac{am}{\sqrt{m^2 - \varepsilon^2}} \sin \varphi,$$

où a et m sont constants et où $\varepsilon = 0$, 1 ou -1, représentent une tractrice (commune, allongée ou raccourcie). Les surfaces engendrées par ces courbes tournant autour de leur asymptote servent de types [1] dans l'étude des surfaces à courbure totale négative.

---

[1] *Voir* DARBOUX, *Géométrie*, t. III, p. [illegible] et suiv.).

La *pseudo-tractrice* se définit par l'équation naturelle

$$R^2 + b^2 = b^2 e^{\frac{2s}{a}} \qquad (a \text{ et } b \text{ constants}),$$

qui, pour $b = a$, représente une tractrice commune.

La *courbe élastique* est la figure d'équilibre d'une verge élastique homogène, primitivement droite, à laquelle on donne la forme d'une courbe plane, en appliquant à ses extrémités des forces égales et opposées. Elle peut être définie par l'équation

$$\frac{c^2}{R} = a - x,$$

a et c désignant des constantes et R le rayon de courbure. Dans le cas général son étude dépend des fonctions elliptiques, pour $a = 0$ c'est une courbe de Ribaucour.

Après des indications générales sur *l'herpolhodie* et l'herpolhodographe, on signale le cas particulier

$$\rho\left(e^{\frac{n\omega}{a}} - e^{-\frac{n\omega}{a}}\right) = n.$$

Cette courbe appelée *spirale de Poinsot* se présente aussi comme projection, sur l'équateur, d'une loxodromie.

D'autres exemples sont empruntés à la Physique ; des indications sont données sur des courbes *extraordinaires*, comme celle de Peano qui remplit tout l'intérieur d'un carré

Un Chapitre est consacré à des courbes de Lie, trajectoires pour un groupe continu de transformation ; un autre à des courbes dont l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0$$

est entière en x, y, y' ; on s'approche ici de théories très étendues et l'on a dû nécessairement se limiter.

Parmi les courbes *déduites*, je citerai les développées, développantes et leur généralisation, les courbes parallèles, les radiales, les caustiques par réflexion et par réfraction, les podaires, les antipodaires, les courbes isoptiques, les courbes *équidistantes* de deux courbes données, les courbes *diamétrales*, la courbe *fibre-moyenne*.

Outre une Table méthodique par chapitres, une Table de noms

d'auteurs, une Table de noms de choses (Sachregister), une Table renvoyant des figures à la partie correspondante du texte rendent les recherches très faciles.

La Table (Sachregister) a plus de cinq pages de trois colonnes.

E. Lacour.

MELANGES.

RELATIONS ENTRE LES PARAMÈTRES CAYLÉENS DE TROIS SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES DONT L'UNE EST ÉGALE AU PRODUIT DES DEUX AUTRES;

Par M. B. ÉLIE.

Le problème à résoudre est le suivant : si $e_{ik} = -e_{ki}$, $e_{ii} = 0$ sont les $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres par lesquels s'expriment les n^2 éléments d'une substitution orthogonale R et si trois telles substitutions vérifient : $R'' = RR'$, on demande d'exprimer les e'' de l'une en fonction des $e e'$ des deux autres.

J'ai utilisé les notations symboliques des substitutions linéaires comme apportant une grande simplification et surtout comme un exemple de l'emploi qu'on en peut faire.

Dans le premier paragraphe, j'exprime pour toute valeur de n la substitution T'' d'éléments e'' en fonction de T, T', des puissances de (TT') et des sous-déterminants diagonaux de |T| et |T'|. Dans le second paragraphe j'évalue, dans les cas de $n = 2$, 3, 4, 5 et 6, les e'' en fonction des e, e' et des sous-déterminants diagonaux de | T | et | T |.

I. — *La substitution* T'' *exprimée en fonction des* T', T *et* (TT').

1. *Notations. Formule :* $E'' = \omega E' \overline{\wedge} E$. — Soient : T une substitution alterne :

$$e_{ik} = -e_{ki}, \quad e_{ii} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ses éléments; U la substitution unité, destinée à rendre les équations homogènes et dont les éléments non nuls sont ceux de la diagonale de sa matrice tous égaux à l'unité; ω une constante arbitraire; E une substitution définie par

$$E = \omega U + T = \begin{vmatrix} \omega & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & \omega & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & \dots & \dots & \omega \end{vmatrix};$$

$|T|$ et $|E|$ les déterminants des substitutions T et E; T^* et E^* les substitutions transposées de T et E résultant du renversement par rapport à la diagonale des éléments des matrices de T et E, et par suite

$$T^* = T, \qquad (TT')^* = T^* T^*;$$

ε_{lk} le mineur correspondant à l'élément e_{lk} dans $|E|$ divisé par ces déterminants; $\overline{T}$, $\overline{E}$ les substitutions inverses de T et E, c'est-à-dire dont les éléments sont les ε_{kl}; R une substitution orthogonale; r_{lk} ses éléments. D'après Cayley, on a entre les éléments r et les $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres e les relations

$$r_{ll} = 2\omega\varepsilon_{ll} - 1, \qquad r_{lk} = 2\omega\varepsilon_{lk}.$$

Elles expriment l'égalité des éléments homologues des deux membres de l'égalité entre substitutions

$$R = 2\omega\overline{E} - U.$$

Considérons deux autres systèmes de substitutions du même type que celles définies antérieurement, en les distinguant par un ou deux accents, et supposons vérifiée la relation

$$R'' = RR'.$$

Utilisons la valeur de R précédemment écrite, effectuons le produit, isolons $\overline{E''}$ et nous avons

$$\omega\overline{E''} = 2\omega^2 E\overline{E'} - \omega E'U - \omega\overline{E}U - U^2;$$

puis multipliant la gauche de chaque terme par E, la droite

par E′, il vient

$$\begin{aligned}\omega E E' E' &= \omega^2 U^2 + \omega E U - \omega E' U + E E' \\ &= (E - \omega U)(E + \omega U) - \omega^2 U^2 \\ &= \omega^2 U + T T' \quad \text{soit} \quad = A.\end{aligned}$$

En posant

$$TT' = B,$$

les éléments de B sont

$$b_{ij} = \sum_{l} e_{il} e_{jl},$$

et la matrice de A est

$$\begin{vmatrix} \omega^2 + b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \omega^2 + b_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \dots & \omega^2 + b_{nn} \end{vmatrix}.$$

On a ensuite en multipliant par $\overline{E}$ et $\overline{E'}$

$$\omega \overline{E''} = \overline{E} A \overline{E'}$$

et en prenant les inverses des deux membres

$$\omega^{-1} E'' = E' \overline{A} E.$$

On obtiendra les e'' en fonction des e, e' en égalant les éléments homologues des deux membres de cette égalité; mais il faut au préalable transformer $\overline{A}$ en une fonction entière des T et T′ et dans cette fonction va se présenter un facteur algébrique qu'il y aura lieu de supprimer.

2. *Transformation de* $\overline{A}$: *formules :*

$$|A| = \omega^2 \quad \text{ou} \quad \omega^2 G^2; \qquad D = \omega \overline{A} \quad \text{ou} \quad G = \omega^2 G \overline{A}$$

Pour opérer cette transformation, remarquons que les éléments de la substitution inverse $\overline{A} (= \overline{\omega^2 U + TT'})$ sont, abstraction faite du dénominateur $|A|$, les mineurs de $|A|$. Ces mineurs développés suivant les puissances de ω^2 sont des polynomes au plus de degré $n - 1$ en ω^2, de telle sorte que par un arrangement convenable des termes la quantité $|A|\overline{A}$ peut être égalée à une somme P de substitutions B_i multipliées par les diverses puissances de ω^2.

On aura donc, pour toute valeur de ω^2,

$$|A|\overline{A} = B_1(\omega^2)^{n-1} + \ldots + B_i(\omega^2)^{n-i} + \ldots + B_n = P;$$

d'où

$$|A|U = AP = (\omega^2 U + B)P,$$

en rappelant que U multiplié par la quantité algébrique $|A|$ représente une substitution dont les éléments diagonaux sont les seuls différents de zéro et tous égaux à cette quantité.

Pour déterminer les substitutions B_i, on identifiera les coefficients des puissances de ω^2 dans les deux membres de la dernière égalité après avoir développé le déterminant $|A|$ suivant les puissances de ω^2.

Or on sait que, si l'on représente par s_i la somme de tous les sous-déterminants de degré i de $|TT'|$, somme égale à la somme de tous les sous-déterminants de même degré de $|T|$ par leurs homologues de $|T'|$, on a

$$|A| = |\omega^2 + TT'| = (\omega^2)^n + s_1(\omega^2)^{n-1} + \ldots + s_i(\omega^2)^{n-i} + \ldots + s_n.$$

L'identification indiquée conduit aux $n+1$ égalités

$$B_1 = U, \quad B_2 = BB_1 = s_1 U, \quad \ldots, \quad B_i + BB_{i-1} = s_{i-1} U, \quad \ldots, \quad BB_n = s_n U.$$

On en déduit de proche en proche les B_i dont l'expression générale est

$$B_i = s_{i-1} U - s_{i-2} B + s_{i-3} B^2 \pm \ldots \pm B^{i-1}$$

en prenant les signes + ou — suivant que i est impair ou pair.

Par ces valeurs des B_i, P peut s'écrire

$$\begin{aligned} P = & \quad [(\omega^2)^{n-1} + s_1(\omega^2)^{n-2} + \ldots + s_{n-1}]U \\ & + [(\omega^2)^{n-2} + s_1(\omega^2)^{n-3} + \ldots + s_{n-2}]B + \ldots \\ & + (\omega^2 + s_1)B^{n-2} \pm B^{n-1}. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que l'égalité $BB_n = s_n U$ est vérifiée identiquement lorsqu'on y remplace B_n par sa valeur exprimée en fonction des B_i d'indices i inférieurs à n.

Quel que soit n on a

$$s_n = |B| = |T|\,|T'|$$

et si n est impair $s_n = 0$; dans ce cas, $|A|$ contient le facteur ω^2 et

il en est alors de même de la substitution P; autrement dit, on a $B_n = 0$.

Transportons la valeur $\overline{A} = \frac{P}{|A|}$ dans l'égalité

$$E = \omega E \overline{A} E,$$

elle devient

$$|A| E = \omega E' P E.$$

Il reste à établir que cette dernière contient un facteur commun à ses deux membres et à le supprimer.

Dans ce but démontrons que $|A|$ est un carré $\mathfrak{D}^2$ ou le produit de ω^2 par un carré $\mathfrak{G}^2$ suivant que n est pair ou non. Les majuscules $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{G}$ représentant des polynomes algébriques du degré n ou $n-1$ en ω^2.

Supposons, en effet, pour un instant, que T et T' soient des substitutions générales quelconques et que, par suite, les racines (ω^2) de l'équation caractéristique $|\omega^2 + TT'| = 0$ diffèrent entre elles. Soit

$$f(e_{lk}, e'_{lk}, e_{kl}, e'_{kl}) = \omega^2$$

l'une d'elles avec $e_{lk} \neq e_{kl}$, $e'_{lk} \neq e'_{kl}$; la fonction f pouvant contenir tous les éléments de T et T'. Rappelons d'ailleurs que dans le développement de $|\omega^2 + TT'|$ n'entrent que les sous-déterminants diagonaux de TT' ou encore qu'une substitution TT' et sa transposée $T^*T'^*$ ont mêmes racines caractéristiques. Il en résulte qu'à la racine ω^2 en correspond une autre qu'on obtient en permutant les indices l et k dans la fonction f. Si T et T' sont symétriques ou alternes, ces fonctions sont identiques et représentent une racine double de $|A| = 0$ et par suite $|A|$ est un carré, soit $\mathfrak{D}^2$, soit $\omega^2\mathfrak{G}^2$.

Mais alors les éléments de la substitution inverse $\overline{A}$ qu'on sait être formés avec les mineurs de $|A|$ devront contenir $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{G}$ en facteur, mais non ω^2 qui n'est pas une racine double en général. Il en sera donc de même de la substitution P d'après sa définition au début de ce numéro : $P = \frac{\overline{A}}{|A|}$. Soit D (ou G) ce que devient la substitution P lorsqu'on y aura supprimé le facteur $\mathfrak{D}$ (ou $\mathfrak{G}$), on aura alors

$$A = \frac{P}{\omega^2} = \frac{D}{\mathfrak{D}} \qquad \left(\text{ou } \overline{A} = \frac{P}{\omega^2\mathfrak{G}} = \frac{G}{\omega^2\mathfrak{G}}\right).$$

d'où

$$\mathfrak{D}U = AD \qquad \text{et} \qquad \omega^2 \mathfrak{G} U = AG.$$

3. *Formule définitive : T'' exprimé en TT' et $(TT')^t$.* — Si l'on substitue ces valeurs de $\overline{A}$ dans la formule primitive du paragraphe 1, $E'' = \omega E' \overline{A} E$, on obtient les suivantes :

$$\mathfrak{D} E'' = \omega E' D E \quad (n \text{ pair}), \qquad \omega \mathfrak{G} E'' = E' G E \quad (n \text{ impair}).$$

Les polynomes algébriques $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{G}$ ainsi que les substitutions D et G doivent maintenant être exprimés en fonction des substitutions T, T' et des sous-déterminants diagonaux de $|T|$, $|T'|$ et $|TT'|$. En vue des applications qui seront faites ultérieurement, je vais développer ce calcul d'une façon très explicite.

Les polynomes $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{G}$ (les $n^{\text{ièmes}}$ diviseurs élémentaires de la substitution TT') s'obtiennent immédiatement en posant

$$\mathfrak{D} = \omega^n + \sigma_1 \omega^{n-2} + \ldots + \sigma_{\frac{n}{2}-1} \omega^2 + \sigma_{\frac{n}{2}},$$

$$\mathfrak{G} = \omega^{n-1} + \sigma_1 \omega^{n-3} + \ldots + \sigma_{\frac{n-1}{2}} \omega^2 + \sigma_{\frac{n-1}{2}},$$

et en identifiant les deux membres des égalités

$$|A| = |\omega^2 + TT'| = \mathfrak{D}^2, \qquad |\omega^2 + TT'| = \omega^2 \mathfrak{G}^2.$$

En utilisant le développement de $|A|$ du paragraphe 2, on a dans les deux cas

$$2\sigma_1 = s_1, \qquad 2\sigma_2 = s_2 - \sigma_1^2, \qquad 2\sigma_3 = s_3 - 2\sigma_2\sigma_1,$$
$$2\sigma_4 = s_4 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_2^2, \qquad \ldots, \qquad \sigma_{\frac{n}{2}}^2 = s_n,$$

la dernière égalité devant être remplacée par

$$\sigma_{\frac{n-1}{2}}^2 = s_{n-1},$$

lorsque n est impair.

Quant aux substitutions D et G, elles peuvent être mises sous la forme d'une somme des puissances de $B(=TT')$ dont on détermine les coefficients algébriques δ et γ en posant

$$D = \omega^{n-2} U + M_2 \omega^{n-4} + \ldots + M_{\frac{n}{2}}, \qquad G = \omega^{n-1} + N_2 \omega^{n-3} + \ldots + N_{\frac{n-1}{2}},$$

et en identifiant les deux membres des deux dernières égalités du

paragraphe précédent. On obtiendra ainsi

$$M_1 = U, \qquad M_2 + BM_1 = \sigma_1 U, \qquad \ldots,$$
$$M_{\frac{n}{2}} + BM_{\frac{n}{2}-1} = \sigma_{\frac{n}{2}-1} U, \qquad BM_{\frac{n}{2}} = \sigma_{\frac{n}{2}} U;$$

$$N_1 = U, \qquad N_2 + BN_1 = \sigma_1 U, \qquad \ldots,$$
$$N_{\frac{n}{2}+1} + BN_{\frac{n-1}{2}} = \sigma_{\frac{n}{2}} U, \qquad BN_{\frac{n+1}{2}} = \sigma_{\frac{n}{2}+1} U;$$

les dernières de ces formules étant identiquement vérifiées.

L'expression générale de M (ou N) est, par suite,

$$M_i \text{ (ou } N_i) = \sigma_{i-1} U + \sigma_{i-2} B + \sigma_{i-3} B^2 + \ldots + B^{i-1},$$

i variant de 1 à $\frac{n}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{n+1}{2}\right)$.

Par ces valeurs, on a

$$D = \delta_1 U + \delta_2 B + \delta_3 B^2 + \ldots + \delta_{\frac{n}{2}-1} B^{\frac{n}{2}-1},$$

en posant

$$\delta_1 = \omega^{\frac{n}{2}-1} + \sigma_1 \omega^{\frac{n}{2}-2} + \sigma_2 \omega^{\frac{n}{2}-3} + \ldots + \sigma_{\frac{n}{2}-2} \omega^2 + \sigma_{\frac{n}{2}-1},$$
$$\delta_2 = \omega^{\frac{n}{2}-2} + \sigma_1 \omega^{\frac{n}{2}-3} + \ldots + \sigma_{\frac{n}{2}-3} \omega^2 + \sigma_{\frac{n}{2}-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_n = \qquad + \sigma_1 \omega^2 + \sigma_0 (= 1),$$
$$\delta_{\frac{n}{2}-1} = \qquad + \sigma_0;$$

et

$$G = \gamma_1 U + \gamma_2 B + \gamma_3 B^2 + \ldots + \gamma_{\frac{n+1}{2}} B^{\frac{n-1}{2}},$$

en posant

$$\gamma_1 = \omega^{\frac{n}{2}-1} + \sigma_1 \omega^{\frac{n}{2}-2} + \sigma_2 \omega^{\frac{n}{2}-3} + \ldots + \sigma_{\frac{n}{2}-3} \omega^2 + \sigma_{\frac{n}{2}-2},$$
$$\gamma_2 = \omega^{\frac{n}{2}-2} + \sigma_1 \omega^{\frac{n}{2}-3} + \ldots + \sigma_{\frac{n}{2}-4} \omega^2 + \sigma_{\frac{n}{2}-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_{\frac{n}{2}-2} = \qquad + \sigma_1 \omega^2 + \sigma_0,$$
$$\gamma_{\frac{n}{2}-1} = \qquad \sigma_0.$$

Avant d'introduire ces quantités de D et G dans les égalités du

début de ce paragraphe, il est avantageux d'y exprimer les E par les T. L'égalité $\mathfrak{D}E'' = \omega E' D E$ devient

$$\begin{aligned}\omega^{-1}\mathfrak{D}(\omega U + T'') &= (\omega U - T')D(\omega U + T)\\ &= \omega^2 D + \omega(T'D + DT) + T'DT,\end{aligned}$$

et en prenant sa transposée

$$\begin{aligned}\omega^{-1}\mathfrak{D}(\omega U - T'') &= (\omega U - T)D^*(\omega U + T')\\ &= \omega^2 D^* - \omega(D^*T' + TD^*) + TD^*T'.\end{aligned}$$

Soustrayons ces égalités en tenant compte des suivantes :

$$T'(TT'TT'\ldots) \quad \text{ou} \quad T'B^p = (T'TT'T\ldots)T \quad \text{ou} \quad B^{*p}T;$$

d'où

$$T'D = D^*T$$

et pareillement

$$DT = TD^*.$$

Le résultat est

$$2\omega^{-1}\mathfrak{D}T'' = \omega^2(D - D^*) + 2\omega(T'D - DT) + T'DT - TD^*T'.$$

Mais

$$T'DT - TD^*T' = \delta_0(B^* - B) + \delta_1(B^{2*} - B^2) + \ldots + \delta_{\frac{n}{2}}(B^{n*} - B^n)$$

D'autre part, en soustrayant $\omega U = (\omega^2 + B)D$ de sa transposée, on a

$$\omega^2(D - D^*) = \delta_0(B^* - B) + \delta_1(B^{2*} - B^2) + \ldots,$$

et par suite

$$\mathfrak{D}T'' = \omega^3(D - D^*) + \omega^2(T'D + DT).$$

Un calcul tout semblable inutile à reproduire conduit à

$$\mathfrak{G}T'' = \omega(G - G^*) + T'G + GT.$$

II. — *Les e'' en fonction des e, e', lorsque $n = 2, 3, 4, 5$ ou 6.*

4. *Cas où $n = 2, 3$ ou 4.* — L'objet de ce paragraphe est d'obtenir les e'' en fonction explicite des e et e'. Pour cela je vais transformer les puissances de B ($= TT'$) en d'autres substitutions dont les éléments seront des fonctions linéaires des sous-déterminants diago-

naux de T et T'. Ce sera par le moyen de ces quantités que seront exprimés les e''.

Suivant la parité de ω, il y a lieu d'employer

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{D}T'' = \omega^2(D - D^*) - \omega^2(T'D - TD^*) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\frac{n}{2}-1}{\underset{0}{\sum}} \delta_i B^i \end{array}\right|$$

ou

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{D}T'' = \omega^2(G - G^*) - TG + TG^* \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\frac{n}{2}-1}{\underset{0}{\sum}} \gamma_i B^i \end{array}\right|,$$

les expressions de $D\,G\,\delta\,\gamma\,B$ étant tirées du paragraphe précédent.

Les cas simples de $n = 2$, 3 et 4, bien que reproduisant des résultats connus, serviront à vérifier la méthode :

$n = 2$

$$E = \omega U + T = \begin{vmatrix} \omega & e_{12} \\ e_{12} & \omega \end{vmatrix},$$

$$A = \omega^2 + TT = \begin{vmatrix} \omega^2 - e_{12}e_{12} & 0 \\ 0 & \omega^2 - e_{12}e_{12} \end{vmatrix}, \qquad \sigma_1 = \frac{s_1}{2} = -e_{12}e_{12},$$

$$|A| = (\omega^2 - e_{12}e_{12})^2 = (\omega^2 - \sigma_1)^2 = \mathfrak{D}^2, \qquad \delta_0 = 1, \qquad D = D^* = U,$$

$$\mathfrak{D}T'' = \omega^2(T + T')$$

ou

$$(\omega^2 - e_{12}e_{12})e_{12} = \omega^2(e_{12} + e_{12}).$$

Cette dernière relation n'est autre que celle entre les tangentes trigonométriques de deux angles et leur somme.

$n = 3$

$$E = \begin{vmatrix} \omega & e_{12} & e_{13} \\ -e_{12} & \omega & e_{23} \\ -e_{13} & -e_{23} & \omega \end{vmatrix},$$

$\omega^2 + TT$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - e_{12}e_{12} - e_{13}e_{13} & -e_{13}e_{23} & +e_{12}e_{23} \\ -e_{23}e_{13} & \omega^2 - e_{23}e_{23} - e_{12}e_{12} & -e_{12}e_{13} \\ +e_{23}e_{12} & -e_{13}e_{12} & \omega^2 - e_{23}e_{23} - e_{13}e_{13} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{2} = -(e_{12}e_{12} + e_{23}e_{23} + e_{13}e_{13}).$$

somme qu'on peut considérer comme formée par les produits des pfaffiens du premier degré e_{ik} de T et T' :

$$s_2 = \sigma_1^2, \qquad |\omega^2 - TT'| = \omega^2(\omega^4 + 2\sigma_1\omega^2 + \sigma_2) = \omega^2(\omega^2 - \sigma_1)^2 = \omega^2\zeta_1^2,$$

$$\gamma_0 = \omega^2 - \sigma_1, \qquad \gamma_1 = 1, \qquad G = \gamma_0 U - TT', \qquad G^x = \gamma_0 U - T'T,$$

$$\zeta_1 T' = \omega(T'T - TT') - (\omega^2 + \sigma_1)(T - T') = T\,TT' - TT'\,T.$$

En effectuant les produits tels que $TT'T\,[= (TT')T]$ on vérifie que

$$TT'T = \sigma_1 T \qquad \text{et} \qquad T'TT' = \sigma_1 T',$$

ce qui fait disparaître le σ_1. En égalant les éléments homologues de l'égalité ainsi simplifiée, on a

$$(\omega^2 - \sigma_1)e''_{12} = \omega^2(e_{12} - e'_{12}) + \omega(e_{13}e'_{23} - e_{23}e'_{13})$$

et deux autres égalités semblables. Elles sont connues et ont été établies par d'autres méthodes (¹).

Les paramètres e reçoivent une signification géométrique, si l'on considère la relation $R'' = RR'$ comme représentant la composition des deux rotations en une seule. Posons à cet effet les trois triplets

$$v_i = v_i \tan\frac{A}{2}, \qquad v'_i = v'_i \tan\frac{A'}{2}, \qquad v''_i = v''_i \tan\frac{A''}{2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$\Sigma v_i^2 = 1, \qquad \Sigma v_i v'_i = \cos a''.$$

Les v sont alors les cosinus directeurs des trois arêtes d'un trièdre, et l'on a écrit e_i pour e_{ik}.

L'élimination des v et e entre ces équations et celles entre les e, e', e'' qu'on vient d'établir conduit aux trois relations fondamentales de la trigonométrie sphérique entre les côtés a_i et les angles $A_i/2$ d'un triangle.

L'égalité $R'' = RR'$ exprime que deux rotations A, A' autour des deux arêtes du trièdre se ramènent à une seule $2\pi - A''$ autour de la troisième arête.

(¹) Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXI, 1905, p. 14. Klein, *Das Icosaeder*, p. 35.

$n = 4$

$$E = \begin{vmatrix} \omega & \cdots & e_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ e_{n1} & \cdots & \omega \end{vmatrix}, \qquad \omega = \omega^2 - \sigma_1\omega^2 + \sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{2} = -\Sigma e_{ij}e_{ij}, \qquad \sigma_2 = s_2 = |T|T|.$$

Je désignerai par θ la racine carrée du déterminant $|T|$, un pfaffien du deuxième degré ; alors $\sigma_2 = \theta\theta'$,

$$\theta = e_{12}e_{34} - e_{13}e_{24} + e_{14}e_{23},$$

qu'on écrit aussi (1, 2, 3, 4)

$$\delta_1 = \omega^2 - \sigma_1, \qquad \delta_2 = 1, \qquad D = (\omega^2 - \sigma_1)U + B$$

ou $U^2\omega + M_2$,

$$\omega^{-2}(\Delta T) = \omega^3(T'T + TT') + \omega^2[(\omega^2 - \sigma_1)(T - T') + (T'TT' - TT'T)].$$

Le second membre de cette égalité ne diffère pas de celui rencontré dans le cas de $n = 3$; le même fait va se présenter pour $n = 2k - 1$ et $n = 2k$, bien que le développement conduise à des résultats différents.

En effet, si l'on effectue le produit $TT'T$ ou $(TT')T$, on trouve une substitution dont l'élément d'indice l_k est

$$\sigma_1 e_{ij} = \theta e_{ij} \qquad (i, j, l, k = 1, 2, 3, 4).$$

Mais on a

$$e_{ij} = \frac{d\theta}{de_{ij}};$$

si donc on désigne par π une substitution dont les éléments sont

$$\theta\frac{d\theta}{de_{ij}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta\theta'}{de_{ij}},$$

on aura

$$TT'T = \sigma_1 T + \pi$$

et de même

$$T'TT' = \sigma_1 T' + \pi'.$$

Ces relations font encore disparaître σ_1 de l'expression de T', qui devient

$$\Delta T = \omega^2(T + T') + \omega^2(T'T - TT') + \omega^2(\pi + \pi')$$

De là on déduit les expressions données par M. Cole (¹) des six éléments e_{lk}

$$\mathfrak{D}e'_{lk} = \omega^4(e_{lk} - e'_{lk}) + \omega^3(e_{li}e_{ik} - e_{li}e_{jk} - e_{ji}e_{ik} - e_{ij}e_{jk}) - \omega^2(\theta_{ij} + \theta_{ij}e_{ij}).$$

5. *Cas où $n = 5$ ou 6.* — Dans les deux cas de $n = 5$ et $n = 6$, les formules présentent le même aspect quant aux lettres B, T et σ, bien que leurs valeurs en fonction des e soient différentes. Je les écris en mettant ce fait en évidence, afin d'éviter des redites :

$$G = \gamma_0 U - \gamma_1 B + \gamma_2 B^2 \qquad (= D \text{ si l'on change } \gamma \text{ en } \delta),$$

$$\gamma_0 = \omega^4 - \sigma_1\omega^3 - \sigma_2 (= \delta_0), \qquad \gamma_1 = \omega^2 - \sigma_1 (= \delta_1), \qquad \gamma_2 = 1 (= \delta_2),$$

$$\omega[-\gamma_1(B - B^*) - B^2 - B^{2*}] - \gamma_0(T - T^*)$$
$$- \gamma_1(T'B - TB^*) - T'B^* - TB^{2*} = \mathfrak{G}T'';$$

dans le cas de $n = 6$, on devra changer γ en δ et le second membre en $\omega^{-2}\mathfrak{D}T''$:

$$\mathfrak{G} = \omega^4 - \sigma_1\omega^3 - \sigma_2$$

tandis que

$$\mathfrak{D} = \omega^6 - \sigma_1\omega^4 - \sigma_2\omega^3 - \sigma_3.$$

Il s'agit de transformer BT, B^2, B^2T... en d'autres substitutions dont les éléments ne renferment que les sous-déterminants diagonaux de T et T'.

En effectuant le produit TT'T (= BT ou TB) à l'aide des éléments de (TT') et T, on obtient le résultat suivant :

Donnons aux lettres i, j, k, l, m les valeurs 1, 2, 3, 4 ou 5 et représentons par

$$\theta_m = (i, j, k, l) = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & e_{ij} & e_{ik} & e_{il} \\ & 0 & e_{jk} & e_{il} \\ \cdot & \cdot & 0 & e_{kl} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix}}$$

la racine d'un des cinq sous-déterminants (pfaffiens du deuxième ordre) de T; l'élément de TT'T d'indice ij est

$$\sigma_1 e_{ij} + (i, j, l, m)e_{lm} + (i, j, k, m)e_{km} + (i, j, k, l)e_{kl}$$

ou

$$\sigma_1 e_{ij} + \theta_k \frac{d\theta_k}{de'_{ij}} + \theta_l \frac{d\theta_l}{de'_{ij}} + \theta_m \frac{d\theta_m}{de'_{ij}}$$

$$\frac{d\Sigma\theta_p\theta_p}{de_{ij}} = \sigma_1 e_{ij} \qquad (p = 1, 2, \ldots, 5).$$

(¹) *American Journal of Math.*, t. XII.

Si donc π et π' sont des substitutions alternes dont les éléments sont les dérivées par rapport aux e ou e' de la somme $\Sigma\theta_p\theta_q$, on aura

$$TT'T = \sigma_1 T + \pi, \qquad T'TT' = \sigma_1 T' + \pi'.$$

Afin de transformer $TT'TT'(=B^2)$, on effectuera le produit

$$(TT'T)T' = (\sigma_1 T + \pi)T';$$

on trouve ainsi, pour l'élément diagonal d'indice ii de la substitution $\pi T'$, la quantité

$$\sum_1 \theta_p\theta_q - \theta_i\theta_i$$

et $-\theta_i\theta_i$ pour ceux d'indice ij.

Si donc on désigne par Θ la substitution dont les éléments changés de signe sont

$$\begin{vmatrix} \theta_1\theta_1 & \dots & \theta_1\theta_5 \\ \dots & & \dots \\ \theta'_5\theta_1 & \dots & \theta'_5\theta_5 \end{vmatrix} = -\Theta,$$

on aura

$$B^2 = \sigma_1 B - \Sigma\theta_p\theta_q T - \Theta.$$

Démontrons encore que $\sigma_2 = -\Sigma\theta_p\theta_q$; désignons par B_{ii} les éléments diagonaux de la substitution B^2 :

$$B_{ii} = \sum b_{ij}b_{ji}.$$

On a

$$\sum(b_{ii}b_{jj} - b_{ij}b_{ji}) = 2B_{ii}\sigma_1 - B$$

lorsque i reste constant. Faisons $i = 1, 2, \dots, n$ et ajoutons les égalités résultantes : le premier membre devient le double des mineurs du deuxième degré de B et l'on a

$$2s_2 = \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 - \Sigma B_{ii}.$$

Mais, d'après l'expression de B^2 qu'on vient d'établir,

$$\Sigma B_{ii} = \sigma_1\sigma_1 - \tfrac{1}{2}\Sigma\theta_p\theta_q;$$

d'où

$$2s_2 = 2\sigma_1^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma\theta_p\theta_q.$$

ou encore

$$2s_2 = 2\sigma_1^2 + 4\sigma_2$$

d'après les relations du paragraphe 3, ce qui établit la proposition.

Cette expression

$$B^2 = \sigma_1 B - \sigma_2 U - \Theta,$$

comparée à celle $N_3 = -\sigma_1 B + \sigma_2 U + B^2$ du paragraphe 3, exige que $N_3 = \Theta$.

Substituons ces produits BT, B^2, ... dans l'expression de $\mathcal{G}T''$, elle devient :

$$\begin{aligned}\omega^4(T - T') + \omega^3(T'T - TT') \\ - \omega^2(\pi - \pi') + \omega(\Theta - \Theta') - \Theta T + \Theta' T = \mathcal{G}T''.\end{aligned}$$

En égalant les éléments homologues des deux membres, on obtient les e'' en fonction linéaire des seuls pfaffiens des premier et deuxième degrés de $|T|$ et $|T'|$ débarrassée des quantités algébriques σ.

Lorsque $n = 6$, on a à considérer $\omega^{-1}\omega T''$ dont l'expression en B et T présente le même aspect que $\mathcal{G}T''$; mais le développement des produits BT et B^2 est moins simple.

Les lettres i, j, k, l, m, n pouvant prendre les valeurs de 1 à 5, représentons par (i, j, k, l) ou par θ_{mn} la racine carrée de l'un des quinze sous-déterminants diagonaux de $|T|$.

Nous continuerons de désigner par π une substitution alterne dont l'élément d'indice ij est cette fois

$$\begin{aligned}(i, j, k, l)e_{kl} + (i, j, k, m)e_{km} + (i, j, k, n)e_{kn} \\ + (i, j, l, m)e_{lm} + (i, j, l, n)e_{ln} + (i, j, m, n)e_{mn},\end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire à l'aide de la somme des quinze produits des pfaffiens θ par leurs homologues θ', savoir $\dfrac{d\Sigma\theta\theta'}{de'_{ij}}$.

Un élément d'indice ij de BT est alors

$$\sigma_1 e_{ij} + \frac{d\Sigma\theta\theta'}{de_{ij}}$$

et par suite

$$BT = \sigma_1 T + \pi.$$

On obtiendra B^2 en effectuant $(TT'T)T = (\sigma_1 T - \pi)T$; par un calcul trop long à reproduire, on trouve que $\pi T'$ est une substitution dont le terme diagonal d'indice ii est égal à $\sum_{1}^{n} \theta\theta'$ diminué de la

somme S_{ii} des cinq pfaffiens $\theta_{ij}, \theta_{ik}, \theta_{il}, \theta_{im}, \theta_{in}$ multipliés par leurs correspondants accentués, et dont le terme d'indice ij est la somme S_{ij} des quatre pfaffiens $\theta_{jk}, \theta_{jl}, \theta_{jm}, \theta_{jn}$ multipliés respectivement par leurs correspondants θ'. Si donc Θ est la substitution d'éléments $-S_{ii}, -S_{ij}$, on aura

$$B^4 = \sigma_1 B + \sum^{15} \theta\theta' + \Theta.$$

Comme dans le cas de $n = 5$ on a aussi

$$\sigma_2 = -\sum^{15} \theta\theta',$$

car la somme des éléments diagonaux de $\pi T''$ se compose ici de 6×10 produits $\theta\theta'$ dont la somme est $\frac{1}{2}\sum_{15} \theta\theta'$, ce qui conduit aux expressions trouvées dans le cas de $n = 5$ pour B^2, et pour $\mathfrak{G}T''$ qu'il faut remplacer par $\omega^{-2}\mathfrak{G}T''$.

Lorsque n est supérieur à 6, les formules se compliquent par l'introduction de pfaffiens de degré plus grand que deux dans le développement des puissances de B. Par induction on peut cependant considérer comme établie la possibilité de former *a priori* les polynomes $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{G}$: le coefficient de $(\omega^2)^{n-i}$ est la somme des pfaffiens de degré i de $|T|$ et $|T'|$. En second lieu, l'expression de T'' ne contient que des substitutions sans multiplicateur algébrique, dont les éléments sont ou les dérivées d'une fonction ou des sommes de pfaffiens.

Je remarque enfin qu'un système de paramètres e doit s'exprimer rationnellement et symétriquement en fonction des deux autres. On met cette symétrie en évidence si, au lieu de $RR'' = RR'$, on écrit $RR'R'' = 1$; d'où

$$\overline{R'} = RR'$$

et deux autres égalités pareilles.

Puisque

$$R' = R''' = (2\omega\overline{E} - U)' = 2\omega\overline{E'} - U,$$

il suffira de permuter les indices des e'' dans nos formules. On en déduira les e ou les e' par une simple permutation des accents.

6. *Interprétation de* $R'' = RR'$ *en Géométrie.* — On peut, pour une multiplicité n quelconque, interpréter $R'' = RR'$ comme la composition de deux mouvements en un seul.

Je vais exprimer les e en fonction des paramètres angulaires qui définissent ce mouvement ; en les substituant dans les équations établies précédemment entre les e, e', e'', on obtiendra des relations entre ces seuls paramètres angulaires, qui seront la généralisation des formules de la trigonométrie sphérique dans la multiplicité 3.

Dans ce but transformons E et R par la substitution orthogonale V, ce qui revient à un changement d'axes.

En substituant $y = Vy'$, $x = Vx'$ dans $y = Ex$, $y = Rx$, ces dernières deviennent

$$y' = \overline{V}EVx', \qquad \text{et} \qquad y' = VRVx' ; \qquad \text{soit} \qquad y' = Hx'.$$

Les éléments h de H sont liés aux e par la substitution orthogonale d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ résultat du développement de $\overline{V}EV = H$:

$$e_{ik} = h_{ik} - \omega, \qquad e_{lk} = \sum_{mn} \begin{vmatrix} v_{mi} & v_{ni} \\ v_{mk} & v_{nk} \end{vmatrix} h_{mn}, \qquad h_{lk} = \sum_{mn} \begin{vmatrix} v_{mi} & v_{mk} \\ v_{ni} & v_{nk} \end{vmatrix} e_{mn}$$

$$(l = k,\ m = n).$$

A cause de $2\omega = E - E^*$, on a

$$R = 2\omega\overline{E} - U = (E - E^*)\overline{E} - U = E^*\overline{E} ;$$

de $E = VH\overline{V}$ on déduit

$$R = VH^*\overline{H}\overline{V}.$$

La substitution qui transforme E en H transforme R en $H^*\overline{H}$.

Or on peut déterminer V de façon que H ne contienne plus que les éléments ω et $h_{p,p+1}$ (p étant impair). Les matrices partielles en lesquelles se décomposent les matrices H et $H\overline{H}$ sont alors du type suivant : pour H

$$\begin{vmatrix} \omega & h_{12} \\ -h_{12} & \omega \end{vmatrix}$$

et pour $\mathrm{H}^*\overline{\mathrm{H}}$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\omega^2 - h_{12}^2}{\omega^2 + h_{12}^2} & \dfrac{-2\omega h_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{2\omega h_{12}}{\Delta} & \dfrac{\omega^2 - h_{12}^2}{\Delta} \end{pmatrix}$$

(on ajoutera un élément ω à la diagonale si n est impair).

Posons

$$\omega = 1$$

et

$$h_{p,p+1} = \operatorname{tang} \frac{\varphi_{p,p+1}}{2}.$$

Les matières partielles de $\mathrm{H}^*\overline{\mathrm{H}}$ et la substitution qui leur correspond deviennent

$$\left| \begin{matrix} \cos\varphi_{p,p+1} & -\sin\varphi_{p,p+1} \\ \sin\varphi_{p,p+1} & \cos\varphi_{p,p+1} \end{matrix} \right| \quad \begin{matrix} y_p = x_p \cos\varphi_p - x_{p+1} \sin\varphi_p \\ y_{p+1} = x_p \sin\varphi_p + x_{p+1} \cos\varphi_p \end{matrix} \Bigg|$$

ou

$$y_p + i y_{p+1} = (x'_p + i x'_{p+1}) e^{i\varphi_p}$$

en ajoutant

$$y_n = x_{n+1}$$

si n est impair.

Les $\frac{n}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{n-1}{2}\right)$ quantités $\operatorname{tang}\frac{\varphi_p}{2}$ et $e^{i\varphi_p}$ sont les racines des équations caractéristiques de T et R :

$$\omega = |\mathrm{T} - \omega| = \omega^n - \omega^{n-2}\Sigma_1 + \omega^{n-4}\Sigma_2 - \ldots = \mathrm{H}\left(\omega^2 - \operatorname{tang}^2\frac{\varphi_p}{2}\right)$$

et

$$\omega = |\mathrm{R} - \omega| = \omega^n - \omega^{n-1}\Sigma_1 + \omega^{n-2}\Sigma_2 - \ldots = \mathrm{H}(\omega - e^{i\varphi_p})(\omega - e^{-i\varphi_p}),$$

les Σ_k représentant les sommes des déterminants diagonaux de degré de k $|\mathrm{T}|$ ou $|\mathrm{R}|$.

On obtient les v_{lk} en fonction des angles φ en développant l'égalité

$$\mathrm{R} = \mathrm{V}\mathrm{H}^*\overline{\mathrm{H}}\overline{\mathrm{V}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} v_{lk} = {} & \Sigma(v_{l,p} v_{k,p} + v_{l,p+1} v_{k,p+1}) \cos\varphi_p \\ & + \Sigma(v_{l,p+1} v_{k,p} - v_{l,p} v_{k,p+1}) \sin\varphi_p + v_{lk} v_{nk}. \end{aligned}$$

Cette égalité est applicable si $l = k$; on doit y supposer p im-

pair; on en déduit r_{kl} en changeant le signe de φ; le terme final n'existe que si n est impair.

Elle n'est autre que la formule dite de Rodrigue, qu'on rencontre lorsque $n = 3$.

Si y'_i et x'_i sont les coordonnées d'un point y' et de son transformé x', l'hypothèse $y'_p = y'_{p+1} = 0$ entraîne $x'_p = x'_{p+1} = 0$, quelles que soient les valeurs de φ_p et des autres coordonnées. Les points x' et y' se transforment donc l'un en l'autre, lorsque φ_p varie, en restant dans l'espace à $n - 2$ dimensions commun aux espaces $x'_p = 0$, $x'_{p+1} = 0$; il existe $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ biplans de ce genre suivant que n est pair ou impair; dans ce dernier cas, les équations sont satisfaites en annulant toutes les coordonnées, sauf $y'_n = x'_n$; il y a alors une droite sur laquelle les points se transforment en eux-mêmes.

Appliquons ces résultats au cas de $n = 4$. Il y a alors $2\left(= \frac{n}{2}\right)$ biplans à deux dimensions ($n - 2 = 2$), biplans de glissement, qui restent fixes dans le mouvement et deux angles φ_{12}, φ_{34}, soit $2\varphi_1$, $2\varphi_2$; on les obtient par les racines $\omega_i^2 = \operatorname{tang} \varphi_i$ de

$$|\omega + T| = \omega^4 - \Sigma e_{lk}\omega^2 - \theta^2 = 0.$$

Les e sont donnés par les égalités du début de ce paragraphe En vue de la symétrie, nous y remplacerons les six e_{lk} par e_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$), les h_1 par ω_1, ω_2 et leurs coefficients par p_i, q_i; alors

$$e_i = p_i\omega_1 + q_i\omega_2.$$

Les p_i, q_i sont les paramètres des biplans P et Q communs aux espaces

$$P = \left| \begin{array}{l} \Sigma e_{1k} x_k = 0 \\ \Sigma e_{2k} x_k = 0 \end{array} \right|, \qquad Q = \left| \begin{array}{l} \Sigma e_{3k} x_k = 0 \\ \Sigma e_{4k} x_k = 0 \end{array} \right|.$$

La substitution V étant orthogonale, on a

$$\Sigma p_i^2 = \Sigma q_i^2 = 1, \qquad \Sigma p_i q_i = 0, \qquad p_i = q_{i+3},$$

d'où

$$\Sigma p_i p_{i+3} = 0;$$

et les p_i, q_i ne dépendent que de quatre paramètres.

A R' et R'' correspondent des e, ω, p, q accentués. Les six relations

entre les e, e', e'' ne dépendront donc que des six angles φ (analogues aux angles dièdres d'un trièdre lorsque $n = 3$) et des 3×4 paramètres relatifs aux p et q. Mais introduisons les six nouveaux paramètres définis par des égalités telles que

$$\Sigma p_i p'_i = \Sigma q_i q'_i \quad \text{soit} \quad = (pp'), \quad (pp''), \quad (p'p'')$$
$$\Sigma p_i q'_i = \Sigma q_i p'_i \quad \text{soit} \quad = (pq'), \quad (pq''), \quad (p'q'')$$

(analogues aux cosinus des angles plans d'un trièdre). Ils suffisent pour éliminer les p et q des six relations entre les e, e', e'' et leurs substituer six autres fondamentales entre les douze angles du quadrièdre. On aura par exemple

$$\omega^2 + \omega^4 [\omega_1 (pp'') + \omega_2 (pq'')]$$
$$= \omega^2 [\omega_1 + \omega_2 (pp') + \omega_2 (pq'')] - \omega_1 \omega_2 [\omega_1 (pq') + \omega_2 (pp'')] - \omega_1 \omega_2 \omega_2$$

et une autre en permutant ω_1 et ω_2 ;
d'autre part

$$\omega^2 = \omega^4 + \sigma_1 \omega^2 - \theta\theta', \qquad \sigma_1 = \Sigma e_i e'_i = (\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 + \omega'_2)(pp'),$$
$$\theta\theta' = \omega_1 \omega_2 \omega_1 \omega_2.$$

Citons encore, comme très simple, celle tirée de la relation entre déterminants

$$\frac{\omega |E| |E|}{|E''|} = |A| = \omega^2,$$

déduite elle-même de

$$E'' = \omega E \bar{A} E,$$

car, si $\omega = 1$, les $|E|$ sont

$$\omega^2 - \omega_1^2 (\omega^2 - \omega_1^2) = \operatorname{sec}^2 \varphi_1 \operatorname{sec}^2 \varphi_2.$$

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Dr SOMMER (J.). — INTRODUCTION A LA THÉORIE DES NOMBRES ALGÉBRIQUES. Édition française; traduit de l'allemand par *A. Lévy*, avec préface de *J. Hadamard*. 1 volume in-8, x-376 pages. Paris, Hermann et fils, 1911.

Dans ses lettres à Jacobi, Hermite se plaint beaucoup que son ignorance de la langue allemande le force à rester étranger aux travaux que publiait alors M. Kummer sur les nombres complexes. Il souhaitait de trouver un traducteur pour pouvoir faire paraître en français une partie des Mémoires du savant géomètre allemand. A ma connaissance, son espoir ne fut pas réalisé, et c'est seulement 30 ans plus tard que M. Dedekind publia, dans ce Bulletin, un exposé remarquable de sa théorie des modules et des idéaux, qui, tout en donnant une interprétation aux nombres idéaux de Kummer, permettait d'étendre leur introduction aux corps algébriques quelconques. Cet article n'eut pas de suite et, jusqu'à une date récente, il n'y eut sur ces théories aucune publication systématique en langue française. Ainsi que le fait remarquer M. Hadamard dans la préface du Livre de M. Sommer, il ne semble pas que, depuis 40 ans, les géomètres français aient été beaucoup attirés par cette partie de la science des nombres dont pourtant Galois et Hermite peuvent être considérés, à juste titre, comme des fondateurs. En Allemagne, au contraire, la théorie des corps et des idéaux, exposée à des points de vue différents par Kummer, Dedekind, Kronecker et tout récemment par M. Hensel, a donné lieu à un nombre considérable de travaux et, en 1895, M. Hilbert pouvait publier sur l'état de ces questions un volumineux rapport de 400 pages (*Jahresbericht der deustchen mat. Ver.*). Grâce à M. Lévy, la littérature mathématique française s'enrichira bientôt de la traduction intégrale de ce rapport (en cours de publication dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*). Comme introduction à l'étude de ce travail, peut-être trop condensé pour un lecteur non initié, M. Lévy a tenu à publier au préalable une

traduction d'un Livre plus élémentaire sur les nombres algébriques, et il a fait choix du Livre de M. Sommer. Mon regretté Maître, M. J. Tannery, a déjà rendu compte ici même de l'édition allemande de ce Traité. Je me contenterai donc d'en rappeler les principales divisions.

Un court exposé est d'abord consacré aux propositions élémentaires de la théorie des nombres (théorème de Fermat, propriétés des congruences). Le Chapitre II traite des *corps quadratiques :* en se servant de la forme simple des entiers de ce corps $\left(a + b\sqrt{m} \text{ ou } \frac{a - b\sqrt{m}}{2}\right)$, l'auteur évite l'emploi des propositions générales sur les corps et la divisibilité des polynomes. Il établit, de façon relativement simple, le « théorème fondamental » sur la décomposition en facteurs de la norme d'un idéal. Il semble cependant que, par une légère modification de cette démonstration, donnée par M. Hilbert dans son cours de 1897-1898, on aurait pu éviter la considération de différents cas et se rapprocher plus de la démonstration du même théorème donnée par M. Hilbert pour les corps de Galois. La répartition des idéaux en classes, qui, dans le cas particulier des corps quadratiques, peut être établie au moyen de théories d'Hermite sur la réduction des formes, est déduite dans ce Chapitre du théorème général de M. Minkowski sur les systèmes de formes linéaires. On a ainsi l'avantage d'avoir une démonstration qui s'étend aux corps quelconques, mais par contre on obtient un procédé beaucoup moins pratique pour la recherche systématique des classes d'idéaux. La même remarque s'applique à la théorie des unités qui est basée sur le même théorème. Le Chapitre se termine par un exposé succinct de la théorie du *symbole d'Hilbert pour les restes normiques,* et de son application à la répartition des classes en genres ou espèces et par quelques mots sur ces systèmes d'entiers algébriques que Dedekind avait appelé primitivement *ordres* et qui depuis ont reçu des appellations si diverses (*Ring*, *Zahlring*, *Zahlstrahl*, *etc.;* M. Lévy les désigne sous le nom d'*anneaux*).

Sous le titre *Applications des corps quadratiques*, le troisième Chapitre renferme des théories assez différentes. D'abord quelques-unes des recherches anciennes et récentes sur le « dernier théorème de Fermat » qui, comme on sait, fut le point de départ

des théories de Kummer. Puis un aperçu des relations entre la théorie des corps et celle des formes quadratiques, et enfin quelques représentations géométriques des idéaux, d'après des idées de Gauss et Lejeune-Dirichlet, reprises plus tard par M. Klein.

Dans le Chapitre IV consacré aux nombres du troisième degré, l'auteur esquisse en réalité la théorie générale des corps. On y trouve d'ailleurs peu d'exemples et, à part deux paragraphes consacrés, l'un (n° 42) au calcul des bases du corps $K(\mathfrak{J})$, l'autre (n° 46) au calcul des idéaux premiers du même corps, la plupart des résultats peuvent s'étendre aux corps du $n^{\text{ième}}$ ordre. La démonstration du théorème fondamental (un idéal divise toujours un idéal principal) est donné, d'après Hurwitz, comme conséquence de la répartition des idéaux en un nombre fini de classes.

D'après Kummer, l'auteur avait établi, dans le Chapitre II, la loi de réciprocité de Legendre et Gauss en se servant des propriétés du corps quadratique. C'est en cherchant à étendre ce mode de démonstration à la loi de réciprocité pour des entiers complexes quadratiques que M. Hilbert a été amené à définir les corps quadratiques relatifs formés des nombres $\alpha + \beta\sqrt{\mu}$ [α et β étant des nombres quelconques et μ un nombre déterminé du corps $K(\sqrt{m})$]. Le dernier Chapitre du livre de M. Sommer est consacré à l'exposition de la théorie de ces corps et d'un certain nombre des résultats de M. Hilbert.

Enfin le livre se termine par une courte bibliographie des Ouvrages renfermant des données numériques et par quelques Tables donnant, pour les valeurs de m comprises entre -97 et 101 : la base du corps, l'unité fondamentale (pour m positif), les classes d'idéaux, les genres et les systèmes de caractères. Au sujet de ces Tables, je me permettrai une légère critique qui est d'ailleurs la seule que j'aie à formuler. Les idéaux indiqués comme représentants des classes ne sont pas toujours les plus simples possibles ; ainsi dans le corps $K(\sqrt{-53})$, au lieu de l'idéal $(9, 1-\sqrt{-53})$ pour représenter la classe J^4, on aurait pu indiquer l'idéal $(6, 5+\sqrt{-53})$.

Il y a lieu de signaler tout spécialement le mérite du traducteur. M. Lévy avait à surmonter de véritables difficultés, à cause de l'absence totale d'ouvrages et même de notations françaises sur

ce sujet. Il a su mettre en un français élégant et correct la pensée de l'auteur allemand, et c'est un véritable plaisir de lire cette traduction, même pour un lecteur de l'édition originale.

A. Chatelet.

TANNERY (J.). — Leçons d'Arithmétique théorique et pratique [1]. Sixième édition. 1 volume in-8, XVI-545 pages, Paris, Armand Colin, 1911.

« J'ai essayé de faire un Livre d'enseignement qui puisse servir à ceux qui commencent leurs études mathématiques et à ceux qui les poursuivent, qui soit très élémentaire au début... et qui, à la fin, touche à des sujets d'ordre assez élevé. » C'est ainsi que J. Tannery définit, au début de sa préface, l'esprit de ce Livre. Est-il besoin d'ajouter que la partie élémentaire est rédigée avec l'admirable conscience que l'auteur mettait à tout ce qu'il faisait, et qu'il ne s'est pas contenté de *toucher* à des sujets d'ordre élevé? On trouvera là un premier exposé des principes qui permettent de construire l'analyse avec la notion de nombres entiers, une définition précise de la correspondance entre les grandeurs et les nombres, les éléments de la théorie des nombres « assez développés pour que le lecteur puisse soupçonner que la théorie des nombres est une véritable science, non un recueil de théorèmes isolés, plus ou moins curieux ».

Dans ce compte rendu trop sommaire, je ne pourrai donner que quelques indications sur la partie élémentaire qui, cependant, occupe les 400 premières pages du Livre.

1. Les definitions et les propriétés essentielles des opérations sur les nombres entiers sont présentées indépendamment de la manière d'effectuer ces opérations et de la numération décimale.

On cherche d'abord à rattacher ces notions à des expériences familières, en raisonnant sur des collections d'objets représentés

[1] Ce Livre fait partie d'un Cours complet pour la classe de Mathématiques A, B, publié sous la direction de M. G. Darboux.

par des points; mais cette introduction est suivie d'un exposé substantiel de généralités sur les opérations où l'ordre le plus logique est indiqué avec précision : les propriétés des sommes algébriques qui par leur nature font partie d'un cours d'Arithmétique sont expliquées dès le début; mais on a pris soin de n'en parler que dans les parties du Livre, imprimées en petits caractères, qui peuvent être considérées comme des compléments.

La notion de fraction est rattachée à celle de mesure et de rapport d'où elle tire son origine; les opérations sur les fractions se comprennent mieux si l'on en voit de suite l'application aux changements d'unités dans la mesure des grandeurs. Mais l'auteur pense qu'il convient ensuite de détacher la notion de fraction de son origine concrète, de montrer qu'une fraction peut être regardée comme un couple de nombres entiers donnés dans un ordre déterminé et que la théorie des opérations sur les fractions peut être envisagée de ce point de vue.

2. Après des indications détaillées sur les calculs approchés, des exemples traités en détail (p. 270-311) et l'explication, souvent répétée, que ces calculs suffisent toujours dans la pratique, l'auteur commence la partie complémentaire du Livre en introduisant les nombres irrationnels. Il adopte l'idée fondamentale de M. Dedekind qui consiste à définir chaque nombre irrationnel en disant quels sont les nombres rationnels qui sont plus petits ou plus grands que lui.

L'introduction des *ensembles* des bornes et des *éléments d'accumulation* d'un ensemble ne demande ensuite que cinq pages et il est alors facile de donner la condition de convergence de suites infinies, telles qu'elles se présenteront dans l'étude des séries et à propos de la définition des intégrales (sans qu'il soit question, ici, ni de séries ni d'intégrales).

3. « Maintenant que la notion de nombre entier, fractionnaire ou irrationnel est élucidée, que les opérations sur ces nombres sont précisées, on va regarder le nombre abstrait comme un instrument donné et connu, chercher quel parti on peut en tirer pour l'étude des *grandeurs*. » L'auteur indique dans sa préface que M. Darboux l'avait engagé à tirer ce qu'on pouvait de la vieille

définition, *une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution.* Il définit d'abord une correspondance entre les états d'une grandeur et les nombres, telle que la grandeur pourra être regardée comme numériquement connue, pourvu qu'on sache bien comment cette correspondance a été établie et qu'on ait considéré, en vue de les numéroter, des états assez voisins pour être à peine distincts. Ceci ne suppose que les notions d'égalité et d'inégalité et pourra, par exemple, s'appliquer aux *températures*. Il faut d'ailleurs s'assurer que les définitions physiques de l'égalité ou de l'inégalité satisfont aux conditions vérifiées d'elles-mêmes quand il s'agit de nombres et qui ne sont plus du tout évidentes quand il s'agit d'expériences possibles; par exemple, les égalités $A = B$, $B = C$ ont pour conséquence l'égalité $A = C$. Quand il s'agit de températures, « cette proposition exprime que, si une barre de fer plongée dans de l'eau ou dans de l'huile est en équilibre thermique avec chacun de ces liquides, cette eau et cette huile, placées dans le même récipient, seront aussi en équilibre thermique ». (Remarque de Maxwell, citée par J. Perrin, *Traité de Chimie physique*, t. I, p. 60).

Pour certaines grandeurs, outre la notion d'égalité, on a la notion d'addition; on peut alors définir un mode de graduation de la grandeur tel qu'à la somme de deux grandeurs de l'espèce considérée corresponde la somme des nombres qui correspondent à ces deux grandeurs. On retombe alors sur le cas le plus ordinairement considéré; mais il convenait d'expliquer comment la notion de nombre s'applique utilement à d'autres grandeurs.

4. Le dernier Chapitre (p. 487-541) est consacré aux éléments de la théorie des nombres. Il débute par l'étude classique des congruences du premier degré, le théorème de Fermat et celui de Wilson.

La théorie des restes quadratiques est présentée d'une façon très simple sur laquelle je donnerai une courte indication.

On sait que, si l'on considère la congruence

$$x^2 \equiv D \pmod{p},$$

où p est un nombre premier impair, les nombres D non divisibles par p pour lesquels cette congruence est possible s'appellent *restes*

quadratiques de p, les nombres pour lesquels cette congruence est impossible s'appellent *non-restes quadratiques* de p.

Il n'y a aucune difficulté à déterminer les nombres D qui sont restes quadratiques de p; mais le problème inverse (étant donné un nombre D reconnaître quels sont les nombres premiers impairs dont D est reste quadratique ou ceux pour lesquels D est non-reste) est beaucoup plus difficile. Sa solution repose sur le théorème connu sous le nom de *loi de réciprocité des restes*, théorème que Gauss appelait théorème fondamental pour cette théorie des restes. La démonstration donnée ici repose sur l'emploi du symbole de Legendre, généralisé par Jacobi, puis transformé par Schering et Kronecker. En supposant que p est un nombre positif impair et que D est un nombre entier premier à p, on désigne par le symbole $\left(\frac{D}{p}\right)$ l'unité affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les restes minima négatifs (mod p) fournis par la suite

$$D, \quad 2D, \quad 3D, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{2}D$$

sont en nombre pair ou impair.

On démontre que, si p et q sont des nombres positifs impairs premiers entre eux, on a

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

C'est dans cette égalité, lorsque p et q sont premiers, que consiste la *loi de réciprocité* d'Euler et de Legendre.

Le Chapitre se termine par des généralités sur les congruences à une inconnue de degré quelconque, les restes de puissances pour un exposant entier quelconque, la définition des *racines primitives* et des *indices*.

Une Table fait connaître, pour les nombres premiers inférieurs à 100, une racine primitive et les indices.

5. Des exercices nombreux (319 exactement) sont choisis de façon à donner des aperçus soit sur les applications, soit sur les parties plus élevées de la Science.

Préparer le lecteur à ce qu'il apprendra plus tard, c'est la préoccupation qu'on trouve constamment dans ce Livre. On verra avec quelle perfection cette intention a été réalisée.

E. Lacour.

POINCARÉ (H.). — Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne. Tome III : *Théorie des marées*, rédigée par *E. Fichot*. 469 pages, 2 planches.

Ce Tome III, ressemblant en cela à ses deux aînés, n'a pas été conçu pour l'application pratique immédiate ; mais il montre clairement les difficultés qu'offre le problème des marées, dans quelles directions se sont exercés les efforts des chercheurs pour s'évader de ce réseau inextricable, sans qu'ils y soient parvenus, et enfin il propose une solution du problème, qui est théoriquement satisfaisante, et ouvre ainsi une voie nouvelle vers la solution.

Sur les 469 pages de l'Ouvrage, 303 sont consacrées à la théorie générale des marées, 74 à la synthèse des observations. Les autres Chapitres traitent succinctement des méthodes pratiques de prédiction des marées (analyse harmonique et théorie de Laplace), des marées fluviales, des marées du noyau interne et de l'influence des marées sur la rotation et le mouvement des corps célestes. Ces questions n'ont pas été très développées, soit parce qu'elles font l'objet de traités spéciaux, soit parce qu'elles doivent recevoir ultérieurement des développements plus complets dans les leçons de Mécanique céleste. Aussi parlerons-nous spécialement de la théorie générale des marées et de la synthèse des observations.

Les marées sont de petites oscillations de l'Océan autour de sa position d'équilibre relatif ; c'est pourquoi l'Ouvrage débute par une étude générale de tels petits mouvements pour un système mécanique à un nombre fini de paramètres.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les paramètres qui déterminent la *configuration* du système ; en considérant les q et les q' comme des infiniment petits de même ordre, et ne gardant dans les équations de Lagrange que les termes du premier ordre, on trouve n équa-

tions qui suffisent à déterminer le mouvement :

$$\sum_k (a''_{ik} q''_i + a'_{ik} q'_i + a_{ik} q_i) = Q_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les a, a', a'' sont des constantes qui dépendent du système mécanique considéré, et les Q sont les composantes de la force extérieure.

Si la force extérieure est nulle, les Q sont nuls; on a alors les *oscillations propres* du système, dont les périodes sont données par une équation qui joue un rôle fondamental : $\Delta(\lambda) = 0$. Δ est un déterminant dont le terme général est

$$C_{ik} = a''_{ik} \lambda^2 + a'_{ik} \lambda + a_{ik}.$$

Si l'équilibre est stable, les racines de $\Delta(\lambda) = 0$ sont purement imaginaires, et l'oscillation propre correspondant à la racine λ_j est de la forme

$$q_{ij} = \alpha_{ij} e^{\lambda_j t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si la force extérieure n'est pas nulle, on peut la décomposer en composantes isochrones et considérer chaque composante séparément, c'est-à-dire prendre

$$Q_i = K_i e^{\lambda t},$$

λ purement imaginaire, les K constants.

Il existe alors une oscillation de la forme

$$q_i = \varepsilon_i e^{\lambda t}$$

qui est l'*oscillation contrainte*.

Le principe des forces vives permet d'exprimer l'oscillation contrainte au moyen des oscillations propres et montre ainsi que, si λ est voisin de λ_j, il se produira un phénomène de *résonance*.

L'Océan est un système qui admet deux sortes de paramètres, son énergie potentielle ne dépend que des q_a, qui déterminent la forme de la surface ; les q_b déterminent la position des molécules à l'intérieur. Une étude spéciale de tels systèmes montre que, *si la force extérieure est constante*, il y aura deux sortes de *marées statiques*, c'est-à-dire de petits mouvements, tels que les q_a soient constants : pour la première sorte, tous les q sont constants; pour

la seconde sorte, les q_p ne sont pas constants : il y aura donc des courants intérieurs. C'est M. Hough qui a introduit les marées statiques de seconde sorte que n'avait pas considérées Laplace.

Il faut maintenant calculer pour l'Océan toutes les quantités entrant dans la théorie précédente ; elles se présentent sous forme d'intégrales ; les forces extérieures, attraction de la Lune et du Soleil, se décomposent en forces isochrones : d'où les diverses marées diurnes, semi-diurnes et à longue période. Ces dernières s'étudient facilement comme application immédiate, en les considérant comme des marées statiques de première sorte.

Quant aux marées à courte période ou *marées dynamiques*, il en va tout autrement. On peut seulement conclure de la théorie précédente que, si la force extérieure est proportionnelle à $e^{\lambda t}$, il en sera de même de tous les paramètres de l'Océan. Pour avoir des renseignements plus précis, il faut recourir aux équations de l'Hydrodynamique. Fort heureusement, elles sont plus simples ici que dans le cas général, parce que les déplacements des molécules sont petits.

M. Poincaré établit les équations des marées d'abord, en négligeant la courbure de la Terre et sa rotation, c'est-à-dire étudie les oscillations d'un liquide pesant dans un vase. Ce problème se ramène à la détermination d'une fonction harmonique dans le vase φ ; les conditions à la limite sont les suivantes : sur les parois du vase, déplacement normal nul, $\frac{d\varphi}{dn} = 0$; à la surface, pression constante

$$\lambda^2\varphi - g\frac{d\varphi}{dz} - Ce^{\lambda t} = 0.$$

$Ce^{\lambda t}$ représente la force extérieure. C'est sur cet exemple qu'on voit nettement la simplification du problème si l'on suppose la *profondeur infiniment petite :* la recherche de la fonction $\varphi(x, y, z)$ peut se ramener à la recherche d'une fonction de deux variables seulement. Or on peut toujours considérer la mer comme infiniment peu profonde (par rapport aux longueurs d'onde des ondes de marée), et l'on n'aura à trouver qu'une fonction de deux variables.

Supposons qu'on ait fait une Carte de la Terre, c'est-à-dire une représentation conforme sur un plan ; soit k le rapport de simili-

tude de deux éléments d'arc correspondants sur la sphère et sur la Carte.

Soit $C(x, y)e^{\lambda t}$ la force extérieure. L'étude des marées revient alors au problème d'analyse suivant : il faut trouver deux fonctions $\varphi(x, y)$ et $\zeta(x, y)$ satisfaisant aux équations

$$\frac{d}{dx}\left(h_1 \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(h_1 \frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial(h_2\varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\zeta}{k^2},$$

$$\varphi\zeta = \lambda^2\varphi - \Pi'' - C,$$

où Π'' est le potentiel d'une couche sphérique de densité ζ; de plus, θ étant la colatitude, h la profondeur de la mer et ω la rotation de la Terre, on a

$$h_1 = \frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 - 4\omega^2\cos^2\theta}, \qquad h_2 = \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda} h_1.$$

De plus, sur la côte, si la profondeur est nulle, φ doit rester fini, et, si la côte est à pic, on doit avoir

$$\frac{d\varphi}{dn} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Ce problème étant résolu, la hauteur de la marée sera $\zeta e^{\lambda t}$. Si la force extérieure est nulle, $C = 0$; λ est alors une inconnue, et l'on aura les oscillations propres.

Si l'on néglige la courbure de la Terre et sa rotation, on aura

$$h_2 = 0, \qquad h_1 = h \qquad \text{et} \qquad k = 1.$$

En négligeant Π'', l'auteur examine le cas d'une profondeur constante, étudie la propagation d'une onde plane dans un canal dont la profondeur est constante ou présente une discontinuité ; il étudie aussi les ondes stationnaires dans un bassin rectangulaire à profondeur constante ou présentant une discontinuité, et résout aussi le problème pour un bassin ayant la forme d'un paraboloïde de révolution.

Si l'on néglige seulement la rotation de la Terre, on aura encore $h_2 = 0$, $h_1 = h$, mais k ne sera plus égal à l'unité ; on peut alors étudier les marées d'une mer de profondeur constante recouvrant tout le globe, même en tenant compte de Π''.

Si l'on néglige seulement la sphéricité, on aura $k = 1$, $\cos\theta = 1$. On peut encore étudier la propagation d'une onde plane dans un

canal de profondeur constante, mais cette fois il n'y a plus de *réflexion* régulière, et l'on ne trouve pas ainsi les oscillations d'un bassin rectangulaire. Mais on peut traiter le cas d'un bassin circulaire ou annulaire de profondeur constante, ou dont la profondeur n'est fonction que de la distance au centre.

Enfin, si l'on ne néglige plus rien, on n'a plus que les théorèmes de Laplace :

Si la profondeur ne dépend que de la latitude, la marée n'éprouve pas de retard. Si la profondeur est constante, la marée diurne est nulle.

On peut aussi trouver la loi de profondeur pour laquelle la marée est proportionnelle au potentiel; mais cette loi dépend de λ et est, par suite, particulière à chaque composante de la marée.

Laplace avait poussé plus loin l'étude de l'équation des marées; M. Hough, en s'inspirant directement des idées de Laplace, a déterminé complètement les oscillations propres et contraintes dans le cas d'une profondeur constante sur toute la Terre; pour cela, il représente la hauteur de la marée par une série de fonctions harmoniques, avec des coefficients indéterminés, qu'il détermine par identification. M. Poincaré entre dans les détails du calcul, et montre comment il s'applique encore si h ne dépend que de la latitude. C'est dans ce Mémoire que les marées statiques de seconde sorte se présentent pour la première fois; une question se pose : les marées statiques naturelles sont-elles de première ou de seconde sorte ?

D'abord, il n'y a pas de marées statiques, mais seulement des marées à longue période; on montre alors que si, pendant la période, le frottement a le temps de se faire sentir, on aura une marée de première sorte, sinon de deuxième. Or, M. Hough calcule que le temps nécessaire est de 10 à 20 ans; ainsi les marées annuelles ou semi-annuelles seront de deuxième sorte; la marée de période 18 ans, de première. M. Hough avait calculé ces nouvelles marées statiques dans le cas d'une profondeur constante. M. Poincaré montre comment on pourra les calculer par approximations dans le cas général.

Comme dernier cas particulier, on peut traiter complètement le cas des marées dans un réseau de canaux étroits, parce qu'alors

on n'a plus qu'une équation différentielle linéaire

$$\frac{d}{ds}\left(\sigma\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{l}{g}(\lambda^2\varphi - W),$$

s étant l'arc, σ la section, l la largeur du canal, W est le potentiel perturbateur, et la marée ζ sera

$$g\zeta = \lambda^2\varphi - W.$$

Les conditions à la limite varient suivant que le canal est fermé sur lui-même, aboutit à un cul de sac, débouche dans un Océan ou rejoint d'autres canaux.

On peut étudier les oscillations propres et contraintes d'un canal quelconque de largeur et de profondeur constantes. Un résultat particulier sur l'énergie transportée par une onde peut s'étendre au cas général ; on obtient alors la quantité d'énergie qui traverse un élément ds sur l'Océan ; plus loin, ce résultat servira à établir que le décalage de la marée ne peut expliquer le retard de la rotation de la Terre, comme le ferait croire un raisonnement incomplet ; il faudra faire intervenir le frottement.

Après tous ces résultats particuliers, l'étude du problème analytique est abordée dans toute sa généralité. Après avoir exposé rapidement l'essentiel de la théorie de l'équation de Fredholm et montré dans quels cas la méthode de Fredholm est applicable (un des noyaux réitérés reste borné), l'auteur étudie les problèmes plus simples analogues au problème des marées ; d'abord le problème de Dirichlet dans le plan, puis des problèmes analogues ; mais il rencontre tout de suite des équations de Fredholm dont le noyau ne se prête pas au traitement habituel, et il donne en passant une méthode pour traiter le cas où l'intégrale définie qui entre dans l'équation n'a un sens que si l'on prend sa valeur principale. Par l'introduction des fonctions de Green, le problème des marées est ramené à une équation de Fredholm ; mais cette équation présente bien des difficultés ; d'abord il s'y introduit une intégrale simple et une intégrale double ; ce ne serait rien si les coefficients restaient finis, mais ils deviennent infinis et d'un ordre trop grand ; malgré tout cela, on peut traiter le cas où la côte est à pic sur la mer, par une analyse qui est certes très compliquée, mais qui a l'avantage de n'employer que les données immédiates.

Si la profondeur est nulle au bord, il n'en est plus de même; M. Poincaré surmonte la difficulté dans une analyse très ingénieuse, où il remplace la condition pour φ de rester finie au bord par la condition d'être uniforme et régulière; mais pour cela, il est obligé de supposer que la profondeur est une fonction *analytique* des coordonnées sur la Carte, et de prolonger cette fonction dans le domaine imaginaire; c'est là la grosse difficulté pratique, car la profondeur de la mer ne se laisse pas aisément représenter par une fonction analytique. En tous cas, c'est la première solution du problème des marées. L'auteur en donne une seconde : il ramène le problème à un problème de calculs des variations, ce qui permet l'application d'une méthode générale de Ritz.

Dans la nature, on aura affaire à des conditions aux limites mixtes, la côte étant tantôt à pente douce, tantôt abrupte; c'est d'ailleurs ce qui arrive toujours dans les problèmes naturels, on a des conditions aux limites mixtes, mais la solution de ces problèmes présente des difficultés encore bien plus grandes.

Arrivons maintenant aux observations; les résultats des observations sont extrêmement complexes; comme on n'est pas encore arrivé à une explication rationnelle, c'est-à-dire à déduire des équations des marées les marées elles-mêmes, il faut se contenter de rattacher les faits observés à certains résultats obtenus dans des conditions particulièrement simples, où l'assimilation grossière avec les conditions naturelles semble permise; c'est ce qu'on appelle *faire la synthèse* des observations. Ainsi, Whewel la pensé que les marées naissent dans l'océan Antarctique, et il suppose qu'elles n'ont pas de *décalage* à leur origine, c'est-à-dire qu'elles ont la même phase que la force perturbatrice; puis les marées diurnes et semi-diurnes se propageraient dans les océans Atlantique, Indien et Pacifique comme dans des canaux; mais cette hypothèse simple ne s'accorde pas suffisamment avec les faits.

M. Rollin A. Harris, du Coast and Geodetic Survey, a proposé une synthèse plus satisfaisante. La théorie est fondée sur l'intuition simple suivante : lorsqu'un bassin est en résonance avec une des composantes isochrones de la marée, c'est cette composante qui va se produire dans le bassin; mais si le bassin en question est en communication avec d'autres bassins, on peut

admettre que c'est encore cette composante qui va dominer dans le bassin. Aussi M. Harris cherche à découper dans l'Océan des bassins aussi bien délimités que possible, qu'il appelle des *systèmes*. Pour cela, il utilise un certain nombre de lemmes sur les oscillations propres de bassins de formes particulières, obtenus expérimentalement (et qui, par suite, ne tiennent pas suffisamment compte de la force centrifuge composée). C'est ainsi qu'il distingue sept systèmes semi-diurnes principaux et deux systèmes diurnes principaux.

Une autre particularité des cartes de lignes *cotidales* (c'est-à-dire où la marée se produit au même moment) de Harris, est l'existence de points *amphidromiques;* il admet une vingtaine de tels points, où la marée est constamment nulle, et autour desquels rayonnent les lignes cotidales ; ces points seraient dus à la force centrifuge composée. M. Poincaré suit M. Harris dans le détail et montre les erreurs qu'il a commises en calculant les heures cotidales avec la théorie de l'équilibre.

On voit que la théorie de Harris, qui est beaucoup plus complète et plus compréhensive que celles qu'on avait tentées auparavant, ne donne pas tous les renseignements désirables sur les marées et s'appuie sur des postulats trop peu fermement établis. Peut-on essayer dès maintenant d'appliquer la solution exacte du problème des marées au calcul des marées ?

M. Poincaré déclare qu'il est permis de se demander si le travail considérable exigé serait en rapport avec un résultat forcément douteux ; il serait pourtant très intéressant de réaliser ce travail.

A. Blondel.

TEUBNER (B.-G.), 1811-1911. — Geschichte der Firma in deren Auftrag herausgegeben von Friedrich Schulze. 1 volume in-8, VI-520 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1911.

Le 11 février 1911, l'importante maison de librairie de Teubner, que nos comptes rendus ne cessent de signaler à nos lecteurs, a terminé le premier siècle de sa glorieuse et utile existence. Comme il est naturel, les chefs de la maison avaient tenu à célé-

brer ce premier centenaire par une suite de cérémonies auxquelles nous avions été invité avec plusieurs autres savants et lettrés; à notre grand regret, il nous a été impossible de nous déplacer et d'accepter l'invitation qui nous avait été si gracieusement adressée. Mais nous venons de recevoir deux Volumes dont le plus important est celui que nous signalons à nos lecteurs.

Il contient, écrit par M. F. Schulze, un aperçu détaillé et fort intéressant de l'activité déployée depuis l'origine par la célèbre maison, la biographie de son fondateur, B.-G. Teubner, né en 1784 et décédé en 1856, l'indication des publications qu'elle a entreprises successivement, dans les lettres comme dans les sciences, etc. Il paraîtra tout naturel que nous nous attachions particulièrement à ce qui concerne les Mathématiques et les sciences. Le Chapitre correspondant du Volume ne comprend pas moins de 108 pages. Par sa belle ordonnance, il est de nature à intéresser les mathématiciens. Il est d'ailleurs orné de portraits que nous avons revus avec plaisir : ceux de Gauss, de Leonhard Euler, de Jacobi, de Lobatschefski, d'Abel, d'O. Hesse, de Salmon, de Steiner, de Plücker, de Schröter, de Clebsch, de Sophus Lie, de Minkowski, de H. Grassmann, de Riemann, de E. Christoffel, de Kronecker, de Lüroth, d'A. Mayer, d'O. Stoltz, de Ch. Wiener, de W. Schell, d'A. Harnack, de H. Hankel, de J.-A. Serret, de E. Schröder, de E. Bardey, de O. Schlömilch, de F. Kohlrausch, de G. Kirchhoff, de Franz Neumaun, de G. Zeuner. En dehors de ces portraits beaucoup de *fac simile* ajoutent à l'intérêt de la publication.

Nous ne savons si le volume est en vente ; en tous cas, il fait grand honneur à ceux qui ont eu l'heureuse idée de le publier.

D. G.

SERRET (J. A.). — COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL. Sixième édition augmentée d'une Note *Sur la théorie des fonctions elliptiques*, par *Ch. Hermite*. Tome I : *Calcul différentiel*, XIII-617 pages. Tome II : *Calcul intégral*, XIII-904 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Les deux Volumes dont nous signalons l'apparition sont connus à l'avance de beaucoup de nos lecteurs. J.-A. Serret, dont nous avons suivi les leçons vers 1880, était un admirable professeur. Il

savait composer un cours et écrire un Traité. Il le savait si bien que, malgré tous les progrès que l'Analyse a faits depuis 40 ans, malgré la transformation complète qu'elle est peut-être à la veille de subir, les Ouvrages qui portent la signature de notre maître conservent aujourd'hui encore leur intérêt et peuvent rendre de grands services aux débutants. Nous devons donc ne pas nous étonner que le *Cours de Calcul différentiel et intégral* soit parvenu à sa sixième édition française, bien qu'il ait été traduit en allemand depuis longtemps; et nous devons nous féliciter que l'éditeur ait eu la pensée d'y ajouter cette Note magistrale *Sur la théorie des fonctions elliptiques* qu'Hermite avait d'abord écrite pour le Traité de Lacroix. Cette Note, qui contient le résumé des notions si fécondes qu'Hermite développait dans son Cours de la Sorbonne, est un véritable Traité de 170 pages qui fournira aux lecteurs un aperçu de tout ce qu'il y a d'essentiel dans la belle Théorie qui doit tant précisément à M. Hermite.

Nous souhaitons que l'Ouvrage obtienne le succès qu'il mérite et que, par les qualités de précision, d'ordre et de méthode qui le caractérisent, il contribue, comme par le passé, à amener de nouveaux adeptes à la Science mathématique.

G. D.

WEBER (H.) et WELLSTEIN (J.). — ENCYKLOPÄDIE DER ELEMENTAR MATHEMATIK. Dritter Band : *Angewandte elementar Mathematik*. Erster Teil : *Mathematische Physik*, mit einem Buch über Maxima und Minima von *H. Weber* und *J. Wellstein*, bearbeitet von *R.-H. Weber*. Zweite Auflage, mit 254 Figuren im Text. 1 volume in-8, XII-536 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

En janvier 1908, nous rendions compte ici même du troisième Volume de l'Encyclopédie de Mathématiques élémentaires entreprise et publiée par MM. H. Weber et J. Wellstein. Nous n'avons pas l'habitude d'étudier ici les Ouvrages d'enseignement secondaire, mais celui-ci, dès le premier jour, nous avait paru devoir mériter une exception. Nous avions signalé, en particulier, tout ce que ce troisième Volume contenait d'original et de nouveau.

Le succès qu'il a obtenu lui vaut aujourd'hui une nouvelle

édition; mais cette nouvelle édition, préparée par M. Rudolf H. Weber, professeur à l'Université de Rostok, sera beaucoup développée, et nous ne possédons encore que la première partie du Volume réservé aux applications des Mathématiques. Cette partie est exclusivement consacrée aux applications à la Physique mathématique, à la Géométrie vectorielle et à la Théorie élémentaire des Maxima et des Minima.

Les Théories graphiques, le Calcul des probabilités, un aperçu sur l'Astronomie et sur les applications des Mathématiques à la Théorie des assurances, formeront la partie essentielle de la seconde partie du Volume. Mais, dès à présent, nous devons constater que la première partie n'est pas une réimpression pure et simple, qu'elle a été développée au contraire et améliorée sur presque tous les points.

J. G.

HACK (F. L. — WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG, 1 volume in-8, 173 pages avec 15 figures, Leipzig, C.-J. Göschen, 1911.

Ce petit Volume s'adresse surtout aux étudiants de Mathématiques, de Physique, de Géométrie et d'Astronomie; un Chapitre y intéressera aussi les actuaires et ceux qui s'occupent des assurances. Un premier Chapitre de 15 pages contient l'exposé des principes de la théorie des probabilités. Le second, à peu près de même étendue, contient les applications à différents problèmes de la théorie des jeux, à celui de l'aiguille et du point couvert, etc. Le troisième traite de la loi des grands nombres : formule de Sterling, théorème de Bernoulli et ses applications. Le quatrième traite des probabilités *a posteriori*, du théorème de Bayes, de la détermination empirique des probabilités. Le cinquième est consacré à la théorie des erreurs d'observation. Enfin le sixième contient les applications du calcul des probabilités à la statistique et à la théorie des assurances.

Le Volume se termine par deux Tables très peu étendues, l'une qui donne les valeurs de l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^Y e^{-t^2}\,dt$, l'autre qui est

une Table de mortalité allemande, déduite des résultats obtenus par 28 compagnies d'assurances différentes.

J. G.

FISCHER (B.-L.). — KOORDINATENSYSTEME, 1 volume in-8, 125 pages, avec 8 figures, Leipzig, C.-J. Göschen, 1911.

Ce Volume qui fait partie, comme le précédent, de la collection Göschen, suppose la connaissance des éléments de la Géométrie analytique et de la Géométrie projective, ainsi que du Calcul infinitésimal. L'auteur s'y est proposé de développer à un point de vue général la notion fondamentale des coordonnées.

Une introduction d'une dizaine de pages conduit à la définition la plus générale des coordonnées d'un élément géométrique. Puis viennent successivement les coordonnées de Descartes, les coordonnées tangentielles, les coordonnées curvilignes, les coordonnées de la ligne droite et aussi des remarques générales sur les idées introduites par Plücker, et les coordonnées dans la Géométrie à un nombre quelconque de dimensions.

G. J.

COMBEROUSSE (CHARLES DE). — COURS DE MATHÉMATIQUES, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, à l'École Centrale des Arts et Manufactures. Quatrième édition, refondue et augmentée. Tome III : *Algèbre supérieure*, Ire partie. 1 volume in-8, XXI-767 p. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

La première Partie de l'*Algèbre supérieure* de Charles de Comberousse est rédigée pour répondre aux Programmes des Grandes Écoles du Gouvernement. Elle est divisée en cinq Livres.

Le Livre I comprend des compléments de l'Algèbre élémentaire, parmi lesquels il convient de signaler un développement très clair des principes et des règles de la théorie des déterminants, et le théorème sur le produit de deux déterminants de même degré; la théorie des fractions continues; les solutions des équations indéterminées du premier degré.

Le Livre II contient les théories des combinaisons, du binome de Newton, des puissances, racines et accroissements d'un polynome.

Le Livre III, consacré à des notions sur les séries, donne les principales règles de convergence des séries dont tous les termes sont positifs ou ont des signes quelconques, l'étude de la série e, des exemples de développements de fonctions en séries.

Le Livre IV contient l'étude générale de la fonction exponentielle, l'étude des variations de la fonction a^x et la théorie des logarithmes considérés comme exposants.

Le Livre V, qui occupe près du tiers du Volume, mérite le plus d'attirer l'attention par son originalité. C'est avec un soin tout particulier et avec un savoir approfondi que l'Auteur l'a rédigé, en s'inspirant des idées pédagogiques autrefois émises par Duhamel. Il a d'abord établi le principe sur la limite du rapport de deux quantités infiniment petites, d'où dérive le Calcul différentiel, et le principe de la limite de la somme de quantités infiniment petites dont le nombre augmente indéfiniment, qui trouve son application dans tout le Calcul intégral. Quittant les anciennes habitudes, l'Auteur a cru devoir présenter de front les notions de dérivée et de différentielle, pour éviter le danger résultant *du divorce établi au début entre deux notions inséparables, car, dans la rapidité des études actuelles, l'esprit a peine à se départir d'une première impression.*

Son Ouvrage renferme les règles de différentiation des fonctions dites algébriques, logarithmique, exponentielle, circulaires; les théorèmes, avec des exemples, sur la différentiation des fonctions implicites, sur les différentielles des divers ordres des fonctions d'une seule variable. L'Auteur s'est occupé, pour une fonction de plusieurs variables indépendantes, des dérivées et différentielles partielles successives et des différentielles totales; il n'a pas négligé le calcul des différentielles des divers ordres des fonctions implicites; il a exposé la formule de Taylor pour développer en série une fonction d'une seule variable et le cas particulier considéré par Maclaurin. Il a appliqué la formule de Maclaurin au développement de la formule du binome pour un

exposant quelconque, à celui des fonctions exponentielles, au calcul des logarithmes soit supérieurs, soit vulgaires; au développement des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arc\,tang} x$; au calcul de π. Il a démontré et appliqué la règle de L'Hospital pour la recherche des vraies valeurs des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée. Il a donné la théorie des maxima et minima des fonctions explicites et implicites soit d'une seule variable, soit de plusieurs variables indépendantes. Ce Livre se termine par l'exposé des procédés les plus simples d'intégration.

En rédigeant ainsi le Livre V l'Auteur a eu pour but de présenter un travail qui pût préparer sérieusement à l'étude complète du Calcul différentiel; du reste, lui-même justifie ainsi le plan qu'il a suivi : « Il nous a paru impossible de passer sous silence, ne serait-ce qu'à cause de la Géométrie analytique dans l'espace, les propriétés relatives aux fonctions de plusieurs variables et l'idée de *Différentielle totale*. La transition du cas d'une seule variable à celui de plusieurs variables est d'ailleurs toute naturelle et s'effectue très simplement à l'aide du principe relatif aux fonctions composées. Cette nécessité admise, les autres détails dans lesquels nous sommes entré étaient, pour ainsi dire, obligés. »

Er. L.

BOLZA (O.). — Vorlesungen über Variations-Rechnung. 1 volume in-8 de IX-705 pages, en trois fascicules. Leipzig, Teubner, 1908-1909.

En principe, le présent Ouvrage est une réédition des *Lectures on the Calculus of Variations* [1], publiées en 1904 à Chicago.

En fait, la rédaction primitive a reçu de nombreux compléments, et son étendue a été notablement plus que doublée. Nous n'indiquerons ici que les points sur lesquels ont porté principalement les modifications.

L'étude de la variation première est précédée de quelques propriétés générales des maxima et minima (un Chapitre spécial et un appendice final sont, d'autre part, consacrés au rappel des

---

[1] Pour ces dernières, *voir* le Tome XXV du *Bulletin*, p. 55-57.

principes relatifs aux fonctions de variables réelles sur lesquels on a à s'appuyer au cours de l'Ouvrage).

La formule qui régit le cas des limites variables, rattachée primitivement à la fonction Σ de Weierstrass, est, cette fois, plus naturellement à notre avis, obtenue sous sa forme directe et classique.

Fidèle au plan qu'il avait suivi en 1904, l'auteur commence par montrer, après l'étude de la variation seconde, comment cette étude permet de déceler rigoureusement l'extremum *faible*. Il insiste un peu plus longuement, cette fois, sur les raisons qui rendent insuffisant l'ancien raisonnement.

Passant aux conditions suffisantes déduites de la méthode de Weierstrass, il peut, grâce à son Mémoire inséré en 1906 dans les *Trans. of the Amer. math. Soc.*, triompher de la difficulté qu'il avait signalée, correspondant aux lignes variées sur lesquelles y' a de très grandes valeurs.

La première addition importante au point de vue de l'étendue intervient ici : elle concerne les relations du Calcul des Variations avec les équations aux dérivées partielles du premier ordre. A ce Chapitre est joint l'exposé d'une méthode pour l'établissement de l'équation différentielle d'Euler, due à M. Carathéodory (*Gött. Nachr.*, 1905).

C'est après cette première série de considérations, avant de passer à la représentation paramétrique, que sont rappelées une série de propositions d'Analyse ordinaire, propriétés classiques des fonctions implicites, théorèmes d'existence relatifs aux équations différentielles et continuité des solutions considérées comme fonctions des données initiales, avec application aux extrémales, pendant que d'autres notions plus élémentaires (ensembles, bornes supérieures et inférieures, etc.) sont renvoyées à l'appendice dont nous avons parlé plus haut.

L'auteur n'est pas, nous avons eu déjà occasion de le dire précédemment, de ceux qui se sont hypnotisés sur l'importance de la *représentation paramétrique* et de son introduction systématique par Weierstrass.

Nous ne saurions toutefois souscrire même à l'appréciation qu'il met en note (p. 189), attribuant à Weierstrass la découverte de cette notation. Elle remonte aux origines mêmes du Calcul des

Variations, quoique Weierstrass ait, au moins dans le plan, poussé les calculs plus loin que ses devanciers. Tout au plus peut-on dire que cette forme donnée à la question était particulièrement propre à l'introduction de la quantité $\mathcal{E}$ par laquelle il a pu, du premier coup, donner au Calcul des Variations sa forme parfaite et définitive.

Un important Chapitre de l'édition actuelle est consacré au théorème, essentiel, comme on sait, par un grand nombre d'applications, qu'on doit à M. Osgood. L'auteur en indique, en s'inspirant d'un travail de Carathéodory, une modification relative à l'extremum au voisinage d'un point.

Le Chapitre relatif à la généralisation de la notion d'intégrale garde, à peu près, sa forme primitive. Il est, par contre, transposé et placé avant le cas des extrémités variables. Celui-ci est développé notablement plus que dans la rédaction primitive, plus même, pourrait-on dire, qu'il n'était strictement indispensable, étant donné que, du moins dans le cas d'une seule extrémité mobile, le problème n'offre aucune difficulté nouvelle. Pour le résoudre, l'auteur introduit, en quelque sorte, à nouveau, la fonction de Hamilton, qu'il ne rattache pas purement et simplement au Chapitre consacré précédemment aux Équations aux dérivées partielles.

Après le développement de la méthode de M. Darboux sous la forme générale que lui a donnée M. Kneser, est présentée l'étude des solutions discontinues telle que le permettent aujourd'hui les résultats de M. Carathéodory.

Les travaux du même géomètre ont permis également de simplifier notablement l'exposition de la méthode de M. Hilbert et des travaux analogues par lesquels l'existence du minimum absolu a pu être établie.

On notera l'insertion, à cet endroit, du théorème connu de M. Darboux sur la cessation du minimum absolu avant celle du minimum relatif, c'est-à-dire avant le foyer conjugué.

Conformément à la marche déjà suivie dans l'Ouvrage de 1904, c'est seulement après cette étude complète du cas le plus simple qu'est présentée *ab ovo* (c'est-à-dire en commençant par la variation première) celle des problèmes isopérimétriques. En ce qui concerne l'établissement des conditions suffisantes, on sait que

les hypothèses ont été heureusement simplifiées dans un travail de M. Lindeberg. L'emploi de la méthode de M. Lindeberg permet à M. Bolza de réaliser un important progrès dans ce Chapitre.

Celui qui est consacré aux problèmes de Lagrange et de Mayer est entièrement nouveau. Il est très complètement développé, le problème envisagé étant surtout celui de Lagrange. L'auteur traite avec soin la variation seconde et fait remarquer, avec juste raison, que cette étude est particulièrement indispensable dans ce cas général puisque la nécessité de la condition de Jacobi n'est établie que par cette voie, la méthode des enveloppes n'y ayant pas été étendue. Il développe également les travaux qu'on doit à Mayer sur la généralisation à ces problèmes de la notion de familles transversales d'extrémales.

L'Ouvrage se termine par l'extension des principes précédents aux intégrales doubles. Le problème de Lagrange et de Mayer est, comme de juste, excepté, puisqu'une théorie satisfaisante n'en pourra, sans doute, être donnée avant qu'on n'obtienne, sur les solutions des équations aux dérivées partielles, des données que nous sommes loin encore de posséder.

En somme, M. Bolza s'est préoccupé, non seulement de tenir son Ouvrage au courant des progrès de la Science, mais aussi de le compléter en y faisant figurer les matières qu'il avait délibérément laissées de côté dans sa première exposition. Il s'est constamment efforcé d'y arriver en sacrifiant le moins possible de ces qualités de clarté et de simplicité par lesquelles se distinguent si heureusement les *Lectures* de 1904.

J. Hadamard.

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE DU TYPE VOLTERRA;

PAR M. T. LALESCO.

1. Dans un travail antérieur [1] nous avons appliqué la méthode des approximations successives à l'étude de l'équation intégrale

$$(1) \qquad \int_{\alpha x}^{x} N(x, s)\, z(s)\, ds = F(x)$$

dans le cas $\alpha \neq 1$ et $N(0, 0) \neq 0$. L'équation (1), étudiée pour la première fois par M. V. Volterra, intervient dans un important problème de la théorie des équations linéaires hyperboliques aux dérivées partielles du deuxième ordre et M. E. Goursat a montré, d'une manière extrêmement élégante, comment la méthode de Riemann conduit immédiatement dans cette théorie à l'équation (1). Les recherches de MM. A. Myller [2] et M. Picone [3] sur le même problème conduisent au fond à la même équation, mise seulement sous une autre forme. Au point de vue théorique, cette équation présente aussi un intérêt particulier, car elle constitue une généralisation des équations différentielles linéaires, digne de toute attention, puisqu'elle est fournie par la théorie des équations aux dérivées partielles. Définissons l'opération

$$(2) \qquad \int_{\alpha x}^{x} z(s)\, ds = z_1(x),$$

analogue à l'opération ordinaire d'intégration, et désignons par

(1) T. LALESCO, *Sur l'équation de Volterra* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1908).

(2) A. MYLLER, *Randwertaufgaben etc.* (*Math. Ann.*, Bd. LXVIII, p. 75-106).

(3) M. PICONE, *Sulle equazione del tipo iperbolico* (*Circolo di Palermo*, t. XXX, 1910, § 3, p. 368).

$\varphi_n(x)$ la fonction obtenue par l'application n fois répétée de cette opération ; si le degré de $N(xy)$ par rapport à x est fini et égal à p, l'équation

$$(3)\qquad \int_{\alpha(x)}^{x} N(xs)\varphi(s)\,ds = F(x)$$

est une relation linéaire entre $\varphi(x)$ et ses intégrales successives du type (2) jusqu'à l'ordre p. Ces équations jouissent des propriétés analogues à celles des équations différentielles ordinaires ; énonçons seulement que la théorie de Fuchs peut aussi être généralisée pour les équations (3), pour montrer à quel point se maintient l'analogie avec les équations différentielles linéaires.

Le problème que nous nous posons est le suivant :

Supposons la fonction $N(xy)$ et $F(x)$ finies lorsque leurs arguments se trouvent à l'intérieur de l'intervalle $(0, a)$; supposons de même que, dans cet intervalle, la courbe $y = \alpha(x)$ se trouve située entièrement d'un même côté de la bissectrice $y = x$, par exemple au-dessous; *il s'agit dans ces hypothèses de déterminer une solution finie de* (3) *dans l'intervalle considéré.*

Une condition nécessaire apparaît immédiatement. Faisons en (3) $x = 0$; on obtient $F(0) = 0$. *Le second membre doit donc s'annuler pour* $x = 0$; soit

$$F(x) = x^{\mu} F_1(x), \qquad F_1(0) \neq 0.$$

Nous nous bornerons à étudier le cas très général où $\mu > 1 > 0$.

Dans cette Note, nous présenterons sous une autre forme la résolution de (3), en considérant aussi le cas où la courbe $y = \alpha(x)$ est *tangente* à la bissectrice $y = x$ (1).

2. Prenons pour inconnue, à la place de $\varphi(x)$, la fonction

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{x} \varphi(s)\,ds$$

et intégrons par parties dans le premier membre de l'équation (3) ; nous obtenons

$$(4)\qquad N(xx)f(x) - \int_{\alpha(x)}^{x} N_x(xs)f(s)\,ds = F(x);$$

(1) Ce cas a été traité, dans une hypothèse particulière, par M. A. Myller.

par conséquent, si $N(x,x)$ est différent de zéro dans l'intervalle $(0, a)$, nous avons réduit notre problème à la résolution de l'équation (4), qui est du type simple, et à la résolution de l'équation intégrale

$$(5) \qquad \int_{\alpha(x)}^{x} \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Il reste donc à étudier cette dernière équation. Sa solution, au point de vue formel, est immédiate par un procédé d'itération; posons en effet $\alpha_n(x) = \alpha[\alpha \ldots \alpha(x)]$. On déduit de (5)

$$\int_{\alpha_{n+1}(x)}^{\alpha_n(x)} \varphi(s)\, ds = f[\alpha_n(x)],$$

et par conséquent

$$(6) \qquad \int_{\alpha_{n+1}(x)}^{x} \varphi(s)\, ds = \sum_{p=1}^{n} f[\alpha_p(x)]$$

C'est ici qu'intervient la nature particulière de la courbe $y = \alpha(x)$. Prenons d'abord le cas où la courbe n'est pas tangente à la bissectrice; on aura, dans ce cas, une inégalité de la forme

$$|\alpha(x)| \leq kx \qquad (k < 1)$$

vérifiée dans tout l'intervalle; on en déduit

$$|\alpha_p(x)| \leq k^p x,$$

et par conséquent

$$\lim_{p=\infty} \alpha_p(x) = 0.$$

Si donc l'on fait $p = \infty$ dans l'équation (6), on obtient :

$$(7) \qquad \int_{0}^{x} \varphi(s)\, ds = \sum_{p=1}^{\infty} f[\alpha_p(x)],$$

à condition toutefois que la série du second membre soit convergente. Or la relation (4) nous montre que, en tenant compte de la forme de $F(x)$, on aura aussi

$$f(x) = x^{\nu} f_1(x) \qquad (\nu > 0)$$

et par conséquent

$$|f(x)| \leq A x^{\nu}.$$

Il résulte de là que

$$|f[z_p(x)]| < \Lambda k^{2p} x^2,$$

ce qui montre que la série du second membre de (7) est absolument et uniformément convergente dans notre intervalle, *puisque* $k^2 < 1$.

On peut donc dire :

Si $F(x) = x^\mu F_1(x)$ $(\mu > 0)$, *l'équation* (3) *a une solution définie par sa première intégrale à l'aide d'une série absolument et uniformément convergente.* Cette solution est aussi la seule, puisque (4) n'a qu'une seule solution, d'après la théorie bien connue de l'équation de Volterra du type simple. De même l'équation (5) sans second membre n'admet que la solution identiquement nulle, car sa première intégrale est dans ce cas identiquement nulle; donc l'équation (5) aussi n'a jamais qu'une seule solution.

Il est évident maintenant que, si nous voulons obtenir directement $z(x)$, des conditions sur la dérivabilité de $F(x)$ sont indispensables; étudions le cas où $z(x)$ *est dérivable et* $F(x)$ *admet une dérivée lipschitzienne.* Dans ce cas, la série des dérivées

$$\sum_{p=1}^{\infty} f'[z_p(x)]\, z_p'(x) \tag{8}$$

est aussi absolument et uniformément convergente. En effet, on a

$$f'[z_p(x)] = B z_p(x)$$

et

$$|z_p(x)| < M.$$

Nous obtenons donc une majorante identique à celle que nous avons rencontrée précédemment. On peut donc dire :

Si $z(x)$ *est dérivable et si* $F(x)$ *admet une dérivée lipschitzienne, l'équation* (3) *admet une solution et une seule donnée par une série absolument et uniformément convergente dans l'intervalle du problème.*

3. Considérons maintenant le cas où la courbe $y = z(x)$ est tangente à la bissectrice; on pourra écrire dans ce cas

$$y = z(x) = x - \chi(x), \tag{9}$$

$\chi(x)$ étant une fonction dont l'ordre infinitésimal est plus grand que 1; nous étudierons le cas très général où cet ordre μ est bien déterminé, c'est-à-dire nous supposons $\chi(x)$ de la forme

$$\chi(x) = x^{1+\mu}\chi_1(x) \qquad [\chi_1(0) \neq 0] \qquad (\mu > 0).$$

Il s'agit de démontrer, dans ce cas aussi, que la série du second membre de (7) est absolument et uniformément convergente.

On a par définition

$$\alpha_{p+1}(x) = \alpha_p(x) - \chi[\alpha_p(x)] = \alpha_p(x) - [\alpha_p(x)]^{1+\mu}\chi_1[\alpha_p(x)].$$

On en déduit

$$\frac{\alpha_p(x) - \alpha_{p+1}(x)}{[\alpha_p(x)]^{\mu+1}} = \chi_1[\alpha_p(x)]$$

et si p croît indéfiniment

$$\lim_{p=\infty} \frac{\alpha_p(x) - \alpha_{p+1}(x)}{[\alpha_p(x)]^{1+\mu}} = \chi_1(0) \neq 0.$$

Ceci montre que les séries ayant pour termes généraux $[\alpha_p(x) - \alpha_{p+1}(x)]$ et $\alpha_p(x)^{1+\mu}$ sont de même nature; or la première est évidemment convergente, il résulte donc bien la convergence de la série $\Sigma[\alpha_p(x)]^{1+\mu}$.

Remarquons maintenant que la formule de la moyenne, appliquée à la relation (5), nous montre, eu égard à (9), que $f(x)$ doit être *nécessairement* de la forme

$$f(x) = x^{1+\mu} f_1(x). \tag{10}$$

Dans ce cas, la série (7) admet pour majorante la série $\Sigma[\alpha_p(x)]^{1+\mu}$ dont la convergence vient d'être établie; la série (7) est donc aussi convergente dans les mêmes conditions.

Remarquons enfin que, pour avoir la relation (10), il faut et il suffit d'après (4) que $F(x)$ soit lui-même de cette forme. On peut donc dire :

Lorsque la courbe $y = \alpha(x)$ est tangente à la bissectrice et si l'ordre de contact est μ (μ quelconque), pour que le problème soit possible, il est nécessaire et suffisant que l'ordre infinitésimal en α de $F(x)$ soit au moins égal à $\mu + 1$. Dans ce cas l'équation (3) *admet une solution et une seule donnée par sa*

première intégrale, à l'aide d'une série absolument et uniformément convergente dans l'intervalle considéré.

Si de plus, $\alpha(x)$ est dérivable et si $F(x)$ admet une dérivée lipschitzienne, l'équation aura une solution et une seule, donnée directement à l'aide d'une série absolument et uniformément convergente en $(0, x)$.

4. Ce théorème a de nombreuses applications dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. Pour en donner un exemple, prenons le problème suivant, étudié par MM. *E. Goursat* et *E. Picard :*

Déterminer la solution finie et continue de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z = 0,$$

qui sur les courbes données $y = \alpha_1(x)$, (C_1) et $y = \alpha_2(x)$, (C_2) est égale à $\beta_1(x)$ et $\beta_2(x)$ respectivement.

Dans son Mémoire, M. E. Goursat emploie la méthode des approximations successives et indique, à la fin, comment la méthode de Riemann permet de rattacher cette question à la théorie des équations intégrales. Cette dernière méthode, particulièrement simple et qui a d'ailleurs la relation la plus étroite avec la méthode systématique que M. D. Hilbert emploie pour les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles du type elliptique, ramène le problème à la résolution d'une équation intégrale du type (1) et va nous donner un résultat intéressant aussi pour le cas où les courbes C_1 et C_2 sont tangentes entre elles.

Nous appliquerons donc, avec M. Goursat, la formule de Riemann

$$z_M = \frac{1}{2}(uz)_A + \frac{1}{2}(uz)_B + \int_{AC_1B} (M\,dy - N\,dx)$$

avec

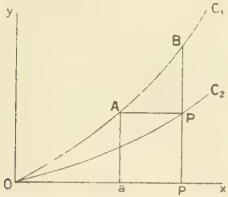
$$M = z\left(au - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}u\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$N = z\left(bu - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}u\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Pour un point P de la courbe C_2, l'intégrale curviligne $\widehat{AC_1B}$ est

prise de A à B le long de la courbe C_1 (*voir* la figure). Ceci nous donne l'équation

$$(11)\quad \beta_2(x) = \frac{1}{2} u_A \beta_1[h(x)] - \frac{1}{2} u_B \beta_1(x) - \int_{h(x)}^{x} \Lambda(x, s) z(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_{h(x)}^{x} u(x, s)\left[\frac{dz}{dy}\alpha_2(s) - \frac{dz}{dx}\right]_s ds$$



où $\Lambda(xs)$ désigne une fonction connue, $z(s) = z[s, \alpha_1(s)]$ et $u(xs)$ la fonction de Gren $u[x, \alpha_2(x); s, \alpha_1(s)]$; enfin $h(x) = Oa$.

L'équation (11) est une équation intégrale en $\left[\frac{dz}{dy}\alpha_2(s) - \frac{dz}{dx}\right]_s$; une fois cette fonction déterminée, la solution de notre problème est donnée toujours par la formule de Riemann. Or l'équation (11) est une équation intégrale *à noyau différent de zéro* pour $x = s = 0$, puisque $u(0, 0) = 1$; par conséquent, lorsque les courbes C_1 et C_2 ne sont pas tangentes entre elles, le théorème établi au n° 2, nous montre que l'équation (11) admet une seule solution. C'est la démonstration de M. E. Goursat.

Passons maintenant au cas où les courbes C_1 et C_2 sont tangentes entre elles; remarquons pour cela d'abord que

$$h(x) = Oa = Op - ap = x - AP = x - x^{1+\mu}\chi(x),$$

μ désignant l'ordre de contact des courbes C_1 et C_2. En vertu du théorème établi au n° 3, pour que l'équation (11) admette dans ce cas une solution, il est nécessaire et suffisant que son second membre soit d'un ordre infinitésimal au moins égal à $1 + \mu$. Or ce second membre est égal à

$$\beta_2(x) - \frac{1}{2}(1 + ax + \ldots)\beta_1[h(x)] - \frac{1}{2}(1 + bx + \ldots)\beta_1(x) - \int_{h(x)}^{x} \Lambda(xs) z(s)\, ds.$$

L'intégrale est évidemment d'un ordre infinitésimal au moins égal à $1+\mu$; il reste donc la partie

$$\beta_2(x) - \frac{1}{2}\beta_1[h(x)] + \frac{1}{2}\beta_1(x) = \beta_2(x) - \beta_1(x) - \frac{1}{2}\{\beta_1[h(x)] - \beta_1(x)\},$$

dont l'ordre infinitésimal est égal à celui de

$$\beta_2(x) - \beta_1(x).$$

Nous obtenons donc ce résultat :

L'ordre infinitésimal de $\beta_2(x) - \beta_1(x)$ *doit être au moins égal à* $1-\mu$.

On peut présenter ce résultat sous la forme géométrique suivante :

Les courbes de l'espace

$$(G_1) \qquad y = \alpha_1(x), \qquad z = \beta_1(x),$$
$$(G_2) \qquad y = \alpha_2(x), \qquad z = \beta_2(x),$$

par lesquelles doit passer la surface intégrale, doivent avoir un contact d'ordre au moins égal à celui des courbes données (C_1) *et* (C_2).

Dans ce cas et seulement dans ce cas, il existe une solution et une seule.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Encyclopédie des Sciences mathématiques. T. I, vol. II, fasc. 2. In-8, 96 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75.

Enzyklopädie d. mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Gottingen, Leipzig, Munchen u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. III. Bd. : Geometrie. Red. v. W.-Fr. Meyer. 1. Tl. 4. Heft. In-8, 481-770 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 9 m.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

A.-N. WHITEHEAD, Sc. D., F.R.S., Fellow and late lecturer of Trinity College, Cambridge; and B. RUSSELL, M. A., F.R.S., Lecturer and late fellow of Trinity College, Cambridge. — PRINCIPIA MATHEMATICA. Vol. I, 666 p. Cambridge, University Press, 1910.

On doit déjà à la collaboration de MM. Russell et Whitehead deux Ouvrages importants sur la Logique mathématique : l'*Algèbre universelle* de Whitehead, parue en 1898; les *Principes des Mathématiques* de Russell, parus en 1903 (¹). Dans ce dernier Livre, en particulier, les auteurs présentaient un système de notions primitives et d'axiomes logiques qui leur suffisait à rendre compte des idées directrices de la Mathématique. Les controverses soulevées par cette audacieuse entreprise, le progrès même de leur réflexion les ont amenés à généraliser leur théorie primitive, si bien qu'au lieu du second Volume des premiers *Principes des mathématiques* paraît aujourd'hui le premier Volume de *Principia mathematica*, où l'exposition du système est reprise au début.

Ce premier Volume comprend la Logique mathématique et les Prolégomènes à l'arithmétique cardinale; il s'arrête à la définition du nombre. L'arithmétique cardinale et ordinale, la théorie des séries, la théorie de l'espace feront l'objet de deux et peut-être trois autres Volumes. Une longue introduction explique les notations adoptées et justifie les changements apportés à l'exposition primitive. Pour nous conformer à cet ordre, nous signalerons au préalable les modifications et nous indiquerons ensuite les lignes essentielles du nouveau système.

La théorie des mathématiques de MM. Russell et Whitehead se relie au mouvement d'investigation des notions mathématiques fondamentales, qui s'est manifesté dès la fin du siècle dernier.

(¹) *Voir* les Comptes rendus de ce Volume dans le Tome XXVIII, 2e série du *Bulletin* (1904, p. 129-147).

Elle s'inspire notamment des travaux de Dedekind, et de ceux de Cantor sur la théorie des ensembles. Mais on sait que des paradoxes s'étaient rencontrés dans le développement de cette théorie ; nos auteurs ont travaillé à les résoudre par la théorie des types, qui est la nouveauté essentielle du Livre.

Ils ont montré que ces paradoxes étaient des cas particuliers d'un sophisme, déjà connu des anciens sous la forme de l'Épiménide, qui consiste à admettre qu'une collection d'objets peut contenir des membres qui ne peuvent être définis que par le moyen de la collection elle-même, prise dans sa totalité. Par exemple, la démonstration bien connue de Burali-Forti, qu'il y a et qu'il n'y a pas de nombre ordinal de la série de *tous* les ordinaux, repose sur cet usage illégitime du mot *tous*. D'une manière générale, si φx est une valeur quelconque d'une fonction propositionnelle (c'est-à-dire d'une fonction qui, pour toute valeur donnée à la variable, devient une proposition), et $\varphi\hat{x}$ la fonction prise en elle-même, l'expression $\varphi(\varphi\hat{x})$ n'a pas de sens et conduit fatalement aux contradictions précédentes (p. 43).

Pour éviter l'usage inconscient de telles expressions dans le calcul, il faut que nous puissions expliciter cette condition que les valeurs pour lesquelles φx a un sens appartiennent à un certain *type*. C'est à ce besoin que répond la hiérarchie des types de fonctions et propositions. On part des propositions élémentaires, dont les termes sont les *individus* ; ils constituent le premier type. (Il est clair que ces distinctions ne sont que *relatives*.) Les fonctions, dont les arguments ne peuvent représenter que des individus, sont les *matrices du premier ordre*, d'où l'on dérive les fonctions du premier ordre et les propositions du premier ordre, en transformant dans le premier cas quelques variables, dans le second cas toutes les variables en variables apparentes. Les fonctions, dont les arguments représentent non seulement des individus mais des fonctions du premier ordre, sont les *matrices du second ordre* et ainsi de suite (p. 51 et suiv.).

On a ainsi le moyen théorique d'éviter les paradoxes du transfini, en explicitant le type d'arguments de toute fonction considérée ; en particulier, la contradiction de Burali-Forti disparaît si on limite *le nombre ordinal de tous les ordinaux* aux ordinaux d'un type donné. Mais il arrive fréquemment qu'en mathématiques on

use d'expressions qui présupposent *toutes les propriétés d'x* ; il reste donc à expliquer comment cet usage est légitime. Si nous appelons *fonction prédicative* $\varphi!\hat{x}$ une fonction qui est de l'ordre immédiatement supérieur à sa variable, on voit que, parler de *toutes les propriétés d'x*, c'est en somme s'exprimer de manière à réduire le type d'une fonction quelconque φx à une fonction prédicative du premier ordre. Or, c'est précisément ce que nous supposons implicitement, quand nous faisons usage dans un raisonnement de la notion de *classe;* poser $x \varepsilon \alpha$ comme équivalent à φx, c'est imposer au type de φx la réduction que nous venons de décrire. Par là apparaît un axiome nouveau, implicitement contenu dans le mode usuel de raisonner sur les classes, c'est l'axiome de réductibilité, d'après lequel on peut réduire le type d'une fonction quelconque à une fonction prédicative du premier ordre (p. 58). En symboles [1]

$$\vdash : (\exists f) : \varphi x . \equiv_x . f!x .$$

S'il s'agit d'une fonction de deux variables, le même axiome explique l'usage logique de la notion de *relation*

$$\vdash : (\exists f) : \varphi xy . \equiv_{xy} . f!xy .$$

Ainsi se trouvent généralisées les notions usuelles de classe et relation, et leur usage logique est entièrement expliqué par la théorie des fonctions propositionnelles, fondée sur la hiérarchie des types.

Nous pouvons maintenant esquisser les traits essentiels du système de notions et propositions primitives par lequel les auteurs rendent compte des raisonnements mathématiques.

La première Partie du Livre s'ouvre sur une théorie générale de la déduction, forme essentielle de la démonstration mathématique. Considérée sous son aspect le plus simple, la déduction est définie comme la *relation d'implication* entre propositions: l'étude du procédé déductif se confond donc avec l'étude des propriétés de l'implication, et celles-ci s'expriment aisément en fonction des six notions primitives suivantes : (1) l'idée de *proposition élémen-*

---

[1] Nous rappelons plus loin (p. 120) le sens de la plupart de ces notations. On sait que « $x \varepsilon \alpha$ » signifie « x est un α ».

taire (ceci est rouge), (2) la *fonction propositionnelle élémentaire* (x est rouge), (3) l'*assertion*, symbolisée par t, (4) l'*assertion d'une fonction propositionnelle* t.φx, (5) la *négation* $\sim p$, (6) la *disjonction* ou somme logique de deux positions $p \vee q$. Dix propositions primitives explicitent l'usage logique de ces notions, à l'aide desquelles sont ensuite facilement définies l'implication

$$p \supset q . = . \sim p \vee q \; \mathrm{D}f$$

et le produit logique

$$pq . = . \sim (\sim p \vee \sim q) \; \mathrm{D}f.$$

En somme, le calcul logique se trouve constitué en attribuant à toute proposition p une *valeur de vérité* (Frege), à savoir le vrai ou le faux, et en traitant cette valeur à l'aide des fonctions précédemment définies et des axiomes qui expriment leurs propriétés. Les fonctions logiques, *considérées ici*, sont donc des fonctions de « valeurs de vérité »; ce sont les seules qui soient requises pour l'expression de la pensée mathématique. Boole avait déjà indiqué que le calcul logique peut se comparer au calcul numérique où chaque grandeur est assujettie à ne prendre que les valeurs 0 (faux) ou 1 (vrai) (p. 95 et suiv.).

Cette théorie élémentaire de la déduction est ensuite étendue, par un petit nombre de définitions, aux cas où l'on a affaire à des expressions qui ne sont pas simplement l'assertion d'une fonction élémentaire, mais affirment soit la totalité, soit un certain nombre de ses valeurs. Dans ces expressions, x devient alors une *variable apparente*, ce qu'on exprime par les formes $(x)\varphi x$ (c'est-à-dire φx pour *toutes* valeurs d'x), et $(\exists x)\varphi x$ (c'est-à-dire φx pour *quelques* valeurs d'x). De par la théorie des types, il serait enfin nécessaire de définir à nouveau les notions fondamentales du calcul à chaque degré de la hiérarchie, mais l'ambiguïté même de ces notions relativement à leur type permet d'éviter, en pratique, ces répétitions; il suffit que le type relatif des fonctions en question soit rigoureusement préservé dans le calcul (p. 132 et suiv.).

La théorie de la déduction est ainsi constituée dans sa généralité; les auteurs montrent ensuite comment on peut en dériver les formes particulières qu'elle revêt dans le calcul des classes et le calcul des relations. Deux fonctions sont dites avoir même exten-

sion lorsqu'elles sont équivalentes pour toutes valeurs de la variable; une fonction de fonction est dite *extensive* lorsque, sans changer sa valeur, on peut remplacer la fonction argument par une fonction de même extension. Dès lors, il devient naturel de considérer la fonction de fonction comme fonction de l'extension de la variable, représentée par le symbole $\hat{z}(\varphi z)$ (la classe déterminée par $\varphi \hat{z}$). Au moyen de l'axiome de réductibilité, on démontre que ces symboles ont toutes les propriétés formelles des classes. En considérant les fonctions de deux variables, la théorie générale des relations est, en même façon, rattachée à la théorie des fonctions propositionnelles (p. 195 et 211).

L'idée de *fonction descriptive* est, à vrai dire, la véritable transition entre le calcul purement logique et les propositions des mathématiques. Une expression descriptive est une expression de la forme : le terme qui a telle ou telle propriété. En raison de la forme grammaticale, nous considérons généralement ces phrases comme dénotant un objet simple, comme il arrive pour les noms propres. Mais cette interprétation conduit au fond à affirmer l'identité de deux objets différents, ce qui est logiquement absurde. En réalité, dans les phrases de ce genre, l'identité est affirmée entre les variables de deux fonctions propositionnelles différentes, et leur traitement logique est assuré par conséquent au moyen des conditions formulées dans la hiérarchie des types. Si en particulier nous représentons l'*x qui satisfait* φx par $(\iota x)(\varphi x)$, la définition suivante explicite son usage logique :

$$[(\iota x)(\varphi x)].\psi(\iota x)(\varphi x).=:(\exists b):\varphi x.\equiv_x.x=b:\psi b\ \mathrm{D}f,$$

b étant une constante (p. 190).

Or, la notion de relation donne naissance à un grand nombre de fonctions descriptives, usitées en mathématiques. C'est, en premier lieu, la forme même de toutes les fonctions ordinaires des mathématiques, telles que x^2, $\sin x$, $\log x$, etc. : le terme y qui a la relation R à x. En symboles

$$\mathrm{R}^{\iota}x=(\iota x)(x\mathrm{R}y)\ \mathrm{D}f.$$

Ce sont ensuite les notions de *converse d'une relation donnée* $\mathrm{Cnv}'\mathrm{P}$ ou $\breve{\mathrm{P}}$, de *classe des termes avant une relation* R *à un*

terme donné $\vec{R}`y$ et son inverse $\overset{\leftarrow}{R}`x$, de *domaine* D`R, *codomaine* Cd`R et *champ* C`R d'une relation donnée.

En particulier la définition d'une relation à domaine, codomaine et champs limités doit être à la base de la théorie des séries. Il faut citer enfin la définition des fonctions descriptives plurales, dénotant la collection des termes qui ont une relation R aux membres d'une classe donnée, R``β; cette idée recouvre la notion de corrélation entre les membres de deux classes, et prépare par là la définition cantorienne du nombre cardinal; en tant qu'elle permet de symboliser l'ensemble des nombres inférieurs ou supérieurs à une limite donnée, elle joue aussi un rôle important dans la théorie des nombres réels (Part. I, Sect. D).

L'armature logique de la mathématique se trouve ainsi complétée. La seconde partie est consacrée à rassembler les éléments de la théorie de l'arithmétique, et à les définir au moyen des notions précédentes. Parmi les principales définitions introduites, il convient de citer celles des classes simples et des couples, qui serviront à la définition des cardinaux 1 et 2. Différentes fonctions descriptives importantes sont ensuite étudiées : en particulier la classe des sous-classes d'une classe donnée α, Cl`α; la classe des sous-relations de P, Rl`P; la relation qui rapporte un terme à plusieurs, plusieurs termes à un seul, un seul terme à un seul terme, par quoi l'on arrive à la notion importante de la *similarité entre deux classes* (p. 346 et suiv.).

Il importe de signaler particulièrement la théorie des *sélections*, qui présente une définition tout à fait générale du procédé multiplicatif, et permet par conséquent de l'exposer sans tenir compte du nombre fini ou infini des facteurs. Au lieu de considérer, suivant l'usage reçu, la multiplication comme un procédé abrégé d'addition, on définit une classe μ formée en prenant un terme et un seul de chacune des classes, membres d'une classe de classes K; on appelle *relation sélective* la relation d'une classe au terme qui la représente et l'on étudie la fonction ε_{Δ}K, qui représente la classe des relations sélectives d'une classe de classes K. Il est facile de voir que le nombre de ces relations est précisément celui qui est usuellement défini comme le produit des termes des classes de K; mais le procédé multiplicatif se trouve défini dans sa forme générale et sans restrictions.

La définition précédente est facilement étendue des classes aux relations. Il devient possible dès lors de se passer, dans la majorité des cas, des axiomes contestés tels que l'axiome de Zermelo ou l'*axiome multiplicatif* équivalent de M. Whitehead. Dans certains cas, pourtant, signalés par les auteurs, il semble inévitable de les introduire dans l'hypothèse des théorèmes (p. 505).

Le Livre se ferme sur une généralisation du même genre, opérée sur la relation *inductive*. Au lieu de l'étudier sous la forme particulière de l'induction mathématique, les auteurs la définissent, à la suite de Frege, sous les traits d'une relation beaucoup plus abstraite, la *relation ancestrale* $R^{*\cdot}$. Comparée à la relation originelle R, elle apparaît comme la relation d'ancêtre à descendant par rapport à la relation de père à fils. Ses propriétés caractéristiques se laissent symboliser dans la formule

$$R_* = \hat{a}\hat{z}\{a \varepsilon C^{\cdot}R : R^{\cdot\cdot}\mu \subset \mu . a \varepsilon \mu . \supset_{\mu} z \varepsilon \mu\} Df.$$

Appliquée aux entiers finis, elle définit la propriété inductive usuelle (p. 569).

Ainsi se trouvent rassemblés les éléments de la reconstruction des mathématiques, à quoi seront consacrés les Volumes suivants, le second devant s'ouvrir sur la définition du nombre cardinal. Ce qui précède permet toutefois de comprendre le procédé constant des auteurs, qui consiste à dégager les notions mathématiques de l'intuition concrète, à les définir dans leur *usage* rationnel, et à généraliser le mode de raisonnement qui se trouve ainsi décrit. Si l'on se rappelle notamment la généralisation des idées de produit et d'induction, on ne saurait ne pas admirer la pénétration avec laquelle les auteurs se sont appliqués à fixer l'être abstrait de ces notions mathématiques.

Il convient surtout de souligner l'absence de dogmatisme qui caractérise l'œuvre et que les controverses antérieures n'avaient peut-être pas permis de remarquer suffisamment. La prudence avec laquelle les auteurs avancent et justifient leurs axiomes témoigne nettement qu'il n'est pas dans leur intention de définir une fois pour toutes le champ des mathématiques. Le seul reproche technique que nous serions tentés de leur faire est de n'avoir peut-être pas assez indiqué que l'intérêt principal de leur travail n'était pas tant dans la reconstitution logique de la mathématique que

dans la réadaptation de la vieille logique aux généralisations de la mathématique moderne.

A ce titre, au lieu de distinguer *a priori* deux sortes de fonctions logiques, les fonctions extensives et intensives, et d'affirmer que les premières seules sont usitées en mathématiques, il serait plus juste, à notre sens, de ne pas éliminer de la mathématique des fonctions qui n'ont pas encore reçu leur expression définitive, mais la recevront peut-être bientôt. On sait en effet comment les travaux de Fredholm ont préparé la traduction analytique des faits biologiques, et par conséquent psychologiques; or ce sont précisément les propositions qui enveloppent des relations de ce genre que MM. Russell et Whitehead excluent du domaine de la mathématique comme fonctions intensives (p. 8 et 77).

Cette réserve ne doit pas empêcher de reconnaître l'intérêt et même la nécessité de travaux mathématiques, tels que celui que présentent aujourd'hui MM. Russell et Whitehead. A côté des esprits inventifs et avides d'ouvrir en toute question des voies nouvelles et imprévues, il est bon qu'il existe des esprits systématiques qui, sans raideur ni dogmatisme, restaurent la notion esthétique de l'ensemble, consacrent les progrès accomplis et fassent souvent pressentir les conquêtes futures.

Pour faciliter l'accès du Livre de MM. Russel et Witehead, nous croyons utile de rassembler en un tableau les notations les plus courantes de leur symbolisme; les notions introduites postérieurement à l'Ouvrage de 1903 sont marqués d'un astérisque.

$\vdash \ldots$	.	signifie	Assertion.
$\ldots = \ldots$	D*f*,	»	Définition nominale.
$\ldots \equiv \ldots$	,	»	Identité.
$\ldots \mathbf{C} \ldots$	,	»	Implication.
$\ldots = \ldots$	,	»	Égalité.
$p \vee q$	,	»	Addition logique (ou p ou q est vrai).
$p . q$	,	»	Produit logique (p et q sont vrais).
$\sim p$	,	»	Négation (p est faux).

Les auteurs remplacent, d'après Peano, les parenthèses par un ou plusieurs points suivant la complexité des cas.

φa	,	signifie	Proposition (élémentaire ou non).
φx	,	»	Fonction propositionnelle.
* $\hat{\varphi x}$	,	»	Ensemble des valeurs d'une fonction φ.
* $\varphi ! x$	,	»	Fonction prédicative.
$(x).\varphi x$	,	»	φx pour toutes d'x.
$(\exists x).\varphi x$	,	»	Il existe des x pour lesquels φx est vrai.
$x \varepsilon \alpha$	,	signifie	x appartient à la classe α.
$x \mathrm{R} y$	,	»	x est à y dans la relation R.
* $\hat{z}(\varphi z)$	,	»	La classe des z qui satisfont $\varphi \hat{z}$.
* $\hat{x}\hat{y}\varphi(xy)$	,	»	La classe des x et des y qui satisfont $\varphi(xy)$.
* $(\iota x)(\varphi x)$	,	signifie	Le terme qui satisfait φx.
* $\mathrm{R}^{\iota} y$	,	»	Le terme qui a la relation R à y.

Les notations dérivées de la théorie des relations (converse, domaine...) restent dans leur ensemble analogues aux notations adoptées dans l'Ouvrage antérieur et ne peuvent, à raison de leur nombre, être rappelées ici. La théorie nouvelle des sélections et de la relation inductive a été signalée plus haut.

HENRI DUFUMIER.

SIR WILLIAM THOMSON, BARON KELVIN. — MATHEMATICAL AND PHYSICAL PAPERS. Volume V : THERMODYNAMICS. COSMICAL AND GEOLOGICAL PHYSICS. MOLECULAR AND CRYSTALLINE THEORY. ELECTRODYNAMICS. Arranged and revised with brief annotations by Sir Joseph Larmor. Cambridge at the University Press, t. XVI, 1911, p. 602.

I.

Avec ce volume, prend fin la publication des œuvres complètes de Lord Kelvin; les deux volumes des *Papers on Electrostatics and Magnetism*, les deux volumes des *Popular Lectures and Addresses*, les cinq volumes des *Mathematical and Physical Papers*, les *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light*, enfin les *Elements of Natural Philosophy* et le *Treatise on Natural Philosophy*, entrepris tous deux en collaboration avec P.-G. Tait, et demeurés tous deux inachevés, réunissent toutes les pensées qui ont été émises par l'une des intelligences les plus vives, les plus variées, les plus

ingénieuses et primesautières que la Science du siècle passé ait connues.

Ce n'est pas à dire que ces pensées, réunies en cette douzaine de volumes, s'offrent toujours bien aisément à celui qui les recherche. S'il est un caractère qui saute aux yeux, lorsqu'on parcourt ces divers livres, c'est assurément l'inexprimable désordre qui y règne. Le physicien qui, dépourvu de toute indication bibliographique, veut retrouver une théorie de Lord Kelvin, en sera souvent réduit à feuilleter page à page plusieurs volumes; titres et tables des matières ne serviront, dans bien des circonstances, qu'à le mettre en une fausse voie; la théorie qu'il cherche, il peut s'attendre à la trouver partout, sauf au lieu où elle devrait logiquement se rencontrer. *Experto crede.*

Qui donc, par exemple, désireux de connaître tout ce que Lord Kelvin a pu écrire de l'abaissement du point de fusion de la glace par la pression et des conséquences de ce phénomène, penserait que certaines des notes qu'il a publiées à ce sujet sont réunies en un appendice aux *Baltimore Lectures*, c'est-à-dire à des leçons sur la théorie ondulatoire de la lumière?

Le dernier volume des *Mathematical and Physical Papers* ne le cède pas en désordre au reste de la collection; il nous paraît impossible de deviner les raisons qui ont conduit à rapprocher certaines pièces les unes des autres. Ainsi, en la section consacrée à la Thermodynamique, un même numéro, le n° 89, réunit, par exception, deux notes distinctes; on s'attendrait à ce que ces deux notes eussent entre elles des liens très étroits; or, la première, qui est du 21 février 1898, a pour objet d'appliquer le principe de Carnot à la différence de niveau potentiel entre deux métaux; la seconde, qui est du 1er mars 1897, et donc postérieure à la première, est intitulée : *Sur l'équilibre électrique entre l'uranium et un métal isolé qui se trouve en son voisinage.* De telles incohérences ne surprennent guère, je pense, le lecteur anglais; mais elles sont, pour le lecteur français, singulièrement déconcertantes.

II.

Il ne saurait être question d'analyser ni même d'énumérer ici tous les articles qui composent le cinquième volume des *Mathe-*

matical and Physical Papers; ces articles, en effet, sont aussi nombreux que divers; il en est de fort anciens, qui remontent aux premières années de la carrière scientifique du futur Lord Kelvin; il en est, au contraire, qui nous présentent les dernières productions de son génie. Bornons-nous à offrir au lecteur quelques remarques suggérées par l'examen de ces notes multiples.

En la première section, consacrée à la Thermodynamique, nous trouvons plusieurs lettres écrites par William Thomson, par P.-G. Tait, par Clausius; ces lettres sont relatives à des discussions de priorité. Peut-être serions-nous tentés, parfois, de trouver Clausius bien chatouilleux touchant ces questions de priorité; mais nous lui reconnaîtrons de puissantes excuses si, aux lettres que nous avons sous les yeux, nous joignons l'article *Sur l'histoire de la théorie mécanique de la chaleur* qu'il a publié en 1872; cet article, en effet, met hors de doute la partialité avec laquelle Tait, en son *Sketch of Thermodynamics,* présentait la découverte des principes de cette science, attribuant toutes les idées fécondes à ses compatriotes, et réduisant à rien le rôle de Clausius. Clausius ne pouvait, cependant, permettre que l'on méconnût ou que l'on travestît ce rôle; lorsque les expériences de Joule eurent mis hors de doute l'équivalence de la chaleur et du travail, les physiciens se trouvèrent en présence de deux théories de la chaleur, l'une fondée sur le principe récemment découvert, et l'autre sur le principe de Carnot; en 1849, William Thomson jugeait ces deux théories inconciliables et se demandait avec anxiété s'il ne faudrait pas, pour admettre la doctrine de Joule, rejeter la doctrine de Carnot; c'est Clausius qui montra, en 1850, de quelle manière l'accord se pouvait faire entre ces deux doctrines, de quelle manière le principe de l'équivalence entre la chaleur et le travail d'une part, le principe de Carnot, dûment corrigé, d'autre part, confluaient pour donner une Thermodynamique dont il posait, de prime abord, toutes les lois fondamentales; c'est donc bien Clausius qui est le véritable créateur de la Thermodynamique, encore que les recherches du futur Lord Kelvin eussent singulièrement aidé au développement de cette science. Puis, Clausius était, à l'égard de ses prédécesseurs, d'une si scrupuleuse honnêteté, il citait si méticuleusement le nom de ceux auxquels il faisait le plus minime emprunt, qu'on lui peut bien passer d'avoir réclamé de la part des autres

l'accomplissement d'un devoir qu'il s'imposait rigoureusement à lui-même.

III.

Parmi les notes, relatives à la Thermodynamique, que contient le cinquième volume des *Mathematical and Physical Papers*, l'une des plus importantes [1] concerne la relation entre l'effet thermique, découvert par Peltier, qui se produit entre deux métaux, et la différence D de niveau potentiel que prennent ces deux métaux lorsqu'ils sont mis en contact.

On a longtemps cru qu'il y avait proportionnalité entre ces deux quantités. Le raisonnement insuffisant qui avait conduit à ce résultat erroné était tout semblable à celui qui avait fait admettre la proportionnalité de la force électromotrice d'une pile voltaïque à la quantité de chaleur que dégagerait, si elle ne fournissait pas de courant, la réaction dont la pile est le siège. J.-Willard Gibbs, en 1878, puis H. von Helmholtz, en 1882, avaient rectifié cette dernière et très grave erreur; ils avaient montré que la quantité de chaleur en question est proportionnelle non pas à la force électromotrice E de la pile, mais à l'expression $\left(E - T\frac{dE}{dT}\right)$, où T est la température absolue. D'une manière analogue, et par une application correcte du principe de Carnot, Lord Kelvin montre que l'effet de Peltier est proportionnel non pas à D, mais à $T\frac{dD}{dT}$.

Ce résultat, M. H.-A. Lorentz l'avait déjà obtenu en 1885, mais à la suite de raisonnements assez obscurs qui l'amenaient à regarder cette formule comme incompatible avec la belle théorie des phénomènes thermo-électriques donnée, depuis longtemps, par William Thomson. Ce même résultat, nous l'avions obtenu en 1887 par l'application des principes de la Thermodynamique, et nous en avions montré le complet accord avec la théorie des courants thermo-électriques. Nos raisonnements, bien qu'aisés à contrôler, n'avaient pas eu le pouvoir de chasser de l'enseignement la formule démontrée incorrecte. Seront-ils plus heureux, maintenant qu'à leur force démonstrative propre se joint la grande

---

[1] N° 89, p. 29-35.

autorité de Lord Kelvin? A peine ose-t-on l'espérer; il semble, parfois, que certains physiciens gardent, aux formules convaincues d'erreur, l'indéfectible fidélité qui attachait Caton à la cause vaincue.

IV.

Quelques lecteurs s'étonneront, peut-être, de l'importance que nous venons d'accorder à la note de Lord Kelvin sur l'effet Peltier. Quelle relation existe entre l'effet Peltier et l'effet Volta? Cette question semble bien, de prime-abord, se placer au nombre de celles que les méthodes de la Physique sont capables de résoudre; dès lors, à quoi bon en chercher la solution? Les seules questions qu'il soit intéressant de se poser ne sont-elles pas celles auxquelles on est à peu près sûr de ne pas trouver de réponses?

Ceux que délecte la discussion d'insolubles énigmes trouveront, au dernier volume des *Papers* de Lord Kelvin, mainte occasion d'exercer leur sagacité ou de bercer leur rêve; divers articles sur l'origine de la chaleur solaire et sur l'âge du Soleil attireront au plus haut point leur attention. Lord Kelvin, en effet, ne redoutait pas ces recherches où l'espoir d'aboutir nous est, semble-t-il, interdit: il s'y lançait avec une audacieuse ardeur; gardons-nous de l'en blâmer, d'ailleurs; ces tentatives qui, de la part du commun des physiciens, ne décèleraient que folle présomption, montrent ici que le génie qui les ose a conscience de sa surhumaine puissance.

Les vues diverses de Lord Kelvin convergent toutes vers cette conclusion : Il n'y a pas bien longtemps que le Soleil et la Terre ont à peu près la grosseur, la température et l'état que nous leur connaissons, et en cet état, ils persévéreront encore moins longtemps. Il faut, toutefois, entendre que le million d'années est l'étalon de temps supposé par cet énoncé, en sorte que quelques millions d'années font peu de temps.

« Il semble, à tout prendre, fort probable, dit Lord Kelvin [1], que le Soleil n'a pas éclairé la Terre durant cent millions d'années, et il est presque certain qu'il ne l'a pas fait pendant cinq cents millions d'années. Pour ce qui est de l'avenir, on peut dire, avec

[1] Page 153.

une égale certitude, que les habitants de la Terre pourront continuer à jouir de la chaleur et de la lumière essentielles à leur existence pendant plusieurs millions d'années encore, à moins que des sources, aujourd'hui inconnues, ne soient préparées dans la grande réserve de la création. »

C'est à ces cent millions, à ces cinq cents millions d'années que nous appliquions ces mots : Pas très longtemps.

C'est peu de temps, en effet, c'est même trop peu de temps, au gré des géologues qui ne veulent point, en leurs théories, invoquer de cataclysmes hors de proportion avec les phénomènes météorologiques actuels : « Que faut-il donc penser, par exemple, écrit Lord Kelvin [1], de l'évaluation géologique qui compte trois cents millions d'années pour la dénudation du Weald? Est-il plus probable que l'état physique de la matière solaire diffère mille fois plus de la matière que nous étudions, que la Dynamique ne nous autorise à le supposer, ou bien qu'une mer orageuse, aidée de marées d'une extrême violence, doive ronger une falaise calcaire mille fois plus rapidement que ne l'estime M. Darvin, qui trouve un pouce par siècle? »

Que l'apparition de la vie sur la Terre ne remonte certainement pas à cinq cents millions d'années, cela déconcerte toutes les combinaisons de ceux qui font dériver les espèces animales les unes des autres par graduelle évolution. Aussi les adversaires de la théorie de la descendance se hâtent-ils de faire état des évaluations de l'âge du Soleil données par Lord Kelvin, et d'y voir la condamnation formelle de la doctrine qu'ils réprouvent. A la vérité, les partisans de cette doctrine n'ont point de peine à montrer que l'évaluation de Lord Kelvin repose sur un grand nombre d'hypothèses; que, parmi ces hypothèses, il en est qui ne sont point fort assurées; que la ruine de celles-là entraînerait la chute des conclusions qu'elles portent; et donc, qu'il leur est loisible de poursuivre la construction de leurs propres systèmes sans trop redouter de se voir contrebattus par une bastide si caduque. En un tel débat, la seule chose dont les deux partis soient à peu près assurés, c'est qu'ils pourront continuer indéfiniment la lutte qui les met aux prises. Il est des gens qui croient

---

[1] Page 149.

plus sage de ne pas prendre part à la bataille et de répéter, après E. Du Bois-Reymond : *Ignorabimus*.

V.

Parmi les notes consacrées à la Géologie, il en est de plus modestes que celles où l'âge du Soleil se trouve évalué; l'une d'elles [1] mérite de nous arrêter un moment, elle nous présente, en effet, un curieux exemple de résurrection d'une très ancienne doctrine.

Cette note a pour objet les variations alternatives de niveau que la mer a éprouvées au cours de la période glaciaire; elle n'est, d'ailleurs, qu'une remarque à une explication que M. Croll avait donnée de ces oscillations de l'Océan.

Supposons que l'on ne tienne aucun compte du mouvement de rotation de la Terre, et que l'on cherche la figure du niveau que prennent les mers, grâce aux attractions mutuelles de leurs parties et aux attractions de toutes les masses solides que le globe renferme; l'équation de la surface de niveau s'obtiendra en égalant à une constante la fonction potentielle de toutes les masses agissantes; si l'on emploie, pour exprimer cette fonction potentielle, un développement dont les coefficients soient les fonctions Y_n de Laplace, on obtient ce remarquable théorème : La surface qui représente, *en première approximation*, celle du niveau des mers est une sphère ayant pour centre le centre de gravité de toutes les masses agissantes.

Imaginons, dès lors, qu'en un certain temps de la période glaciaire, une épaisse calotte de glace occupe les régions boréales, et que l'Océan ait pris un certain niveau. Puis, supposons qu'une raison quelconque brise cette calotte de glace, la fasse dévier vers le Sud sous forme de vastes icebergs, qui finissent par se resouder entre eux et par constituer, autour du pôle austral, une calotte semblable à celle qu'ils formaient autour du pôle boréal. Un tel transport de la calotte glaciaire a pour effet de déplacer vers le Sud le centre de gravité de la masse terrestre; la sphère qui représente, en première approximation, le niveau de la mer, descendra

---

[1] N° 145, p. 167.

donc, elle aussi, vers le Sud; en sorte qu'en l'hémisphère nord, l'Océan va laisser apparaître de nouvelles terres, et qu'en l'hémisphère sud, il va submerger des continents.

Cette théorie, dont nous n'avons pas qualité pour apprécier la valeur géologique, rappelle, disions-nous, une très ancienne doctrine; la doctrine dont nous voulions parler tire son origine d'un passage du commentaire de Simplicius au *Traité du Ciel* d'Aristote; mais elle ne s'est développée qu'au XIVe siècle, dans l'enseignement des Maîtres de l'Université de Paris, particulièrement d'Albert de Saxe. Résumons-la en peu de mots :

La surface de l'Océan est une surface sphérique qui a pour centre le centre du Monde; au centre du Monde, se doit également trouver soit, au gré d'une première opinion, le centre de gravité de l'ensemble des choses pesantes, soit, au gré d'une seconde opinion, le centre de gravité de la seule terre solide; entre ces deux opinions, Albert de Saxe et ses contemporains, comme Thémon le fils du Juif et Nicole Oresme, sont longtemps en suspens; ils finissent par se ranger, non sans hésitation, à la seconde; cette fâcheuse décision empêche seule qu'ils n'aient pleinement déduit de la théorie du lieu naturel d'Aristote une proposition que l'emploi des fonctions de Laplace était, un jour, appelé à justifier.

En tous cas, de cette proposition, Albert de Saxe a tiré une conclusion toute semblable à celle que M. Croll et Lord Kelvin lui ont demandée.

Comme tous ses contemporains, il pense que notre globe présente un vaste continent et, sur la face opposée, un Océan encore plus vaste; l'érosion causée par les rivières transporte sans cesse, au fond de l'Océan, les matières graves arrachées aux terres fermes; constamment, donc, elle tend à déplacer vers la face de la terre que l'eau recouvre, ce centre de gravité qui doit être au centre du Monde; constamment aussi la terre doit se mouvoir pour compenser ce déplacement et remettre le centre de gravité au centre du Monde; l'effet est le même que si le niveau des mers qui découpent les continents s'abaissait sans cesse.

Cette doctrine se trouve tout à fait au berceau de la Géologie; elle a exercé, sur les premiers développements de cette science, une influence décisive que nous avons eu, ailleurs, occasion de

retracer; n'est-il pas piquant qu'on la retrouve, rajeunie en ses principes, mais à peine modifiée en ses conclusions, prête à seconder encore la Géologie parvenue à l'âge adulte?

VI.

Il est, au volume que nous analysons, une série de notes qui ont trait aux conditions d'équilibre des nébuleuses gazeuses.

La première de ces notes [1] est intitulée : *Sur l'équilibre d'un gaz soumis à sa propre gravitation.*

Soient : M la masse d'une sphère solide, de rayon a, qu'entoure une atmosphère gazeuse; ρ, p, la densité et la pression du gaz à la distance r du centre; β la constante de l'attraction universelle; l'Hydrostatique fournit la condition d'équilibre

$$(1) \qquad \frac{dp}{dr} = -\left(M + 4\pi\int_a^r \rho r^2\,dr\right)\frac{\beta\rho}{r^2}.$$

Lord Kelvin donne cette équation [2] sans en tirer aucune conclusion; il en est pourtant de bien faciles à déduire, et qui ont leur intérêt.

Supposons que la température du gaz soit uniforme et que la loi de Boyle et Mariotte soit applicable; on aura

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0},$$

p_0 et ρ_0 étant les valeurs de p et de ρ pour $r = a$, en sorte que l'égalité précédente deviendra

$$\frac{d\log\rho}{dr} = -\frac{\beta\rho_0}{p_0 r^2}\left(M + 4\pi\int_a^r \rho r^2\,dr\right).$$

ρ est fonction décroissante de r, en sorte que sa valeur est toujours inférieure à ρ_0; on diminue assurément le second membre en y remplaçant ρ par ρ_0; on obtient ainsi l'inégalité

$$\frac{d\log\rho}{dr} > -\left[M + \frac{4}{3}\pi\rho_0(r^3 - a^3)\right]\frac{\beta\rho_0}{r^2},$$

---

(1) N° 150, pp. 184 et suiv.

(2) Page 186.

et, par conséquent, l'inégalité

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} > \beta\rho_0 \left(M - \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{4}{6}\pi\beta\rho_0 (r^2 - a^2).$$

Il est facile d'en conclure que, pour aucune valeur finie de r, la densité ρ de l'atmosphère gazeuse n'atteint la valeur o.

L'atmosphère d'aucune planète ne saurait donc, sous l'influence de la gravitation, se limiter elle-même; elle va, se dilatant toujours davantage, sans jamais pouvoir atteindre une position d'équilibre; la densité gazeuse, lorsqu'on s'éloigne de la planète, devrait, pour l'équilibre, décroître d'autant plus lentement que la masse de la planète est plus petite. Il est évident, par là, que toutes les planètes perdent peu à peu leur atmosphère, et d'autant plus vite que la planète est plus petite. Toutes ces propositions sont presque évidentes. Peut-être n'est-il pas inutile de montrer qu'elles découlent des seules lois de l'Hydrostatique, par l'intermédiaire de l'équation que Lord Kelvin a écrite; récemment, en effet, on les a signalées comme d'intéressants corollaires de la théorie cinétique des gaz; pour les établir, il est tout à fait oiseux de faire appel à cette théorie.

Tout ce que Lord Kelvin a déduit de l'équation précédente sur ce qu'il nomme l'*équilibre convectif* d'une nébuleuse gazeuse, nous paraît entièrement vicié par une confusion initiale, que d'autres avaient, d'ailleurs, commise avant lui, en ce même problème et en d'autres. Citons textuellement la définition par lui donnée (¹) de l'*équilibre convectif;* la confusion en question s'y montrera avec évidence :

« L'essence de l'équilibre convectif est celle-ci : Une petite sphère ou une portion cubique du fluide, placée en une position P, est entourée, par la pensée, d'une enveloppe imperméable à la chaleur; si cette portion se détend ou se contracte alors jusqu'à la densité qu'a le fluide en une autre position P′, sa température varie, par l'effet de cette expansion ou de cette contraction, de la valeur qu'elle avait en P à celle que le fluide a actuellement en P′. Les formules qui expriment cette condition ont été données, pour la première fois, par Poisson. Ce sont les équations généralement

(¹) N. 101, art. 3, pp. 256-257.

connues aujourd'hui sous le nom d'équations de l'expansion ou de la contraction adiabatique que Rankine leur a donné. Elles s'écrivent de la manière suivante, dans le cas idéal d'un gaz parfait,

$$(1)\,(2)\,(3)\quad \frac{p}{p'} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{K}, \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \left(\frac{t}{t'}\right)^{\frac{1}{K-1}}, \qquad \frac{p}{p'} = \left(\frac{t}{t'}\right)^{\frac{K}{K-1}},$$

(t, p, ρ) et (t', p', ρ') désignent les températures, densités et pressions en deux places quelconques du fluide, les températures étant comptées à partir du zéro absolu; K désigne le rapport de la chaleur spécifique du gaz prise sous pression constante à sa chaleur spécifique prise sous volume constant... »

Selon cette définition, Lord Kelvin donne (1) à la pression p, en l'équation (1), la valeur $HT\rho^{k}$, où H, T sont deux quantités indépendantes de r.

Ce que Lord Kelvin suppose ainsi sans le dire et, assurément, sans y avoir songé, nous allons bien aisément le reconnaître.

Prenons, d'abord, cette petite portion de gaz qu'il a désignée par P. Imaginons qu'à un instant initial o, elle ait eu t_0, p_0 et ρ_0 pour densité, température et pression; imaginons ensuite que, de cet instant à l'instant τ, elle ait éprouvé des contractions et expansions au cours desquelles elle n'a pu ni dégager ni absorber aucune quantité de chaleur; si t, p, ρ sont sa température, sa pression et sa densité à l'instant τ, la loi de Poisson nous apprend que

$$(4)\,(5)\,(6)\quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{K}, \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Si, de même, la portion P′ avait, à l'instant initial o, une température, une pression et une densité représentées par t'_0, p'_0, ρ'_0, et si, de cet instant à l'instant τ, elle a subi des compressions et dilatations adiabatiques qui l'ont amenée à la température t, à la pression p et à la densité ρ, on a

$$(4')\,(5')\,(6')\quad \frac{p'}{p'_0} = \left(\frac{\rho'}{\rho'_0}\right)^{K}, \qquad \frac{\rho'}{\rho'_0} = \left(\frac{t'}{t'_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \frac{p'}{p'_0} = \left(\frac{t'}{t'_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Supposons maintenant qu'à l'instant initial o, *la tempé-*

(1) Page 186.

rature, la pression et la densité de la portion P' *aient été respectivement les mêmes que la température, la pression et la densité de la portion* P :

$$t'_0 = t_0, \qquad p'_0 = p_0, \qquad \rho'_0 = \rho_0.$$

Les égalités (4), (5), (6) et (4'), (5'), (6') donneront les égalités (1), (2), (3).

Admettre, donc, que les équations (1), (2), (3) sont vérifiées en deux points quelconques d'une masse gazeuse, *c'est admettre que l'état actuel de cette masse provient d'un* ÉTAT INITIAL HOMOGÈNE *par une transformation au cours de laquelle chacune des masses élémentaires n'a jamais dégagé ni absorbé de chaleur.*

Lord Kelvin et ses prédécesseurs, Homer Lane, Perry, ont-ils entendu supposer qu'une nébuleuse gazeuse avait été, à un certain instant regardé comme initial, une masse gazeuse entièrement homogène? Ont-ils cru possible d'admettre que, si éloigné que cet état initial fût dans le passé, chaque particule du gaz n'avait jamais, pendant le long temps écoulé, dégagé ni absorbé la moindre quantité de chaleur? Assurément, si ces hypothèses s'étaient explicitement présentées à leur esprit, ils les eussent rejetées comme insensées. Dès lors, il ne leur est plus permis de faire usage des équations (1), (2), (3).

Cette remarque entraîne, malheureusement, la ruine complète du Mémoire sur *Le problème de la nébuleuse gazeuse sphérique*, auquel l'auteur a travaillé jusqu'à ses derniers jours, et qu'il a laissé inachevé. L'auréole de gloire de Sir William Thomson, baron Kelvin, peut se passer de ce dernier rayon.

PIERRE DUHEM.

MÉLANGES.

SUR LES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES ET LA CINÉMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

PAR M. E. VESSIOT.

1. Imaginons un fluide en mouvement. Soient x, y, z, les coordonnées de la position qu'occupe, à l'instant t, une particule quelconque du fluide : soient x', y', z', les coordonnées de la position que la même particule prend au bout d'un temps τ, c'est-à-dire à l'instant $t' = t + \tau$. On a des formules déterminées, de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = f(x, y, z, t \mid \tau), \\ y' = g(x, y, z, t \mid \tau), \\ z = h(x, y, z, t \mid \tau), \end{cases} \qquad (t' = t + \tau).$$

Si l'on considère encore la position $x''\,y''\,z''$ de la même particule au bout d'un nouvel intervalle de temps τ_1, c'est-à-dire à l'instant $t'' = t' + \tau_1 = t + \tau + \tau_1$, elles seront données, soit par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} x'' = f(x', y', z', t' \mid \tau_1), \\ y'' = g(x', y', z', t' \mid \tau_1), \\ z'' = h(x', y', z', t' \mid \tau_1), \end{cases} \qquad (t'' = t' + \tau_1),$$

soit par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x'' = f(x, y, z, t \mid \tau + \tau_1), \\ y'' = g(x, y, z, t \mid \tau + \tau_1), \\ z'' = h(x, y, z, t \mid \tau + \tau_1), \end{cases} \qquad [t'' = t + (\tau + \tau_1)].$$

Cette remarque évidente prouve que *le mouvement considéré a son expression analytique dans la transformation générale d'un groupe à un paramètre*, à savoir :

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = f(x, y, z, t \mid \tau), \\ y' = g(x, y, z, t \mid \tau), \\ z' = h(x, y, z, t \mid \tau), \\ t' = t + \tau. \end{cases}$$

Le paramètre τ est même un paramètre canonique, puisque la composition de deux transformations du groupe équivaut à l'addition des paramètres τ correspondants.

Pour la transformation infinitésimale de ce groupe, on a :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = f_\tau(x, y, z, t \mid 0) = u(x, y, z, t),\\ \frac{\partial y}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = g_\tau(x, y, z, t \mid 0) = v(x, y, z, t),\\ \frac{\partial z}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = h_\tau(x, y, z, t \mid 0) = w(x, y, z, t),\\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial t'}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = 1. \end{aligned}\right.$$

Et ces formules mettent en évidence que u, v, w sont les composantes de la vitesse de la particule fluide qui passe, à l'instant t, au point de l'espace qui a pour coordonnées x, y, z; c'est-à-dire les composantes de la vitesse, exprimée au moyen des variables d'Euler. Si donc on suppose que l'on se donne ces fonctions u, v, w, *le mouvement considéré a son expression analytique dans la transformation infinitésimale*

$$(6)\quad Df = \frac{\partial f}{\partial t} + u(x, y, z, t)\frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, z, t)\frac{\partial f}{\partial y} + w(x, y, z, t)\frac{\partial f}{\partial z},$$

et la détermination du mouvement revient à chercher les équations finies du groupe à un paramètre correspondant, ce qui équivaut à intégrer l'équation

$$(7)\qquad Df = 0.$$

On obtient les invariants fondamentaux de Df, d'ordre zéro, en éliminant le paramètre τ entre les équations (4) et en donnant à t' une valeur fixe arbitraire, par exemple $t' = 0$. Les valeurs de ces invariants

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} a &= f(x, y, z, t \mid -t),\\ b &= g(x, y, z, t \mid -t),\\ c &= h(x, y, z, t \mid -t), \end{aligned}\right.$$

caractérisent les particules du fluide : ce ne sont autre chose que les invariables de Lagrange. Mais on peut, plus généralement, caractériser les particules du fluide par les valeurs de trois inva-

riants indépendants quelconques de Df : cela revient à partir d'un système de coordonnées curvilignes quelconque.

D'une manière tout à fait générale, *le caractère d'invariance d'une quantité ou d'une figure géométrique par la transformation infinitésimale* Df *équivaut à ce fait que la quantité ou la figure géométrique considérée se rapporte au fluide en lui-même, indépendamment de la position et de la déformation successives de ce fluide.*

C'est ainsi qu'on vérifie sans peine que, pour qu'une équation ou un système de deux équations en x, y, z, t représente une surface ou une ligne fluide, sous ses formes successives, il faut et il suffit que cette équation, ou ce système, admette la transformation Df. Et si l'on considère un système différentiel en x, y, z, t, dont chaque intégrale représente les formes successives d'une courbe, (ou d'une surface), son invariance par Df équivaudra à ce fait que les particules fluides qui se trouvent disposées à un instant sur une courbe (ou sur une surface) intégrale, se trouvent disposées encore, à tout autre instant, sur une courbe (ou sur une surface) intégrale, qui sera, en général, différente de la première.

2. Les principes précédents, que j'avais introduits, il y a quelques années, dans mon enseignement, et que je croyais nouveaux, se trouvent déjà utilisés dans plusieurs publications de M. Zorawski [1]. Il nous a paru cependant utile de les reprendre, car ils éclairent et permettent de simplifier notablement les théories classiques de la Cinématique des milieux continus; ils fournissent aussi l'origine cinématique de divers théorèmes fondamentaux d'Hydrodynamique. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

Un élément linéaire fluide, issu d'une particule fluide quelconque (a, b, c), est défini par les différentielles da, db, dc. L'élément

---

[1] *Académie des Sciences de Cracovie* (Rozpraw Wydziazu matematyczno-przyrodniczego Akademii Umietnosci w Krakowie), t. XXXIV, 8 novembre 1897; t. XXXIX, 8 octobre 1900; t. XXXVIII, 12 novembre 1900; t. XLII, 4 novembre 1901. Ces Mémoires sont en langue polonaise. Des résumés seulement ont paru, en allemand, dans *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau* (novembre 1897), continué par le *Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie* (octobre et novembre 1900 et décembre 1901).

linéaire de l'espace fixe, avec lequel cet élément fluide coïncide à l'instant t, est, par suite, défini par les différentielles totales correspondantes dx, dy, dz. Celles-ci sont prises par rapport à des variables qui sont invariantes par Df. *Si donc on veut suivre les modifications que subissent les éléments linéaires du fluide, pendant le mouvement de celui-ci, on en aura l'expression analytique en prolongeant la transformation infinitésimale* Df, *relativement aux différentielles* dx, dy, dz en question, suivant les règles données par Lie. On trouve immédiatement

$$(9)\qquad D(dx) = du, \qquad D(dy) = dv, \qquad D(dz) = dw.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{lll} dx = x_1, & dy = x_2, & dz = x_3; \\ \dfrac{\partial f}{\partial(dx)} = p_1, & \dfrac{\partial f}{\partial(dy)} = p_2, & \dfrac{\partial f}{\partial(dz)} = p_3; \end{array}\right.$$

puis

$$(11)\qquad du = \sum_{i=1}^{3} a_{1,i}x_i, \qquad dv = \sum_{i=1}^{3} a_{2,i}x_i, \qquad dw = \sum_{i=1}^{3} a_{3,i}x_i.$$

Le prolongement considéré est la transformation infinitésimale, linéaire, homogène, qui a pour symbole la forme bilinéaire

$$(12)\qquad D_1 f = \sum_h \sum_k a_{hk}x_k p_h \qquad (h, k = 1, 2, 3).$$

On contate que si l'on rapporte l'élément x_1, x_2, x_3 à un nouveau trièdre trirectangle (pour un point x, y, z particulier quelconque), cela revient à effectuer sur les x_i, et les p_i, la même transformation orthogonale. La nature de la transformation infinitésimale des éléments linéaires dépend donc des propriétés de la forme bilinéaire (12), par rapport au groupe orthogonal.

En particulier, pour qu'il y ait trois directions orthogonales invariantes, il faut et il suffit que Df soit réductible à la forme canonique $\sum_{i=1}^{3} S_i X_i P_i$; la condition, pour cela, est que le déterminant $[a_{hk}]$ soit symétrique. C'est donc la condition pour qu'on ait affaire à une déformation pure.

Pour qu'on ait affaire à une rotation, il faut et il suffit que le déterminant $[a_{hk}]$ soit un déterminant symétrique gauche.

Or on peut toujours, et d'une seule manière, mettre la forme (12) sous la forme d'une somme de deux formes Δf et $\mathrm{R}f$, la première à déterminant symétrique, et la seconde à déterminant gauche. Car $\mathrm{D}_1 f$ se réduit alors à Δf, si on fait $x_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Cette simple remarque donne, en effet,

$$(13)\qquad \Delta f = \sum_h \sum_k \frac{1}{2}(a_{hk} - a_{kh}) x_k p_h, \qquad \mathrm{R}f = \sum_h \sum_k \frac{1}{2}(a_{hk} + a_{kh}) x_k p_h.$$

On a ainsi la décomposition classique de la déformation infinitésimale considérée en une déformation pure et une rotation.

3. *La variation infiniment petite d'un élément de volume*

$$(14)\qquad d\omega = dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d_1 x & d_1 y & d_1 z \\ d_2 x & d_2 y & d_2 z \end{vmatrix}$$

se calcule immédiatement, en appliquant les formules (9), aux trois éléments linéaires qui figurent dans cette formule (14); d'où le résultat bien connu

$$(15)\qquad \mathrm{D}(d\omega) = \theta\, d\omega, \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Si l'on introduit la densité ρ, la variation de $(\rho\, d\omega)$ est nulle, ce qui donne

$$(16)\qquad \mathrm{D}\rho + \rho\theta = 0.$$

C'est *l'équation de continuité*, qui exprime que ρ est un multiplicateur de Jacobi pour l'expression $\mathrm{D}f$.

On peut enfin se proposer d'*étudier, en même temps que la variation des éléments linéaires, celle des éléments superficiels fluides*. Un tel élément est défini par les trois composantes du vecteur représentatif :

$$(17)\qquad \begin{cases} y_1 = dy\,dz - d_1 y\, d_2 z = d_1 z\, d_2 y - d_1 y\, d_2 z, \\ y_2 = dz\,dx - d_1 z\, d_2 x = d_1 x\, d_2 z - d_1 z\, d_2 x, \\ y_3 = dx\,dy - d_1 x\, d_2 y = d_1 y\, d_2 x - d_1 x\, d_2 y. \end{cases}$$

Et l'on a l'identité

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = d\omega,$$

d'où

$$(17)\qquad D\sum_{i=1}^{3} x_i y_i = \theta \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

En identifiant les deux membres, par rapport à x_1, x_2, x_3, on trouve les valeurs cherchées :

$$(18)\qquad Dy_h = \theta y_h - \sum_{i=1}^{3} a_{ih} y_i \qquad (h = 1, 2, 3)$$

La transformation infinitésimale correspondante est $q_h = \frac{\partial f}{\partial y_h}$

$$(19)\qquad D_2 f = \theta \sum_h y_h q_h - \sum_h \sum_k a_{hk} y_k q_h \qquad (h, k = 1, 2, 3).$$

Elle se décompose en une déformation pure isotrope, une déformation pure qui est l'inverse de Δf, et la rotation $\mathrm{R} f$.

On conclut de ces formules que la dilatation cubique est égale à la somme de la dilatation linéaire relative à une direction quelconque et de la dilatation superficielle relative à l'élément superficiel perpendiculaire à cet élément linéaire. Car pour l'élément linéaire $x_1, x_2 = 0, x_3 = 0$, la dilatation est $\frac{1}{x_1} Dx_1 = a_{11}$; pour l'élément superficiel $x_1, x_2 = 0, x_3 = 0$, la dilatation est $\frac{1}{x_1}[\theta - a_{11}]$ et la formule (15) exprime que θ est la dilatation cubique.

On voit de même que la dilatation d'un élément superficiel quelconque est la somme des dilatations de deux éléments linéaires rectangulaires appartenant à cet élément superficiel.

On a, du reste, immédiatement la dilatation d'un élément linéaire ou superficiel quelconque. En posant

$$(20)\qquad ds = \sqrt{\sum dx^2} = \sqrt{\sum x_i^2}, \quad d\sigma = \sqrt{\sum y_i^2}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \sum_h \sum_k a_{hk} \varepsilon_h \varepsilon_k,$$

et désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la direction consi-

dérée, on retrouve les formules connues [1] :

$$(21)\qquad \frac{D\,ds}{ds} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \frac{D\,d\sigma}{d\sigma} = \theta - \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

On a donc un ellipsoïde des dilatations superficielles, aussi bien qu'un ellipsoïde des dilatations linéaires. Ces deux ellipsoïdes ont les mêmes plans de sections circulaires, ce qui donne lieu à une interprétation facile.

Remarquons encore que, si l'on substitue au vecteur y_1, y_2, y_3 le vecteur qui a pour composantes :

$$(22)\qquad z_1 = \rho\, dy\, dz, \qquad z_2 = \rho\, dz\, dx, \qquad z_3 = \rho\, dx\, dy,$$

les formules (18) sont remplacées par les suivantes :

$$(23)\qquad Dz_h = -\sum_{k=1}^{3} a_{kh} z_k \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Elles peuvent s'écrire

$$(24)\qquad \frac{\partial z_h}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{3} a_{kh} z_k \qquad (h = 1, 2, 3).$$

tandis que les formules (9) sont

$$(25)\qquad \frac{\partial x_h}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} a_{hk} x_k \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Ce dernier système étant le *système aux variations,* relatif à l'équation (7), ou au système différentiel qui lui est associé :

$$(26)\qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u(x, y, z, t), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v(x, y, z, t), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = w(x, y, z, t),$$

le système (24) en est le *système adjoint.* Les résultats précédents indiquent quelles sont les solutions de l'un et de l'autre. Ces deux systèmes ne sont identiques, quel que soit t, que si le fluide se déplace sans se déformer, comme un solide ; car c'est le seul cas où le déterminant $[a_{kh}]$ est gauche, quel que soit t, et pour toutes les valeurs de x, y, z.

---

[1] La première est classique, la seconde se trouve dans le dernier des Mémoires de M. Zorawski, cités plus haut [formule (18), p. 198].

4. Introduisons maintenant le *tourbillon* :

$$(27)\qquad \Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\qquad \Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\qquad \Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

et les lignes de tourbillon, qui sont les caractéristiques de l'équation

$$(28)\qquad 0 = \Omega_x f - \Omega_x \frac{\partial f}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial f}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si nous *cherchons à quelle condition les lignes de tourbillon se conservent dans le mouvement*, cela revient à chercher à quelle condition l'équation (28) admet la transformation infinitésimale Df ; et nous avons à former [1] le crochet $(Df, \Omega f)$. On a, en développant le calcul,

$$(29)\qquad \begin{aligned} 2(D\Omega_x - \Omega u) = {} & \frac{\partial Dw}{\partial y} - \frac{\partial Dv}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\ & + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \\ & - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ = {} & -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

D'où la formule

$$(30)\qquad D\Omega_x - \Omega u = -\theta\Omega_x - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Dw}{\partial y} - \frac{\partial Dv}{\partial z}\right),$$

et les analogues, qui nous donnent

$$(31)\qquad (Df, \Omega f) = -\theta\Omega f + \Omega' f,$$

en posant

$$(32)\qquad \Omega' f = \Omega_x \frac{\partial f}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial f}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

et en désignant par Ω'_x, Ω'_y, Ω'_z le tourbillon du vecteur accélération :

$$Du = J_x,\qquad Dv = J_y,\qquad Dw = J_z.$$

C'est ce que l'on nomme encore l'accélération rotatoire.

---

[1] M. Zorawski considère aussi ce crochet, mais ne donne pas la formule si simple à laquelle nous arrivons. Voir *Bulletin Int. de l'Acad. des Sc. de Cracovie*. Ueber die Erhaltung der Wirbelbewegung (8 octobre 1900).

Cette formule unique (31) *va nous redonner, sous une forme même plus complète, les résultats classiques de l'Hydrodynamique élémentaire.*

D'abord, pour que les lignes de tourbillon se conservent, il faut et il suffit que $\Omega' f$ soit de la forme $\mu\,\Omega f$, c'est-à-dire que le vecteur accélération rotatoire ait pour ligne d'action celle du vecteur tourbillon, ce qui comprend le cas où il y a un potentiel des accélérations.

Le système $Df = 0$, $\Omega f = 0$ est alors un système complet. En égalant à des constantes deux solutions indépendantes de ce système on obtient les équations d'une ligne de tourbillon quelconque; et, comme elles sont aussi obtenues en égalant à des constantes des invariants de Df, il est manifeste que toute ligne de tourbillon est une ligne fluide.

On obtient, d'ailleurs, la même condition en exprimant simplement que le système $Df = 0$, $\Omega f = 0$ est effectivement un système complet; car $\Omega' f$ ne contenant pas $\frac{\partial f}{\partial t}$, l'équation $(Df, \Omega f) = 0$ ne peut être une combinaison des précédentes que si $\Omega' f$ est de la forme $\mu . \Omega f$.

Cette même condition suffit encore pour que *le théorème de Lagrange* soit vrai. C'est un cas particulier du théorème général suivant, qui ne nous paraît pas avoir été signalé : *Si une transformation infinitésimale*

$$(33) \qquad Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

laisse invariante une équation

$$(34) \qquad 0 = Lf = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

elle laisse invariant l'ensemble des points singuliers de cette équation défini par les équations

$$(35) \qquad \lambda_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Car l'identité

$$(36) \qquad (Xf, Lf) = \sigma Lf,$$

qui a lieu par hypothèse, donne les identités

$$(37) \qquad X\lambda_i = \sigma\lambda_i - \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \frac{\partial \xi_i}{\partial x_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Et celles-ci montrent que chacune des quantités $X\lambda_i$ est nulle, quand on tient compte des équations (35). Or c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que le système (35) admette la transformation infinitésimale Xf.

Dans le cas actuel, le système (35) est le système

$$(38) \qquad \Omega_x = 0, \qquad \Omega_y = 0, \qquad \Omega_z = 0,$$

et dire que (x, y, z, t) en est une solution veut dire que la particule fluide qui est en (x, y, z), à l'instant t est irrotationnelle à cet instant. Le système (35) étant invariant par Df, cette particule gardera cette propriété pendant tout le mouvement. C'est là la forme la plus générale du théorème de Lagrange, car on en conclut : 1° *si à un instant t, le système* (38) *est identique en x, y, z, c'est-à-dire si toutes les particules fluides sont irrotationnelles à cet instant, elles le sont à tout instant*, c'est-à-dire que les équations (38) ne peuvent être qu'identiques en x, y, z, t; 2° *si, à un instant t, le système* (38) *représente seulement une partie du fluide*, qui peut être composée de volumes, de surfaces, de courbes, ou de points isolés, *chaque portion continue et isolée de cette partie irrotationnelle demeure irrotationnelle pendant tout le mouvement.*

Dans le cas où il y a un potentiel des accélérations, les équations telles que (36) se réduisent aux *équations d'Helmholtz;* car, en posant

$$\Omega_x = \omega_1, \qquad \Omega_y = \omega_2, \qquad \Omega_z = \omega_3,$$

et reprenant les notations du n° 2, elles s'écrivent

$$(39) \qquad D\omega_h = \theta\omega_h - \sum_{k=1}^{3} a_{hk}\omega_k \qquad (h = 1, 2, 3),$$

et l'on pose

$$(40) \qquad \zeta_1 = \frac{\Omega_x}{\rho} = \frac{\omega_1}{\rho}, \qquad \zeta_2 = \frac{\Omega_y}{\rho} = \frac{\omega_2}{\rho}, \qquad \zeta_3 = \frac{\Omega_z}{\rho} = \frac{\omega_3}{\rho},$$

elles prennent la forme

$$(41)\qquad D\zeta_h = \sum_{k=1}^{3} a_{hk}\zeta_k \qquad (h = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire

$$(42)\qquad \frac{\partial\zeta_h}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} a_{hk}\zeta_k \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Ce sont bien les équations d'Helmholtz.

Si l'on compare aux équations (25), on constate qu'elles signifient que *le vecteur obtenu en divisant, par la densité ρ, le vecteur tourbillon, se comporte, pendant le mouvement, comme un élément linéaire du fluide.*

Cette comparaison fournit encore *les équations de Cauchy*, car on a aussi des éléments linéaires fluides en différentiant séparément par rapport aux trois variables a, b, c de Lagrange; et l'on peut prendre les différentielles da, db, dc égales à *un*. Cela donne trois solutions du système (25) :

$$(43)\qquad \frac{\partial x}{\partial a},\ \frac{\partial y}{\partial a},\ \frac{\partial z}{\partial a};\qquad \frac{\partial x}{\partial b},\ \frac{\partial y}{\partial b},\ \frac{\partial z}{\partial b};\qquad \frac{\partial x}{\partial c},\ \frac{\partial y}{\partial c},\ \frac{\partial z}{\partial c};$$

et leur déterminant se réduit à un déterminant *unité*, pour $t = 0$. La solution ζ_1, ζ_2, ζ_3 de ce même système sera donc donnée, en fonction de sa valeur initiale ζ_1^0, ζ_2^0, ζ_3^0, par les formules :

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_1^0\frac{\partial x}{\partial a} + \zeta_2^0\frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_3^0\frac{\partial x}{\partial c},\\ \zeta_2 &= \zeta_1^0\frac{\partial y}{\partial a} + \zeta_2^0\frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_3^0\frac{\partial y}{\partial c},\\ \zeta_3 &= \zeta_1^0\frac{\partial z}{\partial a} + \zeta_2^0\frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_3^0\frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned}\right.$$

Ce sont précisément les équations de Cauchy.

Si l'on se reporte maintenant à l'équation (16), on peut l'utiliser, d'après ce qui précède, en y remplaçant x_i par ζ_i; et elle donne alors

$$(45)\qquad \Omega_x\,dy\,dz + \Omega_y\,dz\,dx + \Omega_z\,dx\,dy = \rho\,d\omega = \text{const.},$$

c'est-à-dire *l'invariance du flux tourbillonnaire* à travers un élément superficiel fluide.

Remarquons enfin qu'il résulte de la formule fondamentale (31) que Ω/f ne peut être identiquement nul sans que Ω'/f le soit; c'est-à-dire que *s'il y un potentiel des vitesses il y a aussi un potentiel des accélérations.* Cela résulte aussi de l'identité

$$(46)\qquad D(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = (Du\,dx + Dv\,dy + Dw\,dz) + u\,du + v\,dv + w\,dw,$$

conséquence immédiate des formules (9) : elle montre de plus que, si φ est la fonction dont $(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ est la différentielle, la fonction des accélérations est

$$(47)\qquad D\varphi - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Cette formule (46) montre aussi que, s'il y a une fonction des accélérations, $D(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ est une différentielle totale exacte; d'où résulte *l'invariance de la circulation*

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

relative à une ligne fermée quelconque.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

FABRY (E.). — *Théorie des séries à termes constants : applications aux calculs numériques.* In-8, 200 p. Paris, A. Hermann et fils. 6 fr. 50.

— *Traité de mathématiques générales* à l'usage des ingénieurs, chimistes, physiciens et élèves des Facultés, 2e édit. rev. et augm., préf. de G. Darboux. In-8, x-462 p. Paris, A. Hermann et fils. 9 fr.

FARAUT (F.-G.). — *L'Astronomie cambodgienne* (Saïgon). In-8, 284 p. Paris, H. Le Soudier. 20 fr.

FLAMMARION (Camille). — *Annuaire astronomique et météorologique pour* 1911, exposant l'ensemble de tous les phénomènes célestes observables dans l'année, avec revue astronomique. 92 fig. Paris, E. Flammarion. 1 fr. 50.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CRELIER (L.). — SYSTÈMES CINÉMATIQUES (*Scientia*, Phys.-Mathématique, n° 31). 1 vol. in-8, 99 pages, avec 13 figures et un portrait du colonel Mannheim. Paris, Gauthier-Villars, janvier 1911.

En général, on appelle *Systèmes articulés* l'ensemble des appareils servant au tracé mécanique des figures. Les appareils qui permettent la transformation d'un mouvement donné en mouvement rectiligne sont appelés *Guides rectilignes*. En adoptant le titre de *Systèmes cinématiques*, l'Auteur a en vue l'étude géométrique des formes simples qui sont la base de ces mécanismes. Il s'est inspiré des méthodes et des résultats exposés par Mannheim dans son Ouvrage intitulé : *Principes et développements de Géométrie cinématique*, pour étendre les applications de la géométrie cinématique à l'étude des courbes planes. En dehors des résultats connus, il a indiqué un certain nombre de relations nouvelles entre les courbes d'une même famille cinématique.

L'Ouvrage de M. Crelier comprend six Chapitres. Les Chapitres I, II et III contiennent l'exposé des trois systèmes dits conchoïdal simple, cappa et strophoïdal simple, avec renvoi, pour des compléments, à des travaux publiés par M. J. Neuberg et par H. Wieleitner. Les Chapitres IV et VI renferment ce qui est relatif au système conchoïdal circulaire, aux appareils coulisseau-manivelle et bielle-manivelle, avec renvoi à une publication de M. F. Ebner. Le Chapitre V contient les développements concernant le système à deux ornières fixes et l'appareil elliptique.

Il suffit de connaître la Géométrie analytique plane pour suivre aisément les calculs, toujours présentés avec méthode et clarté, que contient le Livre de M. Crelier. Cet Opuscule sera utile aux personnes qui s'occupent des transformations de mouvements et pourra être consulté avec fruit par les élèves des classes de mathématiques spéciales.

ER. L.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG. Vierter Band *enthaltend die Chronik der Vereinigung für 1894-1895, sowie einen ausführlichen « Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper »*, von D. HILBERT, in Göttingen. 1 volume in-8. Berlin, Reimer, 1897.

Le *Bulletin* a déjà eu l'occasion de signaler l'intérêt que présente pour les travailleurs le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, en raison des *Rapports* détaillés que contient chaque Volume de cette publication. Ces Rapports, qui abordent successivement toutes les branches des mathématiques, constituent des travaux d'ensemble sur des questions déterminées : citons le Rapport de Brill et Nöther sur le développement de la théorie des fonctions algébriques (1894), et celui de Burckhardt sur les développements en séries de fonctions périodiques et l'intégration des équations de la physique mathématique (1908). Le Rapport de D. Hilbert sur la théorie des corps de nombres algébriques, qui a été publié en 1897, reste à l'heure actuelle le travail d'ensemble le plus complet et le plus approfondi qui existe sur cette question ; les nombreux perfectionnements que l'auteur a apportés lui-même à plusieurs théories donnent d'ailleurs à son Ouvrage un intérêt exceptionnel.

Au moment où la Théorie des Nombres retrouve dans notre pays une faveur un instant perdue, il était désirable que l'Ouvrage d'Hilbert fût rendu accessible à un plus grand nombre de lecteurs par une traduction : grâce à l'initiative de M. Hadamard, ce sera bientôt chose faite, la traduction commencée sur ses conseils par M. A. Lévy devant être prochainement achevée. En attendant qu'on puisse apprécier dans le texte français l'importance de l'œuvre du savant géomètre de Göttingen, nous allons essayer d'en donner dès à présent une faible idée dans un bref compte rendu.

Nous passerons successivement en revue les cinq Parties dont se compose le Livre, savoir la théorie générale des corps de nombres algébriques quelconques, les corps galoisiens, les corps quadratiques, les corps circulaires et les corps kummériens.

I. *Théorie générale.* — Après avoir défini les notions fondamentales de nombres algébriques et de corps ou domaines de

rationalité, d'entiers algébriques, de norme, de différente et de discriminant d'un nombre algébrique, et démontré le théorème sur l'existence des bases d'un corps, l'auteur établit les lois de la divisibilité. On sait que, dans un corps algébrique, un entier est en général décomposable de *plusieurs* façons essentiellement différentes, en un produit de facteurs indécomposables. Mais Dedekind est parvenu à étendre aux corps algébriques le théorème fondamental de l'arithmétique sur la décomposition unique d'un entier en facteurs premiers en introduisant la notion nouvelle d'*idéal*. Un idéal d'un corps de nombres algébriques est l'ensemble des entiers de ce corps de la forme

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_q \alpha_q,$$

où les α sont des entiers *donnés* du corps et les λ des entiers *quelconques* du corps. Le produit de deux idéaux $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ est par définition l'idéal $(\alpha_i \beta_1, \ldots, \alpha_i \beta_k, \ldots, \alpha_q \beta_r)$; il existe un idéal qui joue le rôle de l'unité, c'est l'ensemble de tous les entiers du corps; il y a des idéaux premiers, et tout idéal est décomposable d'une manière unique en un produit d'idéaux premiers. Dedekind qui a découvert ce théorème fondamental en a donné plusieurs démonstrations tirées de sa théorie des modules. Hilbert l'établit très simplement en s'appuyant sur le lemme suivant, généralisation d'un théorème de Gauss : Étant donnés deux polynomes

$$F(x) = \alpha_1 x^m + \alpha_2 x^{m-1} + \ldots,$$
$$G(x) = \beta_1 x^n + \beta_2 x^{n-1} + \ldots$$

dont le produit est

$$F(x) G(x) = \gamma_1 x^{m+n} + \gamma_2 x^{m+n-1} + \ldots,$$

si les α, β, sont des entiers algébriques et si les γ sont tous divisibles par un entier algébrique ω, chacun des produits $\alpha_i \beta_k$ est divisible par ω.

Du théorème fondamental se déduisent aisément des théorèmes sur les normes des idéaux, et une théorie des congruences par rapport aux idéaux, en particulier l'extension aux nombres algébriques des théorèmes de Fermat et d'Euler, ainsi que la théorie des nombres primitifs par rapport à un idéal premier.

L'auteur est ensuite conduit à développer une notion déjà introduite à propos du théorème fondamental, celle de la correspondance entre les idéaux et les formes de Kronecker, un idéal étant, selon l'expression de Hilbert, le *contenu* d'une forme. En suivant la méthode de Hensel, basée sur une extension aux polynomes à plusieurs variables de la théorie de la divisibilité des polynomes (mod p), il obtient aisément, d'une part, le théorème sur les diviseurs du discriminant du corps, d'autre part un procédé pour la détermination effective des idéaux premiers.

Dans la question essentielle des unités, les célèbres inégalités de Minkowski conduisent de la façon la plus nette au théorème de Dirichlet sur les unités fondamentales d'un corps.

Elles fournissent ensuite aisément la démonstration du théorème de Dedekind, d'après lequel le nombre des classes d'idéaux non équivalents d'un corps est fini, et donnent même un moyen pour la détermination méthodique de toutes ces classes. Dedekind a donné sous forme transcendante une belle expression du nombre h des classes d'idéaux; il l'a obtenue en généralisant la célèbre méthode employée pour la première fois par Lejeune-Dirichlet, dans la détermination du nombre des classes de formes quadratiques binaires de déterminant donné. L'auteur donne la démonstration détaillée de cette formule de Dedekind, qui est la suivante :

$$h = \frac{w}{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}} \cdot \frac{|\sqrt{d}|}{R} \cdot \lim_{s=1} (s-1)\zeta(s);$$

w est le nombre des racines de l'unité contenues dans le corps, r_1 est le nombre des corps réels et r_2 celui des couples de corps imaginaires conjugués qu'on obtient en prenant successivement pour nombre générateur chacune des racines de l'équation génératrice, d est le discriminant du corps et R le régulateur, c'est-à-dire le déterminant des logarithmes d'un système d'unités fondamentales et de ses conjugués, enfin le dernier facteur est le résidu pour $s = 1$ de la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{\mathfrak{I}} \frac{1}{n(\mathfrak{I})^s},$$

dans laquelle la sommation est étendue aux normes de tous les idéaux du corps.

Pour terminer ce Chapitre relatif aux classes d'idéaux, l'auteur

étudie la *composition* des classes; elle dépend d'un groupe abélien de substitutions, et toute classe est un produit de puissances d'un certain nombre de classes fondamentales.

La théorie des classes d'idéaux correspond à une théorie parallèle de formes décomposables, d'après la relation signalée plus haut.

Cette première Partie de l'Ouvrage, relative aux corps algébriques quelconques, se termine par une étude des *modules* de Dedekind, et des *ordres* ou, selon l'expression d'Hilbert, des *anneaux* de nombres. Un module est un ensemble de nombres tels que la somme et la différence de deux quelconques d'entre eux fasse encore partie de l'ensemble; un ordre est un module contenant le nombre 1 et tel que le produit de deux nombres de l'ensemble en fasse encore partie. Il existe des idéaux dans un ordre algébrique et même des idéaux communs à l'ordre et au corps; leur plus grand commun diviseur est appelé par Dedekind le *conducteur* de l'ordre. Ce sont ces notions qui jouent le rôle principal dans la théorie de Dedekind.

Il nous reste à parler, pour terminer ce qui concerne la théorie générale, du Chapitre V qui traite des corps relatifs : nous le mettons à part, parce que les notions nouvelles faisant l'objet de ce Chapitre constituent une généralisation des théories précédentes, et qu'elles interviennent dans tout le reste de l'Ouvrage, notamment dans les corps galoisiens.

Si un corps C contient tous les nombres d'un corps c, on dit que c'est un *sur corps* ou un *corps relatif* de c. Un nombre Θ, générateur du corps C vérifie une équation irréductible dans c

$$\Theta^r - \alpha_1 \Theta^{r-1} - \ldots - \alpha_r = 0$$

dont les coefficients α appartiennent à c.

Son degré r est le *degré relatif* de C par rapport à c; les autres racines Θ', etc., engendreront des corps relatifs conjugués de C. Les notions de normes relatives, de différente et de discriminant relatifs, introduites ensuite par Hilbert, sont très commodes et conduisent à des énoncés d'une simplicité remarquable, comme par exemple le suivant : *la différente d'un corps relatif est égal au produit de la différente du corps inférieur par la différente relative.*

II. *Corps galoisiens.* — On appelle aujourd'hui *équation de Galois* toute équation algébrique dont toutes les racines appartiennent au même domaine de rationalité que l'une quelconque d'entre elles : cette dénomination est justifiée par l'importance des équations de ce genre dans les travaux de l'immortel créateur de la théorie des substitutions. Un corps algébrique dont l'équation génératrice est une équation de Galois est un corps galoisien. L'auteur fait une étude approfondie de ces corps et obtient des résultats nouveaux importants, qui sont devenus classiques.

D'abord il donne pour ces corps une démonstration particulière d'une grande simplicité du théorème fondamental de Dedekind sur les idéaux. Et comme un corps algébrique quelconque peut toujours être considéré comme faisant partie du corps galoisien qu'on obtient en lui adjoignant tous ses conjugués, il est aisé de déduire de cette démonstration une nouvelle démonstration du théorème général.

Ensuite, il met en évidence d'une manière complète les rapports qui existent entre un idéal premier et le groupe de l'équation génératrice galoisienne. Il y parvient en considérant une série de sous-groupes et de sous-corps correspondants, qu'il appelle le sous-groupe et le sous-corps de décomposition (Zerlegung), le sous-groupe et le sous-corps d'inertie (Trägheit) et les sous-groupes et sous-corps successifs de ramification (Verzweigung).

En tenant compte de la nature spéciale de ces corps comme corps relativement abéliens ou corps relativement cycliques, il établit des rapports étroits entre les propriétés arithmétiques des corps galoisiens et leurs propriétés algébriques. C'est ainsi que les équations galoisiennes sont résolubles par radicaux dans le domaine d'un corps de décomposition. Citons aussi la relation curieuse qui existe entre la densité des nombres premiers décomposables en idéaux premiers du premier degré d'un corps quelconque et le degré de la résolvante de Galois de son équation génératrice.

L'auteur établit enfin certaines relations étroites entre les classes d'idéaux d'un corps quelconque et un corps relativement cyclique par rapport au premier et de différente relative égale à 1.

III. *Corps quadratiques.* — Ces théories générales développées dans les deux premières Parties trouvent leur application naturelle

la plus simple dans les corps quadratiques; ces corps, qui sont d'ailleurs galoisiens, sont ceux dont le nombre générateur est $\sqrt{m}$, m étant un nombre entier positif ou négatif sans facteur carré. Dans ces corps, la détermination d'une base du discriminant, des idéaux premiers, des unités et des classes d'idéaux se fait sans difficulté.

L'étude des corps quadratiques ramène aux beaux résultats de Gauss pour les formes quadratiques. Les deux résultats qui dominent toutes ces théories sont la loi de réciprocité de Legendre-Gauss pour le symbole de Legendre relatif aux restes quadratiques et la répartition des classes en *genres*.

Hilbert a grandement simplifié l'exposition de ces questions en introduisant son nouveau symbole relatif aux restes normiques, qui est sous certains rapports une généralisation du symbole de Legendre. Dans le corps quadratique défini par $\sqrt{m}$, un entier rationnel n est dit reste normique d'un nombre premier quelconque p, si la congruence

$$N(x_\lambda) \equiv n \pmod{p^\lambda}$$

est vérifiée par des nombres x_λ du corps pour chaque valeur de l'exposant λ. Le symbole d'Hilbert $\left(\frac{n, m}{p}\right)$ est alors égal à $+1$; pour les entiers qui ne sont pas restes normiques, le symbole a la valeur -1. Les *caractères* d'un idéal, qui en définissent le genre, s'obtiennent aisément à l'aide de ce symbole appliqué à la norme de l'idéal et aux divers facteurs premiers p_h du discriminant.

Les règles de calcul de ce symbole une fois établies, son emploi conduit à une démonstration très naturelle de la loi de réciprocité de Legendre, ainsi qu'à la détermination, par voie arithmétique, du nombre des genres, égal, comme on sait, à la moitié du nombre total de tous les systèmes possibles de caractères.

Ce dernier résultat est encore obtenu par la méthode transcendante de Dirichlet, en même temps que l'expression, ramenée à une forme finie, du nombre des classes. L'auteur démontre même l'existence dans chaque genre d'une infinité d'idéaux premiers, proposition analogue au célèbre théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.

IV. *Corps circulaires.* — On appelle *corps circulaires* ceux

dont le nombre générateur ζ est une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{m}}$. C'est en vue de l'étude de l'équation de Fermat : $x^n + y^n = z^n$, que Kummer a fait une étude approfondie de ces corps, et c'est à cette occasion qu'il a imaginé les nombres idéaux, création qui a conduit Dedekind à celle d'idéal. Les méthodes de Kummer ont pour fondement la théorie de Gauss sur la division du cercle; elles donnent lieu à des calculs compliqués. Dans la quatrième et la cinquième Partie de son Rapport, Hilbert expose en les complétant les résultats de Kummer, mais l'emploi des théorèmes généraux précédemment établis rend son exposition beaucoup plus souple et plus lumineuse.

Sans vouloir faire une analyse détaillée de cette partie de l'Ouvrage, qui en est la plus étendue, nous devons signaler le Chapitre relatif aux propriétés des corps circulaires comme corps abéliens. En attribuant à l'expression de corps circulaire un sens plus large, de façon à donner ce nom même aux sous-corps d'un corps circulaire (au sens ancien), on arrive à l'important théorème de Kronecker : tout corps abélien dans le domaine de rationalité des nombres rationnels est un corps circulaire.

Les propriétés développées dans ce Chapitre trouvent leur application dans l'étude de la base normale de Lagrange, (celle qui est composée de *périodes*) et de la *racine* (ou résolvante) correspondante.

Le symbole de Legendre pour les restes quadratiques a été généralisé par Kummer pour les résidus de puissances $l^{\text{ièmes}}$ dans le corps circulaire des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité (l étant premier impair). Pour l'étude de ce symbole généralisé, l'auteur commence par démontrer le théorème d'Eisenstein sur la loi de réciprocité pour les résidus de $l^{\text{ièmes}}$ puissances entre un nombre rationnel et un nombre du corps circulaire $e\left(e^{\frac{2i\pi}{l}}\right)$.

L'application au corps circulaire de la méthode générale donnée dans la première Partie conduit aux formules trouvées par Kummer pour le nombre des classes d'idéaux. La méthode suivie donne par surcroît la démonstration du théorème de Legendre-Dirichlet sur l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique dont la raison et le premier terme sont premiers entre eux.

Enfin, la théorie du corps circulaire, appliquée aux corps quadratiques, fournit l'expression des unités des corps quadratiques réels à l'aide d'unités circulaires, et donne une nouvelle démonstration de la loi de réciprocité.

V. *Corps kummériens.* — L'introduction de ces corps qui est due à Hilbert permet de simplifier beaucoup la théorie de Kummer : ce sont les corps obtenus par l'adjonction à la racine $l^{\text{ième}}$ de l'unité $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{l}}$, de la racine $l^{\text{ième}}$ d'un nombre quelconque μ du corps $c(\zeta)$, $M = \sqrt[l]{\mu}$ [l est supposé premier impair et M est supposé ne pas appartenir au corps $c(\zeta)$]. Le corps $C(\zeta, M)$ ainsi composé est un corps abélien relatif de degré l par rapport au corps $c(\zeta)$. Il y a là, on le voit, une analogie entre les corps kummériens et les corps quadratiques, ces derniers étant abéliens relatifs de degré 2 par rapport aux corps des entiers rationnels. L'auteur développe cette analogie et définit les *caractères* de puissances qu'il faut attribuer à chaque idéal premier ; il démontre le théorème de Kummer sur l'existence d'une infinité d'idéaux premiers ayant des caractères donnés.

Pour aller plus loin l'auteur se borne aux corps circulaires appelés *réguliers* par Kummer, c'est-à-dire à ceux pour lesquels l ne divise pas le nombre des classes. Après avoir établi le critérium qui permet de reconnaître si un nombre premier l est régulier (il faut et il suffit qu'il ne divise le numérateur d'aucun des $\frac{l-3}{2}$ premiers nombres de Bernoulli), l'auteur indique les propriétés caractéristiques dont jouissent les unités dans un corps circulaire régulier.

Poursuivant l'étude des *caractères* des nombres et des idéaux des corps réguliers, il parvient à répartir les classes d'idéaux en genres et il établit une correspondance lumineuse entre les classes des corps kummériens réguliers et certaines unités des corps circulaires qu'ils contiennent.

Après avoir établi dans toute sa généralité la loi de réciprocité de Kummer, dont celle d'Eisenstein n'est qu'un cas particulier, l'auteur parvient à la détermination du nombre des genres dans un corps kummérien régulier ; il est égal à l^{r-1}, r étant le nombre des caractères distinctifs d'un genre, résultat entièrement analogue à celui du corps quadratique.

Ces beaux théorèmes dus à l'auteur et les méthodes élégantes par lesquelles il les démontre mettent ces derniers Chapitres au nombre des plus attrayants du Livre et justifient l'expression employée quelque part par lui sur « la beauté cristalline des lois qui régissent les corps algébriques ».

D'ailleurs Hilbert donne encore en dernier lieu une méthode nouvelle, indépendante des développements de logarithmes en série employés par Kummer, et qui permet d'établir les résultats précédents avec le maximum de simplicité.

L'Ouvrage se termine enfin par une application de la théorie des corps kummériens réguliers à la démonstration du théorème de Fermat sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation

$$x^l + y^l = z^l$$

dans le cas particulier où l'exposant l est régulier.

Les quelques indications que nous venons de développer donneront une idée encore incomplète de l'Ouvrage de M. Hilbert, car nous avons volontairement, pour ne pas trop nous étendre, passé sous silence bien des points qui, sans être d'une importance essentielle, sont pourtant très intéressants. Notre seul but a été d'inspirer aux lecteurs le désir de lire le Livre lui-même. Selon le jugement porté par M. Poincaré dans son rapport sur le prix Bolyai : *l'introduction des idéaux par Kummer et Dedekind a été un progrès considérable, elle a généralisé et éclairé en même temps les résultats classiques de Gauss sur les formes quadratiques et leur composition. Les travaux de M. Hilbert constituent un nouveau pas en avant et qui n'est pas moins important que le premier* ».

TH. GOT.

A. KNESER. — DIE INTEGRALGLEICHUNGEN UND IHRE ANWENDUNGEN IN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK ; 1 volume in-8° de 244 pages. Brunswig, Vieweg, 1911.

1. Ce très intéressant exposé de la théorie des équations intégrales est orienté vers les applications. Il part de problèmes simples sur la propagation de la chaleur, les vibrations libres ou entre-

tenues, la théorie du potentiel et traite d'abord individuellement chaque question en faisant le moins possible appel à la théorie générale: celle-ci est expliquée avec rigueur dans les soixante dernières pages.

Le Livre s'adresse principalement aux physiciens en vue de leur faciliter l'accès des équations intégrales, en se limitant aux propriétés de ces équations dont ils auront à faire usage.

Les trois premières Sections ont pour titres:

1° *Équations intégrales et propagation linéaire de la chaleur.*

2° *Équations intégrales et vibrations de systèmes linéaires.*

3° *Équations intégrales et Théorie de Sturm et Liouville.*

Une partie des questions traitées dans ces premières Sections pour des systèmes linéaires se trouve étendue à un domaine à deux ou à trois dimensions, dans les sections suivantes. Pour ne pas trop allonger ce compte rendu, je commencerai l'exposé à la quatrième Section ayant pour titre: *Propagation de la chaleur et vibrations dans des domaines à deux et à trois dimensions* et je me limiterai aux exemples empruntés à la théorie de la chaleur.

2. Il est utile d'abord de rappeler quelques définitions et d'expliquer les notations employées dans cette Section.

Définition. — Une fonction est dite *partiellement continue* (stuckweise stetig) dans un domaine, si celui-ci peut être décomposé en domaines partiels, à l'intérieur desquels la fonction est continue, et si elle tend vers une limite quand on s'approche d'une des cloisons qui séparent les domaines partiels.

On désigne ici les points du domaine par 0, 1, 2,...; les éléments d'un volume, d'une surface, d'une ligne par dr, ds, dl; l'indice 0 n'est pas écrit, quand il n'y a pas de confusion à craindre. Un certain domaine est désigné comme domaine fondamental et c'est toujours le champ d'intégration pour les intégrales qui ne portent pas d'indication spéciale. Une aire et son contour seront désignées par A et C; un volume et la surface qui limite ce volume par R et F.

La fonction de Green K(0, 1) pour l'aire A est définie par les

conditions

$$\Delta K(0, 1) = 0,$$

$$K(0, 1) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{1}{r_{01}} + M(0, 1),$$

Δ désignant le premier membre de l'équation de Laplace et M une fonction continue des points 0, 1 dans tout le domaine; enfin, sur le contour (C), on a une condition de l'une des formes

$$K(0, 1) = 0, \qquad \frac{dK(0, 1)}{dN} + h K(0, 1) = 0,$$

h désignant une constante positive et $\frac{d}{dN}$ la dérivée suivant la normale extérieure. L'existence de la fonction de Green se trouvera établie dans chacun des cas traités. Elle sera démontrée en général dans la troisième Section. On montre facilement que c'est une fonction symétrique des deux points 0 et 1.

Tout ceci rappelé, le problème de la propagation de la chaleur dans une aire A se ramène aux équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u,$$

$$u = 0, \qquad \overline{\frac{du}{dF} + hu} = 0 \qquad (h > 0),$$

l'une des deux dernières se rapportant au contour C.

Puis, en remplaçant u par un produit de deux facteurs dont l'un dépend seulement du temps, et dont l'autre, φ, dépend seulement de la position du point 0,

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0,$$

$$\varphi = 0, \qquad \overline{\frac{d\varphi}{dN} + h\varphi} = 0,$$

λ désignant une constante.

De ces équations que l'on doit vérifier φ des équations correspondantes pour la fonction $K(0, 1)$, on déduit, à l'aide du théorème de Green,

$$(1) \qquad \varphi(1) = \lambda \int K(0, 1)\, \varphi(0)\, ds.$$

Réciproquement, une solution continue de cette équation vérifie

la relation

$$\Delta\varphi = -\lambda\varphi$$

et la condition sur le contour (C).

L'équation (I) est une équation intégrale; K(0, 1) est appelé *noyau* (Kern); λ est une *valeur propre* (Eigenwert) et φ une *fonction propre* de ce noyau.

Deux fonctions propres qui correspondent à deux valeurs propres différentes satisfont à la relation

$$\int \varphi_m \varphi_n \, ds = 0,$$

on dit qu'elles sont orthogonales.

Les valeurs propres sont réelles et positives.

Si $f(0)$ est une fonction partiellement continue ainsi que ses dérivées premières dans le domaine fondamental, la fonction

$$F(1) = \int K(0, 1) f(0) \, ds$$

a le caractère d'un potentiel; elle est aussi continue et satisfait à la même condition aux limites que le noyau K(0, 1); on démontre qu'elle satisfait à la relation

$$\Delta F(1) = -f(1).$$

Réciproquement une fonction de point continue avec une dérivée première continue et des dérivées seconde et troisième partiellement continues, satisfaisant à la même condition aux limites que K(0, 1) peut être représentée sous la même forme d'intégrale avec le noyau K(0, 1) comme F(1). Les fonctions de cette forme (quellen mässig) ont, relativement aux fonctions propres, des propriétés particulièrement simples.

Dans le cas où la condition aux limites se réduit à

$$\frac{du}{dN} = 0,$$

il y a lieu de modifier l'énoncé. Une remarque analogue devrait être répétée plusieurs fois dans ce qui suit.

Je citerai quelques-uns des exemples traités avec détails, montrant bien le parti qu'on peut tirer de la théorie précédente.

Dans le problème de la propagation de la chaleur dans un plateau rectangulaire dont le contour est maintenu à la température zéro, les équations à vérifier sont

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0,$$
$$\varphi(0, y) = \varphi(a, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0;$$

les fonctions propres sont

$$\varphi_{m,n}(0) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b};$$

on a introduit un facteur tel que

$$\int \varphi_{m,n}^2\, ds = 1.$$

Quand cette condition est réalisée, on dit que la fonction propre est *normale*.

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{m,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \qquad (m, n \text{ entiers}).$$

Le noyau $K(0, 1)$ est donné par la formule

$$K(0, 1) = \frac{\sum\sum \varphi_{m,n}(x, y)\,\varphi_{m,n}(x_1, y_1)}{\lambda_{m,n}}$$

et la valeur du deuxième membre peut être représentée en termes finis à l'aide des fonctions ϑ de Jacobi.

Le problème de la propagation de la chaleur dans une couche sphérique infiniment mince, protégée contre le rayonnement à l'intérieur et à l'extérieur, donne ici des résultats qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions sphériques. L'équation aux dérivées partielles est

$$\Delta\Phi + \lambda\Phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} + \lambda\Phi = 0,$$

et l'on doit prendre, pour avoir des fonctions continues, $\lambda = n(n+1)$ avec n entier et positif.

L'équation intégrale correspondante est

$$\Phi(1) = \lambda\int K(0, 1)\,\Phi(0)\,ds \qquad [\lambda = n(n+1)].$$

où le domaine fondamental est la surface de la sphère, et où le noyau, obtenu en s'aidant de remarques physiques, est

$$K(0, 1) = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{Log}(1 - \cos\gamma) - \frac{1}{4\pi}(1 - \log 2)$$

avec

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\omega - \omega_1).$$

A la valeur propre $\lambda = m(m+1)$ correspondent $2m+1$ fonctions propres linéairement indépendantes

$$P_m(x), \quad P_m^\nu(\cos\theta)\sin\nu\omega, \quad P_m^\nu(\cos\theta)\cos\nu\omega \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

les fonctions $P_m(x)$ et $P_m^\nu(x)$ étant les fonctions de Legendre et les fonctions associées.

Pour l'équation intégrale qui correspond au refroidissement de la sphère, les fonctions propres s'obtiennent à l'aide des fonctions de Bessel.

Une application importante est la recherche de conditions permettant d'affirmer, dans des cas analogues aux précédents, qu'une fonction $F(0)$ est développable en série ordonnée suivant les fonctions propres correspondant à un noyau donné,

$$F(0) = \Sigma\, a_n \varphi_n(0).$$

C'est une question qui est traitée avec détails dans ce livre et à laquelle se rapportent des travaux importants de M. Kneser.

Si le développement est possible et si la série peut être intégrée terme à terme, les coefficients a_n peuvent être calculés comme ceux de Fourier, à l'aide des relations

$$\int \varphi_m \varphi_n\, ds = 0, \qquad \int \varphi_n^2\, ds = 1.$$

La conclusion est que, dans les cas traités dans la quatrième Section, le développement est possible pour une fonction F qui, dans le domaine fondamental, est continue ainsi que ses dérivées premières, admet des dérivées du deuxième et du troisième ordre partiellement continues et satisfait sur le contour à la même condition que le noyau.

Ces résultats sont étendus à des fonctions discontinues, mais en supposant les fonctions propres d'une forme particulière, et il y a ensuite à chercher ce que représente la série en un point appar-

tenant à une ligne de discontinuité. Avec des précautions convenables, on trouve un résultat analogue à celui qui se présente pour une série de Fourier en un point de discontinuité.

3. Dans la cinquième Section, *Théorème d'existence et Problème de Dirichlet*, on établit que tout noyau continu et symétrique admet au moins une fonction propre et l'on rattache à cette proposition l'existence d'une solution du problème de Dirichlet dans le plan et dans l'espace, et aussi l'existence de la fonction de Green relative à la propagation de la chaleur, dans le cas où il y a rayonnement à la surface du corps conducteur.

L'existence d'une fonction propre pour un noyau symétrique $K(x, y)$ (x et y désignant deux points d'un domaine à une, deux ou trois dimensions, et dx, dy des éléments de ce domaine) est établie, par un calcul de limites, en considérant des noyaux réitérés définis par les égalités

$$\int K(x, y) K(x, z)\, dx = K^2(y, z),$$

$$\int K^n(x, y) K(x, z)\, dx = K^{n+1}(y, z),$$

puis l'intégrale

$$U_m = \int K^m(x, y)\, dx.$$

Dans le cas d'un noyau non symétrique, on établit le théorème de Fredholm. L'équation

$$\varphi(x) = f(x) - \int K(x, \alpha) \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

dans laquelle $f(x)$ n'est pas identiquement nulle, admet une solution continue, si aucune des équations

$$\varphi(x) = \int K(x, \alpha) \varphi(\alpha)\, d\alpha, \qquad \varphi(x) = \int K(\alpha, x) \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

n'admet une telle solution, et cela que K soit continu ou admette des singularités analogues à celle des fonctions de Green considérées plus haut.

4. La sixième Section est consacrée aux *Séries de Fredholm* pour l'équation intégrale

$$\psi(x) = f(x) - \lambda \int_{\cdot} K(x, \alpha)\psi(\alpha)\, d\alpha;$$

la solution peut se mettre sous la forme du quotient de deux expressions analogues aux déterminants et qui sont des fonctions entières de λ. Pour une valeur λ_1 qui annule le dénominateur $D(\lambda)$ de ce quotient, l'équation homogène

$$\psi(x) = \lambda_1 \int_{\cdot} K(x, \alpha)\psi(\alpha)\, d\alpha$$

admet une solution.

Dans le cas où le noyau est continu et symétrique, on démontre que $D(\lambda)$ admet au moins une racine et l'on établit ainsi, par un nouveau procédé, l'existence d'une fonction propre pour un tel noyau, résultat dont on a vu l'importance fondamentale.

E. Lacour.

BIGOURDAN (G.). — L'Astronomie. Évolution des idées et des méthodes. (*Bibliothèque de Philosophie contemporaine*.) 1 volume in-12 jésus, 50 illustrations, VII-399 pages. Paris, Ernest Flammarion, 1911.

Cet Ouvrage de M. G. Bigourdan, membre de l'Institut, astronome à l'Observatoire de Paris, est divisé en cinq Livres, dont les quatre premiers se rapportent à l'Astronomie physique et le dernier à l'Astronomie mathématique. Mais tout le volume peut être lu par les personnes qui ont en vue de connaître seulement les progrès accomplis dans les branches principales de cette belle Science.

Livre I. *Les origines de l'Astronomie*. — L'Auteur cherche à pénétrer dans les connaissances astronomiques primitives en étudiant les premiers moyens employés pour diviser le temps, en examinant les plus anciennes cosmogonies, en tenant compte des données de l'Astrologie, si en honneur dans l'antiquité, encore en faveur à l'époque de Képler. Aussi s'occupe-t-il d'abord des premières observations célestes, des planètes et du zodiaque, de l'opi-

nion ancienne sur la marche des planètes. Dans le Chapitre III, il a montré la profonde influence de l'Astrologie sur le développement de l'Astronomie, et, pour satisfaire la curiosité du lecteur, il cite quelques-unes des croyances des humains en l'influence des astres, heureuse ou funeste selon les positions de ceux-ci. Il explique ainsi l'origine des éphémérides perpétuelles relatives aux planètes : les astrologues, comprenant qu'ils auraient sur les gouvernants une grande puissance morale en leur prédisant à l'avance les phénomènes célestes, accumulèrent des observations qui leur permirent de faire leurs prédictions avec précision. L'Auteur termine ce Livre par l'examen du « système des pythagoriciens qui restera une des plus brillantes étapes sur la route qui a conduit à la connaissance de l'Univers ».

Livre II. *La mesure du temps et le calendrier.* — Après un court exposé des calendriers anciens, M. G. Bigourdan donne des renseignements sur les réformes du calendrier. Puis il fait « l'histoire de l'heure, du gnomon au chronomètre » afin d'amener le lecteur à constater que « pour l'homme aucune conquête n'a été plus complète que celle de l'heure ».

Livre III. *Les instruments et les moyens d'observation.* — L'Auteur passe en revue les instruments destinés aux mesures célestes. Il donne d'abord quelques détails sur les instruments primitifs, sur ceux de la période alexandrine, du moyen âge et des temps modernes. Un Chapitre est consacré à la lunette : on y reconnaît qu'il ne veut pas trancher la question de sa découverte. Il écrit en effet : « Il semble que la découverte des lunettes fut due au hasard. On s'accorde pour l'attribuer à un Hollandais.... Ainsi, en octobre 1608, les lunettes étaient déjà inventées à Middelbourg; la connaissance de cet instrument se répandit avec une rapidité étonnante dans toute l'Europe civilisée.... De son côté Galilée, à Padoue, l'inventa de nouveau en 1609.... » Ensuite l'Auteur, après avoir parlé du micromètre, explique l'application des lunettes et du micromètre aux quarts de cercle et décrit l'équatorial de Rœmer.

Livre IV. *La forme et la grandeur de la Terre. Ses premières représentations.* — Avec le plus grand souci d'attacher le

lecteur, M. G. Bigourdan est parvenu avec succès, d'un bout à l'autre du Livre IV, à présenter l'exposé à la fois historique, descriptif et anecdotique, des idées anciennes relativement à la forme et à la grandeur de la Terre, des mesures de notre globe depuis Eratosthène jusqu'aux Arabes, de la solution du problème des longitudes si important en Marine, des mesures modernes de la Terre, des méthodes scientifiques contemporaines pour déterminer la figure de la Terre. Il nous paraît important de dégager cette réflexion philosophique que fait l'Auteur, après avoir dit que Pythagore enseignait que la Terre est sphérique et qu'elle est au centre de l'Univers : « Si l'on songe combien cette idée se trouve en opposition avec le témoignage immédiat de nos sens, on jugera quel effort de génie elle suppose, surtout à une époque où l'on ne connaissait qu'une faible partie de la surface de la Terre. »

Livre V. *Astronomie mathématique ou de position.* — M. G. Bigourdan, avec le sens exact du but de son Ouvrage : vulgariser la science astronomique, s'est bien gardé de nous présenter des calculs et s'est attaché à faire l'histoire des progrès qui ont permis d'arriver à prédire d'une façon précise les mouvements des astres du système solaire. Le lecteur ne doit donc pas s'effrayer : seuls les titres des Chapitres semblent annoncer que des choses ardues y sont traitées.

En terminant son beau travail, M. G. Bigourdan fait bien ressortir l'heureuse influence de l'Astronomie. Il est bien exact que : « En même temps qu'elle découvrait les lois qui président à la marche des mondes, ..., l'Astronomie a chassé les chimères de l'Astrologie, banni les craintes que faisaient naître certains phénomènes d'apparence extraordinaire, révélé la grandeur et la figure de la Terre, donné à la Géographie et à la Navigation tout leur essor, ..., exercé une influence profonde sur la vie des peuples et sur les progrès de la civilisation. »

Er. L.

E. JANKE. — MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE HERAUSGEGEBEN VON J. 1° *Einführung in die Theorie des Magnetismus*, von *R. Gans*. 2° *Electromagnetische Ausgleichvorgänge in Freileitungen und Kabeln*, von *Karl Emil Wagner*. 3° *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Electricität und des Magnetismus*, von *Clemens Schæfer*. Leipzig und Berlin. Druck und Verlag von B.-G. Teubner.

Ces Volumes sont les premiers d'une collection dont le cartonnage « sang de bœuf » sera bientôt visible dans toutes les bibliothèques de nos laboratoires, du moins de ceux où l'on confronte constamment l'expérience avec la théorie. D'un format de poche comme notre collection *Scientia*, ayant comme elle 100 à 150 ou 200 pages, chacun de ces petits Volumes est un excellent résumé théorique d'une question limitée : la théorie mathématique du magnétisme; les propagations électromagnétiques dans les fils et câbles; l'introduction à la théorie de l'électricité et du magnétisme de Maxwell.

Le premier est un bon résumé *théorique* du sujet, sans grande originalité; le second, élémentaire aussi, est illustré de très nombreux diagrammes de propagation des diverses discontinuités, qui sont fort instructifs; le troisième est également un bon sommaire des gros Traités de Maxwell avec les principaux compléments dus à Pointing et à Hertz, orné d'un beau portrait de Maxwell.

Ont paru depuis : un très bon petit Volume sur les fonctions de Bessel, par Lehafheitlin : un recueil de **Tables numériques** avec courbes par Janke, tout à fait précieux.

Bonne impression, très claire, où les formules se détachent bien.

M. BRILLOUIN.

G.-H. BRYAN. — THERMODYNAMICS. An introductory treatise dealing with first principles and their direct applications. Teubner, 1907.

Le Livre de M. Bryan est court (200 pages) mais plein, comme les Anglais ont pris l'habitude d'en écrire sur les questions de Physique mathémathique. Il est sensiblement plus étendu que

l'article écrit par l'auteur pour l'*Encyclopédie Mathématique*, et en diffère sur bien des points; enfin il forme un tout et traite de questions qui, dans le plan général de l'*Encyclopédie Mathématique*, avaient été attribuées à d'autres auteurs, la radiation, les mélanges, par exemple. C'est un Traité exclusivement théorique : sur ce point l'auteur s'explique clairement dans sa Préface. Il est à son avis, nécessaire au progrès de la science et à la clarté des idées des étudiants, que la partie expérimentale et la partie théorique de la Thermodynamique soient nettement distinguées; qu'elles soient étudiées autant que possible dans des livres différents. Pour sa part, il a voulu traiter la question par les méthodes exclusivement déductives, comme on traite la Mécanique rationnelle; du point de vue logique, il regarde les lois de la Thermodynamique « comme fournissant des *définitions* de la chaleur et de la température, de même que les lois de Newton fournissent (autant que cela est possible) des définitions de la force et de la masse ». Cette méthode déductive, l'auteur l'applique rigoureusement à partir du Chapitre IV (Livre II), à la suite de trois courts Chapitres préléminaires (Livre I). L'irréductibilité et la perte d'énergie utilisable à chaque transformation réelle sont à la base de tous les raisonnements; mais l'auteur n'oublie pas que les lois de la Thermodynamique sont relatives aux phénomènes qui s'accomplissent à une certaine échelle; à l'échelle moléculaire, les choses se compliquent, ou tout au moins se transforment, les notions thermodynamiques pures n'y sont pas toutes appréciables sans précautions. Les six Chapitres qui forment le Livre II constituent l'exposé doctrinal proprement dit.

Toute la partie, qui forme la seconde moité du Volume est relative à la thermodynamique des systèmes particuliers : Radiation, Gaz parfaits, Changements d'états, Thermoélectricité, Modèles dynamiques.

Œuvre forte et originale. On aura plaisir à lire la seconde Partie, en se reportant souvent au premier Volume du *Traité d'Énergétique* de Duhem, qui vient de paraître.

M. Brillouin.

MÉLANGES.

LA DÉTERMINATION DU SYSTÈME ORTHOGONAL COMPLET D'UN NOYAU DONNÉ PAR LES DÉTERMINANTS INFINIS DE M. H. VON KOCK:

PAR M. JOHANNES MOLLERUP.

I. — *Les équations homogènes.*

Soient d'après M. Erhard Schmidt (*Mathematische Annalen*, 63) les deux équations conjuguées simultanées

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(s) = \lambda \displaystyle\int_a^b K(st)\,\psi(t)\,dt, \\ \psi(s) = \lambda \displaystyle\int_a^b K(ts)\,\varphi(t)\,dt; \end{cases}$$

le noyau $K(st)$ est continu dans le domaine

$$a \leqq \frac{s}{t} \leqq b.$$

Soient λ une valeur propre et (φ, ψ) deux fonctions continues conjuguées; soit encore

$$\zeta_1(s), \quad \zeta_2(s), \quad \ldots$$

un système orthogonal complet dans l'intervalle (a, b). Alors on a, d'après la formule dite *de Parseval* (*Vollständigkeitsrelation*),

$$(2)\qquad \begin{aligned} \varphi(s) &= \lambda \int_a^b K(st)\,\psi(t)\,dt \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b K(st)\,\zeta_i(t)\,dt \int_a^b \psi(t)\,\zeta_i(t)\,dt, \end{aligned}$$

où converge absolument et uniformément la série (ERHARD SCHMIDT, *loc. cit.*, § 2).

Posons

$$(3)\qquad \alpha_i(s) = \int_a^b K(st)\,\xi_i(t)\,dt.$$

$$(4)\qquad \sigma_i = \int_a^b \psi(t)\,\beta_i(t)\,dt.$$

c'est-à-dire

$$(5)\qquad \varphi(s) = \lambda \sum_i \alpha_i(s)\,\sigma_i.$$

La deuxième équation (1) s'écrit

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(s)\,ds;$$

alors on a

$$(6)\qquad \sigma_i = \lambda \int_a^b \int_a^b K(st)\,\varphi(s)\,\beta_i(t)\,ds\,dt = \lambda \int_a^b \alpha_i(s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Introduisant (5) dans (6) on aura

$$(7)\qquad \sigma_i = \lambda^2 \int_a^b \alpha_i(s) \sum_j \alpha_j(s)\,\sigma_j\,ds = \lambda^2 \sum_j \sigma_j \int_a^b \alpha_i(s)\,\alpha_j(s)\,ds,$$

la série $\sum_j \alpha_j(s)\,\sigma_j$ convergeant uniformément.

(7) est un système d'équations linéaires déterminant les inconnues σ_i; les coefficients sont

$$(8)\qquad a_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s)\,\alpha_j(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(st)\,K(su)\,\beta_i(t)\,\beta_j(u)\,ds\,dt\,du$$
$$= \int_a^b \int_a^b k(tu)\,\beta_i(t)\,\beta_i(u)\,dt\,du,$$

où le noyau itéré

$$k(tu) = \int_a^b K(st)\,K(su)\,ds$$

sera symétrique.

Les équations homogènes

$$(7)\qquad \sigma_i = \lambda^2 \sum \sigma_j\,a_{ij}$$

ont le déterminant infini symétrique

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 a_{11} - 1 & \lambda^2 a_{12} & \lambda^2 a_{13} & \dots \\ \lambda^2 a_{21} & \lambda^2 a_{22} - 1 & \lambda^2 a_{23} & \dots \\ \lambda^2 a_{31} & \lambda^2 a_{32} & \lambda^2 a_{33} - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Après la théorie de M. v. Koch (*Rend. di Palermo*, t. XXVIII) ce déterminant convergera absolument, si les séries $\sum_i [a_{ii}]$ et $\sum_{pq} a_{pq}^2$ convergent. La convergence de cette dernière somme est bien connue (Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, fünfte Mitteilung, p. 446). Quant à la première série, on a

$$a_{ii} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(st) K(su) \zeta_i(t) \zeta_i(u)\, ds\, dt\, du$$
$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(st) \zeta_i(t)\, dt \right]^2 ds = \sum_j b_{ij}^2,$$

en posant

$$b_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(st) \zeta_i(t) \zeta_j(s)\, ds\, dt;$$

car les b_{ij} ($j = 1, 2, \dots$) sont les coefficients de Fourier de la fonction $\int_a^b K(st) \zeta_i(t)\, dt$ dans le système orthogonal complet $\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots$.

On aura donc

$$\sum_i a_{ii} = \sum_{ij} b_{ij}^2,$$

une somme correspondante à $\sum_{ij} a_{ij}^2$ pour le noyau $K(st)$.

Les valeurs propres se trouvent donc de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0; \tag{8}$$

on sait que toutes les valeurs de λ^2 sont positives (Erhard Schmidt, *loc. cit.*).

Soit maintenant λ^2 une racine de $\Delta(\lambda)$ avec la multiplicité p: $\Delta(\lambda)$ aura le défaut p (je préférerai cette signification de M. O.

Tœplitz, *Rend. di Palermo*, t. XXVIII, pour le mot ordinaire *rang*) et les équations homogènes (7) auront p solutions linéairement indépendantes

$$\sigma^1, \quad \sigma^2, \quad \ldots \quad \sigma^p,$$

la somme des carrés d'une telle solution étant convergente (H. v. Koch, *loc. cit.*, p. 263). Les solutions s'écrivent sous la forme connue du cas des équations d'un nombre fini d'équations avec un nombre fini d'inconnues.

Les fonctions φ se déterminent par

$$\varphi(s) = \lambda \sum_i \alpha_i(s)\sigma_i, \tag{5}$$

en introduisant les σ trouvées; alors la série $\sum_i \alpha_i(s)\sigma_i$ convergera absolument et uniformément; car on a, selon la formule connue de Lagrange-Cauchy (l'inégalité de Schwartz),

$$\sum_i |\alpha_i(s)||\sigma_i| \leqq \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}\sqrt{\sum_i \alpha_i(s)^2},$$

où

$$\sum_i \alpha_i(s)^2 = \sum_i \left[\int_a^b K(st)\varphi_i(t)\,dt\right]^2 \leqq \int_a^b K(st)^2\,dt \leqq M^2(b-a),$$

M étant le maximum du noyau. Ainsi il résulte

$$\sum_i |\alpha_i(s)||\sigma_i| \leqq \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}\, M\sqrt{b-a}.$$

La fonction trouvée $\varphi(s)$ est donc continue. Alors on trouvera la fonction ψ de l'équation

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\varphi(t)\,dt; \tag{1}$$

elle est continue encore.

A une valeur propre de la multiplicité p correspondent p fonctions φ linéairement indépendantes et encore, comme on le voit simplement, p fonctions ψ indépendantes. Maintenant, le système orthogonal complet du noyau $K(st)$ se détermine d'une manière connue (Erhard Schmidt, *loc. cit.*, § 15).

II. — *Les équations non homogènes.*

Soient les équations intégrales conjuguées non homogènes :

$$(1)\quad \begin{cases} f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\psi(t)\,dt, \\ g(s) = \psi(s) - \lambda \int_a^b K(ts)\varphi(t)\,dt, \end{cases}$$

les fonctions données $f(s)$ et $g(s)$ étant continues dans l'intervalle donnée (ab), $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ sont continues. On trouvera une solution tout à fait analogue à celle qu'a trouvée M. Erhard Schmidt pour l'équation de Fredholm à noyau symétrique (*loc. cit.*, § 10).

Soit le système orthogonal complet du noyau donné

$$\begin{array}{llll} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \ldots \\ \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \varphi_3(s), & \ldots \\ \psi_1(s), & \psi_2(s), & \psi_3(s), & \ldots \end{array}$$

et les fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ une solution de (1).

Les équations s'écrivent

$$\frac{\varphi(s) - f(s)}{\lambda} = \int_a^b K(st)\psi(t)\,dt,$$

$$\frac{\psi(s) - g(s)}{\lambda} = \int_a^b K(ts)\varphi(t)\,dt,$$

d'où

$$(2)\quad \begin{cases} \int_a^b \frac{\varphi(s) - f(s)}{\lambda}\varphi_i(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \psi(s)\psi_i(s)\,ds, \\ \int_a^b \frac{\psi(s) - g(s)}{\lambda}\psi_i(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \varphi(s)\varphi_i(s)\,ds. \end{cases}$$

Mettons

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_i(s)\,ds = x_i, \qquad \int_a^b \psi(s)\psi_i(s)\,ds = y_i,$$

$$\int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds = a_i, \qquad \int_a^b g(s)\psi_i(s)\,ds = b_i,$$

il vient

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda_i x_i - \lambda y_i = \lambda_i a_i, \\ -\lambda x_i + \lambda_i y_i = \lambda_i b_i. \end{cases}$$

d'où, si $\lambda^2 \neq \lambda_i^2$,

$$(4)\qquad x_i = \frac{\lambda_i^2 a_i - \lambda\lambda_i b_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2}, \qquad y_i = \frac{\lambda_i^2 b_i - \lambda\lambda_i a_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

Du théorème de M. Erhard Schmidt (*loc. cit.*, § 16), on voit que

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi(s) - f(s)}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_i \varphi_i(s)\left[\int_a^b \varphi(t)\varphi_i(t)\,dt - \int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt\right], \\[2ex] \dfrac{\psi(s) - g(s)}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_i \psi_i(s)\left[\int_a^b \psi(t)\psi_i(t)\,dt - \int_a^b g(t)\psi_i(t)\,dt\right], \end{cases}$$

où convergent les séries absolument et uniformément. Introduisant (4) dans (5), on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \displaystyle\sum_i \varphi_i(s)\,\frac{\lambda^2\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt + \lambda\lambda_i\int_a^b g(t)\psi_i(t)\,dt}{\lambda_i^2 - \lambda^2}, \\[2ex] \psi(s) = g(s) + \displaystyle\sum_i \psi_i(s)\,\frac{\lambda^2\int_a^b g(t)\psi_i(t)\,dt + \lambda\lambda_i\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i^2 - \lambda^2}. \end{cases}$$

Ces développements sont absolument et uniformément convergents, comme on le voit sans difficulté; par exemple, on a pour

$$\sum_i \varphi_i(s)\,\frac{\lambda^2\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i^2 - \lambda^2}$$

ou

$$\sum_i \frac{\lambda^2\lambda_i^2}{\lambda_i^2 - \lambda^2}\int_a^b \overline{\mathrm{K}}(st)\varphi_i(t)\,dt\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt,$$

en posant

$$\overline{\mathrm{K}}(st) = \int_a^b \mathrm{K}(sx)\mathrm{K}(tx)\,dx.$$

que la quantité $\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 - \lambda^2}$ converge vers 1 et la série

$$\sum_i \int_a^b \overline{\mathrm{K}}(st)\,\varphi_i(t)\,dt \int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt$$

converge absolument et uniformément après un théorème connu (*voir* Erhard Schmidt, *loc. cit.*, § 2).

Introduisant les solutions (6) dans la première équation (1) il vient

$$(7)\quad f(s) = f(s) - \sum_i \varphi_i(s)\,\frac{\lambda^2 \int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt - \lambda\lambda_i \int_a^b g(t)\,\psi_i(t)\,dt}{\lambda_i^2 - \lambda^2}$$

$$- \lambda \int_a^b \mathrm{K}(st) \left[g(t) - \sum_i \psi_i(t)\,\frac{\lambda^2 \int_a^b g(u)\,\psi_i(u)\,du - \lambda\lambda_i \int_a^b f(u)\,\varphi_i(u)\,du}{\lambda_i^2 - \lambda^2} \right] dt$$

posant

$$\int_a^b \mathrm{K}(st)\,g(t)\,dt = \sum_i \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i} \int_a^b g(t)\,\psi_i(t)\,dt,$$

changeant l'ordre des signes $\int$ et $\sum_i$ et posant enfin

$$\int_a^b \mathrm{K}(st)\,\psi_i(t)\,dt = \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i},$$

le coefficient de chaque fonction $\varphi_i(s)$ sera 0, et l'équation (7) sera identique.

Ainsi nous avons démontré :

Si λ n'est pas une valeur propre du noyau $\mathrm{K}(st)$, *les équations conjuguées ont seulement une solution.*

Soit maintenant $\lambda = \lambda_i$ une valeur propre de la multiplicité p : alors des équations (3) on voit *les p conditions nécessaires.*

$$(8)\qquad \int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,\psi_i(t)\,dt.$$

Ces p conditions remplies, on voit que les x_i relativement aux p fonctions propres $\varphi_i(s)$ seront arbitraires et $y_i = x_i - a_i$; ainsi on

aura p solutions indépendantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \sum_i x_i \varphi_i(s) \\ \qquad + \sum_j \varphi_j(s) \dfrac{\lambda^2 \int_a^b f(t)\varphi_j(t)\,dt - \lambda\lambda_j \int_a^b g(t)\psi_j(t)\,dt}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ \psi(s) = g(s) + \sum_i (x_i - a_i)\psi_i(s) \\ \qquad - \sum_j \psi_j(s) \dfrac{\lambda^2 \int_a^b g(t)\psi_j(t)\,dt - \lambda\lambda_j \int_a^b f(t)\varphi_j(t)\,dt}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{cases}$$

i parcourant les p indices appartenant à la valeur propre λ_i, j parcourant toutes les autres indices.

UNE LETTRE DE LACROIX [1].

LACROIX A X..., ATTACHÉ A L'ÉCOLE D'ARTILLERIE DE LA FÈRE.

Paris, le 4 germinal, an XII.

« ... ici nous sommes entraînés par une foule d'occupations et « de distractions; et j'ai, peut-être plus qu'un autre, besoin de « celles-ci parce que ma constitution est trop faible pour suppor- « ter un long travail.

« Je recueille toujours avec soin, et souvent avec plaisir, les « remarques qu'on fait sur mes Ouvrages; je les pèse avec attention « et j'en profite, lorsqu'elles me paraissent fondées, et qu'elles « n'exigent pas de trop grands changements qui me coûteraient

[1] Nous devons la connaissance de cette lettre à notre confrère M. Bigourdan qui nous a autorisé à la publier. Elle nous paraît offrir de l'intérêt; car elle traite de questions d'enseignement sur lesquelles Lacroix était particulièrement compétent. A l'époque où il l'a écrite, Lacroix appartenait à la première classe de l'Institut (Section de Géométrie).

« beaucoup, parce que je suis fatigué de tous ces objets, et que « j'ai épuisé la dose d'intérêt qu'ils m'avaient inspiré.

« J'ai placé dans l'édifice de la Science quelques pierres que « j'ai façonnées; j'ai lancé dans la carrière des jeunes gens qui « pourront la parcourir avec succès; j'ai placé ceux qui voudront « étudier les mathématiques dans une position beaucoup plus « favorable que celle où je me suis trouvé, il y a vingt ans, lors- « qu'il m'a fallu chercher, les unes après les autres, les sources (?) « qui retenaient les progrès de la Science, rassembler ces maté- « riaux incohérents, ramener les uns aux autres les divers points « de vue sous lesquels on avait présenté des théories, différentes « en apparence, et ne contenant néanmoins, avec beaucoup de « choses qui leur étaient communes, qu'un petit nombre de résul- « tats essentiellement distincts. D'autres perfectionneront ce que « je n'ai qu'ébauché, et s'avanceront bien au delà du terme où je « me suis arrêté; c'est mon espérance, et je m'estimerai heureux « d'avoir indiqué la route....

« J'ai donné à vos observations sur mes Ouvrages toute l'atten- « tion qu'elles méritaient....

. . . . . .

« La définition que j'ai donnée de l'angle vous paraît défec- « tueuse. D'abord ce n'est point à proprement parler une défini- « tion; il ne faut point la détacher du développement qui l'accom- « pagne, et dont le but est d'expliquer *comment elle se rapporte* « *aux* limites latérales *de l'espace indéfini qu'on y considère,* « *et de montrer comment deux angles peuvent être égaux,* « *avec des côtés très inégaux, comment un angle en peut sur-* « *passer un autre.* Voyez la troisième édition de ma *Géométrie*, « page 6, premier alinéa....

« ... J'assure à mon tour que je ne sais pas ce que voudrait « dire précisément *le rapport de situation de deux droites.* Le « mot *rapport* ne doit avoir en mathématiques qu'une significa- « tion : celle de quotient de deux grandeurs; hors de là, il est « vague.... De quelque manière qu'on se retourne, il est impossible « de comprendre l'angle dans une phrase qui soit une bonne défi- « nition; c'est une de ces notions primitives que l'on doit nécessai- « rement emprunter des sens en la développant et la circonscrivant « de manière qu'on ne puisse y rien introduire d'étranger ou en

« abuser. C'est ce que j'ai dit, et peut être prouvé, à la page XVII « du Discours préliminaire de ma *Géométrie*, troisième édition.

« ... Je crois devoir vous prévenir qu'il vient de paraître une « quatrième édition de mon *Algèbre*, beaucoup plus correcte que « la troisième, dans laquelle j'avais refait avec soin les commence- « ments, et je l'ai encore perfectionnée un peu. Je pense que la « troisième édition du *Traité de trigonométrie et d'application « d'algèbre à la géométrie*, qui renferme un Appendice sur les « plans et surfaces courbes, est supérieure aux autres pour l'ordre « et pour quelques détails. Enfin, on vient de publier une qua- « trième édition de l'*Arithmétique* dont la rédaction est tout en- « tière de moi. J'ai consigné dans ces diverses éditions ce que j'ai « remarqué dans ma pratique de l'enseignement, et j'abandonne « mon cours au temps.

« Agréez.... »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

GAUSS (C.-F.). — *Recherches arithmétiques*, trad. par A.-C.-M. Poullet-Delisle. Nouv. édit. In-4, XXIV-504 p. Paris, A. Hermann et fils. 16 fr.

GRELLING (Kurt). — *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Gr. in-8, 471-478 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 m. 50.

HUYGENS (Christian). — *Œuvres complètes*. T. XII. Travaux de mathématiques pures (1652-1656). In-4, VIII-297 p., figures. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

LA GOURNERIE (J. de). — *Traité de Géométrie descriptive*. 4e édition. 1re partie : Texte et Atlas. XXI-157 p. et atlas de 55 planches. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

MILLOCHAU (G.). — *De la Terre aux astres. L'Astronomie à la portée de tous*. In-8, 67 p. Paris, Ch. Delagrave. 5 fr.; relié, 6 fr. 50.

NERNST (W.) u. SCHOENFLIES (A.). — *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch*

der Differential- u. Integralrechng. m. besond. Berücksicht. der Chemie. 6. verm. u. verb. Aufl. Gr. in-8. XII-412 p. avec 84 fig. München. R. Oldenbourg. Relié. 14 m.

NEWCOMB u. ENGELMANN'S *populäre Astronomie.* 4. Aufl. In Gemeinschaft m. Eberhard, Ludendorff, Schwarzschild hrsg. v. P. Kempf. In-8. XVI-770 p. avec 213 fig. et 21 planches. Leipzig. W. Engelmann. 14 m.; relié, 15 m. 60.

KOMMERELL (V.) u. KOMMERELL (K.). — *Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen.* II. Bd. 2., erweit. Aufl. (Sammlung Schubert Neue Aufl. In-8. V-188 p. Leipzig. G. J. Goschen. Relié. 5 m. 80.

STURM (Rud.). — *Maxima u. Minima in der elementaren Geometrie.* Gr. in-8, VI-138 p. avec 32 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.; relié, 4 m. 40.

WHITEHEAD (Alfr.-N.) and BERTRAND RUSSELL. — *Principia Mathematica.* Vol. I. 682 p. Cambridge, Univ. Press. 25 s.

WHITTAKER (E.-T.). — *A History of the Theories of Aether and Electricity from the age of Descartes to the close of the 19th Century.* In-8. 9-[illegible]-[illegible] 491 p. London. Longmans. 12 s. 6 d.

CZUBER (E.). — *Der mathematische Unterricht an den technischen Hochschulen* (*Berichte üb. den mathematischen Unterricht in Oesterreich.* Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission. 5. Heft). Gr. in-8. V-39 p. Wien, A. Hölder. 1 m. 20.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous la direction de *Jules Molk*. T. I Vol. 2, fasc. 2. Propriétés générales des corps et des variétés algébriques, d'après *J. Landsberg*, par *J. Hadamard* et *J. Kürschak*, 96 p. — T. I. Vol. 3, fasc. 4. Propositions transcendantes de la théorie des nombres, d'après *P. Bachmann*, par *Ed. Maillet*. 95 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75.

FRICKE (Rob.) u. KLEIN (Fel.). — *Vorlesungen üb. die Theorie der aut morphen Funktionen.* II. Bd. : Die Funktionentheoret. Ausführgn. u. die Anwendgn. 2. Lfg : Kontinuitätsbetrachtungen im Gebiete der Hauptkreisgruppen. Gr. in-8, 283-438 p. avec 66 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m.

KNESER (Adf.). — *Die Integralgleichungen u. ihre Anwendungen in der mathematischen Physik.* Vorlesungen, an der Universität zu Breslau geh. Gr. in-8, VIII-243 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 6 m.; relié, 7 m.

PEIRCE (B.-Osgood). — *A short table of integrals.* 2e éd. revue. In-8, 144 p., planches. Boston, Ginn. 1 dollar.

VEBLEN (Oswald) and WESLEY YOUNG (J.). — *Projective geometry.* Vol. I. In-8. Boston. Ginn. 4 dollars.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDOYER (H.). — Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales (*Logarithmes*). 1 vol. gr. in-4. Paris, A. Hermann et fils; 1911.

L'Ouvrage que la librairie Hermann vient d'éditer en une forme aussi parfaite qu'on pût le désirer est l'œuvre propre de M. H. Andoyer qui, de juillet 1908 à mars 1910, en a fait seul tous les calculs, sans aucun auxiliaire, même mécanique. L'impression, confiée à la maison Barnéoud et Cie, de Laval, a été commencée en avril 1910 et continuée sans interruption pendant une année entière. La publication avait été assurée grâce à une subvention allouée à l'auteur, sur les arrérages de la fondation Commercy, par le Conseil de la Faculté des Sciences et celui de l'Université de Paris. L'Académie des Sciences, en accordant à M. Andoyer, en 1910, le prix Jérôme Ponti, a souligné de la façon la plus nette la grande importance de cet Ouvrage.

C'est en 1633 que parurent les premières Tables trigonométriques étendues : 1° la *Trigonometria britannica* de Henri Briggs, publiée par Henri Gellibrand à Gouda; 2° la *Trigonométria artificialis* d'Adrien Vlacq, imprimée aussi à Gouda. 160 ans plus tard furent calculées, en France (de 1794 à 1799), les *Tables du Cadastre*, sous la direction de G. Riche de Prony; déposées dans les Archives de l'Observatoire de Paris, elles sont encore inédites.

La *Trigonometria* de Briggs et celle de Vlacq sont établies suivant la division du quadrant en 90° : la première subdivise le degré en 100 parties, la seconde en 360. Les nombres communs aux deux Tables vont de 5 en 5 minutes sexagésimales.

La première donne avec 14 décimales les logarithmes des lignes trigonométriques de centième en centième de degré sexagésimal; la seconde les donne de 10 en 10 secondes sexagésimales, avec dix décimales : dans ces deux Tables, la dernière décimale est souvent en erreur de plusieurs unités.

La plus célèbre des Tables imprimées ultérieurement est le *Thesaurus logarithmorum completus* de Vega, publié en 1794 à Leipzig. C'est une réédition des Tables de Vlacq étendues à chaque seconde pour les deux premiers degrés. La dernière décimale encore n'est pas généralement exacte. Les Tables à 8 décimales publiées récemment par le Service géographique de l'armée sont extraites des *Tables du Cadastre;* celles que viennent de publier MM. J. Bauschinger et J. Peters ont été construites par interpolation directe de la *Trigonometria britannica*. M. H. Andoyer, frappé du peu de progrès faits par les Tables trigonométriques depuis Briggs et Vlacq, et considérant que l'Astronomie de précision, par suite des progrès dus aux méthodes photographiques, ne peut plus se contenter des Tables décimales, a pensé qu'il pourrait être bientôt nécessaire de mettre à la disposition des calculateurs des Tables à neuf décimales. Pour faciliter les travaux de ce genre, il a entrepris le calcul direct et complet de ces nouvelles Tables trigonométriques. Il les appelle *fondamentales* parce qu'elles pourront servir, en toute sécurité, de base aux publications ultérieures tant qu'on n'aura pas besoin d'une précision plus grande que la 14e décimale. Ayant en vue les besoins des astronomes, il a adopté la division sexagésimale et l'intervalle de 10″ en 10″, le plus étroit qui rendît la publication possible. Il donne tous les résultats à moins d'une demi-unité près de l'ordre du dernier chiffre.

Dans toutes les Tables, M. Andoyer a appliqué la règle proposée par T.-N. Thiele : forcer sans indication le dernier chiffre conservé quand le nombre formé par les décimales suivantes est au moins égal à 750, ...; le conserver tel qu'il est quand ce nombre ne dépasse pas 250; le conserver encore, mais le faire suivre du signe + dans les autres cas. Si, dans ce dernier cas, on ajoute au nombre une demi-unité du dernier ordre décimal, on n'aura jamais une erreur dépassant un quart d'unité de cet ordre.

La Table I, qui n'a qu'une seule page et n'est nullement trigonométrique, permet de calculer rapidement, avec 18 décimales, le logarithme d'un nombre donné et le nombre qui a un logarithme donné. Cette Table donne, à cet effet, les logarithmes des nombres entiers de 2 à 9 et de 11 à 19, puis ceux des nombres de l'une des formes

$$\frac{1,0\alpha}{1,0\alpha} \qquad \frac{1,00\alpha}{1,00\alpha} \qquad \frac{1,000\alpha}{1,000\alpha} \qquad \frac{1,0000\alpha}{1,0000\alpha}$$

α désignant un des chiffres de 1 à 9, et le symbole $1,\overline{0\ldots\alpha}$ représentant $1 - 0,0_{\ldots}\alpha$. L'emploi de la Table est fondé sur un procédé indiqué déjà par Briggs dans la préface de l'*Arithmetica logarithmica*. Ce procédé est fondé sur ce que un nombre quelconque N peut s'écrire :

$$N = A.B\frac{\left(1+\frac{x}{10^5}\right)}{(1\pm 0,0\alpha)(1\pm 0,00\beta)(1\pm 0,000\gamma)(1+0,0000\delta)},$$

A, B étant un des nombres entiers de 2 à 19, α, β, γ, δ un des chiffres entre 1 et 9, et x étant moindre que 1 en valeur absolue. On calcule $\log\left(1+\frac{x}{10^5}\right)$ en unités du 18e ordre par la formule

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = [\lambda_1 + x(\lambda_2 + \lambda_3 x)]x,$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 43429\ 44819\ 032 + \ldots\\ \lambda_2 &= -\quad 21714\ 724,\\ \lambda_3 &= \qquad\quad 145.\end{aligned}$$

Pour trouver le nombre N qui correspond à un logarithme donné L, on retranche de la partie décimale de L quelques-uns des logarithmes ou cologarithmes inscrits dans la Table de façon à avoir un résultat positif ou négatif $q < \frac{1}{2.10^5}$. Si y désigne $q.10^5$, on a

$$10^q = 1 + y[\mu_1 + y(\mu_2 + \mu_3 y)]$$

où

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 2\ 30258\ 50929\ 940 + \ldots\\ \mu_2 &= \qquad 2\ 65094\ 905 + \ldots,\\ \mu_3 &= \qquad\qquad 2\ 034 + \ldots\end{aligned}$$

Quelques multiplications ou divisions donnent ensuite N.

La Table II contient les formules qui ont servi à M. Andoyer pour le calcul des logarithmes des fonctions trigonométriques

$$\log\cos\frac{\pi}{2}x, \qquad \log\sin\frac{\pi}{2}x, \qquad \log\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}(1-x)$$

mises sous les formes suivantes :

$$\log \cos \frac{\pi}{2} x = -\log(1 - x^2) - P,$$

$$\log \sin \frac{\pi}{2} x = \log x - \log\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - C - Q,$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{\pi}{4}(1 + x) = \log \frac{1 + x}{1 - x} = R.$$

P, Q sont des séries entières en x dont les termes, tous de degrés pairs, ont leurs coefficients positifs; M. Andoyer donne leurs coefficients avec 21 chiffres décimaux : dans ces limites P va jusqu'à x^{40}; Q jusqu'à x^{32}. R est une série de termes de degrés impairs, à coefficients positifs, dont M. Andoyer donne les coefficients avec 18 chiffres; le développement s'arrête à x^{35}; C est une constante. La comparaison des nombres de la Table II aux Tables analogues qui se trouvent dans d'autres Ouvrages a montré quelques divergences parfois assez notables; les calculs nouveaux de M. Andoyer n'étaient donc pas superflus.

La Table III donne avec 17 décimales les valeurs de $\log \sin y^{\gamma}$, $\log \operatorname{tang} y^{\gamma}$, $\log \cos y^{\gamma}$ et $S(y^{\gamma}) = \log \frac{\sin y^{\gamma}}{y^{\gamma}}$ pour toutes les valeurs entières de y de 0 à 50, y^{γ} désignant la mesure en grades d'un angle dont, par suite, la mesure absolue est $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{100}$. La Table donne encore, pour les deux dernières fonctions leurs *variations* : M. Andoyer entend par là les coefficients $f_1, f_2, f_3, \ldots$ des puissances de h dans le développement

$$f(\lambda + h) = f_0 + f_1 h + f_2 h^2 + \ldots;$$

il emploie pour le calcul de ces variations un procédé purement numérique fondé sur l'utilisation des valeurs antérieurement obtenues de $C(y^{\gamma})$ et de $S(y^{\gamma})$ et l'application au calcul des différences. L'auteur a multiplié les vérifications : il donne dans son Introduction des exemples spéciaux d'application de ces Tables III qui sont surtout destinées à la construction de Tables plus étendues.

L'intervalle des Tables III (le grade) était trop grand pour qu'il fût possible d'en déduire par interpolation directe les Tables définitives V qui sont l'objet principal du travail. M. Andoyer a

formé des Tables IV donnant $\log\cos\alpha$ et $\log\sin\alpha$ de neuf en neuf minutes depuis 0° jusqu'à 45°; il a exécuté les calculs avec 16 décimales pour en conserver 15; on peut considérer ces Tables comme exactes dans toute leur étendue à une demi-unité près du 15e ordre décimal. La même Table donne les variations des divers ordres de $\log\cos\alpha$ rapportées à l'intervalle de 10″. Les variations premières sont données avec 17 décimales, les suivantes respectivement avec 19, 22, 24, 27, 29, 32, ce qui est nécessaire pour assurer l'exactitude des calculs relatifs à la Table V. Il y a encore dans la Table IV deux Tableaux très courts donnant de 9′ en 9′ et de 0° à 3° les valeurs des fonctions

$$S(\alpha) = \log\frac{\sin\alpha}{\alpha''}, \qquad T(\alpha) = \log\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha''}.$$

Ces Tableaux donnent aussi les variations de $S(\alpha)$ de 18′ en 18′; en ce qui concerne $T(\alpha)$ on a

$$T(\alpha) = S(\alpha) - \log\cos(\alpha).$$

Bien que les Tables IV soient peu appropriées à la résolution des problèmes trigonométriques usuels, M. Andoyer, dans l'Introduction, les applique en particulier au calcul avec 15 décimales du log sinus de l'arc égal au rayon. Il remarque aussi que la somme totale des log sinus et log cosinus doit être égale à $\log\frac{20\sqrt{6}}{9^{500}}$; il donne d'autres vérifications analogues pour les log sinus, log tangentes et les variations; il les a appliquées avec un entier succès, trouvant des écarts qui atteignent au maximum 3 unités du 15e ordre.

Les Tables V renferment, suivant la disposition habituelle, les logarithmes du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente de tous les angles de 0° à 45°, et leurs différences premières. Les angles vont de 10″ en 10″; les logarithmes sont donnés avec 14 décimales. Les Tables V*bis* donnent dans les mêmes conditions de 0° à 3° les valeurs des fonctions $S(\alpha)$ et $T(\alpha)$.

M. Andoyer a tiré les log cosinus et les valeurs de $S(\alpha)$, par interpolation, de la Table IV : il indique minutieusement, dans l'Introduction, comment cette interpolation a été effectuée. La Table des log sinus a été déduite de celle des log cosinus par la

formule

$$\Delta \log \sin \alpha = \Delta \log \sin 2\alpha - \Delta \log \cos \alpha,$$

dans l'application de laquelle on considère $\sin 2\alpha$ comme $\cos(90^\circ - 2\alpha)$.

La Table des T (α) est obtenue par la formule

$$T(\alpha) = S(\alpha) - C(\alpha) \qquad \text{ou} \qquad C(\alpha) = \log \cos \alpha.$$

L'emploi des Tables V va de soi; on les interpole par simple application de la formule de Newton écrite sous la forme

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + h\left(\Delta f(\alpha) + \frac{h-1}{2}\Delta^2 f(\alpha) + \frac{h-2}{3}[\Delta^3 f(\alpha) + \ldots]\right),$$

h étant exprimé en dizaines de secondes.

Si c'est h qu'on veut obtenir, on procède par approximations successives en appliquant la formule précédente, et posant $h = h_0 + h_1$ où h_0 désigne une valeur approchée de h. M. Andoyer donne plusieurs exemples.

M. Andoyer a comparé les nombres communs à ses Tables et à la *Trigonometria Britannica*, c'est-à-dire les logarithmes des lignes trigonométriques de 3 minutes en 3 minutes. Il a trouvé que la 14e décimale et souvent la 13e de Briggs n'a aucune précision. Dans la *Trigonometria artificialis* de Vlacq l'erreur ne semble pas dépasser six unités du 10e ordre, mais elle atteint cette limite. Comparant les valeurs de S et T calculées par lui à celles qui sont données avec huit décimales dans les manuels de Bruhns et de Schrön, ainsi que dans la première partie des Tables à huit décimales de Bauschinger et Peters, il n'a trouvé d'inexactitudes que dans les Tables de Schrön, où la huitième décimale est parfois en erreur d'une unité.

Les nombreuses vérifications que M. Andoyer a appliquées à ses propres Tables permettent de croire que son manuscrit est exempt de fautes. Il a procédé à une dernière revision de l'impression sur les bonnes feuilles et il donne à la fin du Volume un erratum dont la plus grande partie se rapporte à l'éclaircissement de simples défauts de tirage; ils ne peuvent guère pratiquement causer d'erreur de calcul.

M. Andoyer, par la publication de ses Tables, a rendu à l'As-

tronomie un service considérable qui ne fera que croître avec le temps. L'introduction qui les précède est un modèle de clarté et de précision. La lecture en est hautement instructive; les astronomes et tous ceux que l'art du calcul intéresse tireront de cette lecture le plus grand profit. L'histoire de cette entreprise, accomplie dans un délai si court, est un bel exemple de ce que peuvent produire les habitudes de régularité et de soin minutieux quand elles sont unies à une intelligence exceptionnelle. La correction absolue, qui est désirable dans les travaux de cette sorte, est peut-être ce qu'il est le plus difficile à l'homme de réaliser.

J. G.

SCHŒNFLIES (A.). — Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2e Partie, Leipzig, 1908.

Il n'y a guère plus d'une trentaine d'années que les premiers fondements de la théorie générale des ensembles ont été posés, et cependant, quiconque veut aujourd'hui se mettre au courant de ses résultats, doit, s'il veut recourir aux Mémoires originaux, lire une quantité considérable d'écrits. Aussi doit-on être profondément reconnaissant à ceux qui, à diverses époques, ont tenté de résumer l'état des connaissances acquises sur ce sujet. Ils facilitent ainsi, d'une part, le travail de ceux qui sont restés jusque-là étrangers à cette théorie, parce que le sujet habituel de leurs recherches n'exigeait pas qu'ils la connussent, mais qui ressentent à un certain moment la nécessité d'y avoir recours. Et le domaine des applications des ensembles s'élargissant chaque jour, le nombre de ceux-là est, naturellement, de plus en plus considérable. D'autre part, ces monographies permettent aux *Mengentheoretiker* purs de mieux se rendre compte du progrès général de la théorie.

Ce progrès est visible si l'on considère successivement les soixante pages que M. Borel consacre dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, en 1898, à une exposition des résultats utiles pour la théorie des fonctions; puis les 250 pages du premier *Bericht* de M. Schœnflies, en 1900; les 300 pages du Traité de M. Young, où il ne s'agit guère que d'applications géométriques; et enfin, le gros

Volume de plus de 300 pages que M. Schœnflies vient de publier, en 1908, sous les auspices de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, comme *supplément* à son premier Volume, et qui s'occupe de travaux dont le plus ancien n'a pas dix ans.

Il convient de remarquer que, sur les quatre exposés que je viens de citer, ceux de M. Schœnflies seuls se proposent d'étudier la théorie des ensembles dans toutes ses ramifications. M. Borel ne s'était placé qu'au point de vue des recherches d'analyse. Son exposé si simple et si attrayant est d'ailleurs pour beaucoup dans le goût qui s'est révélé chez un certain nombre de jeunes mathématiciens pour cet ordre de recherches. M. Young se place, lui, exclusivement au point de vue géométrique. M. Schœnflies aborde tous les points de vue.

Dans son premier Rapport (1), les seules applications étaient relatives aux fonctions de variables réelles ; dans le Volume actuel, elles tiennent peu de place, et il s'agit surtout de fonctions de variables complexes, d'*Analysis situs* et d'espace fonctionnel. On peut même reprocher à M. Schœnflies de n'avoir pas fait dans son Rapport une place plus importante à la définition de M. Lebesgue de l'intégrale définie. Il n'en méconnaît pas l'importance puisqu'il y voit « un des plus brillants progrès dont la Mathématique est redevable à la théorie des ensembles » ; mais il s'y étend peu et la relègue dans le dernier Chapitre, celui des rectifications et additions. Son excuse est sans doute qu'il renvoie à l'Ouvrage où M. Lebesgue a lui-même développé sa définition, avec un historique complet du problème de l'intégration, et qu'il n'a pas voulu après lui refaire cet Ouvrage. Dès lors, il est parfaitement légitime de consacrer le compte rendu principalement aux autres branches de la théorie. On peut évidemment concevoir autrement un *Bericht*, et penser qu'ayant à exposer les progrès accomplis par une théorie depuis dix ans, il faille signaler en premier lieu les découvertes les plus importantes. Il n'en faut pas moins savoir gré à M. Schœnflies de son travail qui a déjà rendu et rendra encore de grands services.

Voici maintenant l'indication des différentes matières traitées :

Les deux premiers Chapitres sont consacrés à des questions

(1) Il a été étudié par J. Tannery dans le *Bulletin*, 1900.

purement théoriques. Tour à tour sont examinés les recherches de MM. Zermelo et König et et les travaux de M. F. Bernstein. Notons les applications de la notion de puissance à l'étude de propriétés très spéciales, comme le théorème sur la puissance de l'ensemble des ensembles parfaits d'un espace à n dimensions, de l'ensemble de toutes les fonctions intégrales ou monotones, comme aussi l'étude des séries de Taylor non prolongeables, ou certain problème de M. Hadamard sur les géodésiques. Les paragraphes suivants s'occupent de la fameuse question des paradoxes de la théorie des ensembles, de la comparaison des ensembles et de la possibilité de les bien ordonner. L'étude de la question des axiomes de la théorie des ensembles et du principe d'induction complète termine le premier Chapitre.

Dans le deuxième sont exposées les recherches de MM. Hansdorff, Veronese et Levi-Civita sur les ensembles linéaires ordonnés, la généralisation de la notion de puissance par le premier, les grandeurs non archimédiennes du second. On chercherait en vain dans ce Chapitre un nom français cité. Ces questions ne sont pas, en effet, de celles qui sont en faveur en France. Il faut sans doute attribuer cela au goût des Français pour tout ce qui est concret, mais il serait hardi d'en conclure trop vite au désintéressement de nos compatriotes pour le côté philosophique de la théorie des ensembles.

Ils reprennent d'ailleurs rang, et un rang honorable, dans le Chapitre III, consacré à la *Théorie générale des ensembles des points*. Là encore, je reprocherai à M. Schœnflies de n'avoir pas fait à la définition de la mesure de MM. Borel et Lebesgue la place qu'il convenait. Il semble attacher autant d'importance aux nouvelles démonstrations du théorème de Cantor-Bendixson, par M. Lindelof, du théorème qu'il a appelé de Heine-Borel et à ses généralisations, aux extensions enfin de ces résultats à l'espace à une infinité de dimensions par M. Fréchet. Certes, ce sont là des acquisitions précieuses, et les difficultés étaient nombreuses; mais à mon avis, la définition de la mesure est quelque chose d'incomparablement plus nouveau et surtout plus fécond.

Les trois Chapitres suivants sont consacrés aux applications géométriques, à l'étude du théorème de M. Jordan sur les courbes fermées et à la réciproque de ce même théorème au sujet de

laquelle M. Schœnflies lui-même a publié de nombreux Mémoires. Dans cette partie, la plus étendue de l'Ouvrage, c'est donc surtout un exposé de recherches personnelles que nous trouvons. Cet exposé était nécessaire, les Mémoires de M. Schœnflies étant éparpillés dans de nombreuses publications. La méthode générale usitée par l'auteur consiste à substituer à une courbe une *figure polygonale approchée*. Au fond, cette méthode avait été employée par M. Jordan ; mais, tandis qu'à la lecture du traité de M. Jordan on voit bien que les mots géométriques qu'il emploie ne sont bien en effet, en général, que des mots destinés à abréger un raisonnement purement arithmétique, chez M. Schœnflies, au contraire, on sent les fréquents appels à l'intuition géométrique, on sent la difficulté de faire complètement abstraction de la vision de l'espace. Les figures sont nombreuses, et ce ne sont pas de simples schémas employés par l'auteur pour appuyer son raisonnement ou sa phrase : ce sont de vraies figures au moyen desquelles on fait le raisonnement. Quiconque sait quelle apparence paradoxale présentent les propriétés des ensembles (simple conséquence de notre ignorance de l'espace que nous croyons si bien connaître) ne peut donc être étonné, que dis-je, doit s'attendre à trouver des erreurs dans les énoncés ainsi obtenus. Et en effet, MM. Brouwer et Zoard de Geöcze viennent, par des exemples récents, de montrer qu'un certain nombre des théorèmes énoncés par M. Schœnflies ne sont pas exacts. Qu'on n'aille pas en conclure que ces pages ne doivent dès lors présenter aucun intérêt ; qu'on n'aille pas non plus diminuer le mérite de l'auteur. M. Jordan avait dû faire appel à l'intuition (très peu sans doute) pour établir son théorème. La démonstration complète de ce théorème a exigé de nombreux travaux et le concours de plusieurs chercheurs. Les théorèmes de M. Schœnflies ont attiré également l'attention des chercheurs. Il a le mérite d'avoir le premier posé la question des postulats de la théorie des ensembles de points, de l'*Analysis situs;* il a ouvert nos yeux sur la complication de la notion de ligne ; tous les travaux ultérieurs sur ces questions sont peu ou prou inspirés des siens. L'existence de la courbe de Peano avait bien excité quelque émotion chez les géomètres, mais celle-ci avait été passagère ; on s'était vite remis à penser que l'ère des étonnements était close. Nous savons maintenant qu'il n'en est rien. Un sujet d'études,

difficile sans doute, mais intéressant et riche nous est révélé : et à quiconque voudrait l'aborder, on ne pourrait faire autrement que de conseiller avant tout la lecture du Livre de M. Schœnflies.

Il y a, d'ailleurs, autre chose dans ces trois Chapitres que des résultats personnels. Au Chapitre IV, on trouvera des définitions précises sur les courbes et les continua, l'étude des propriétés des ensembles parfaits plans. Le Chapitre se termine par quelques pages où sont examinées les applications aux fonctions analytiques à singularités quelconques.

Le Chapitre V contient une intéressante étude de la correspondance entre domaines à n et $n+p$ dimensions et de l'invariance de la notion de dimension. Des travaux tout récents de MM. Baire, Lebesgue et Brouwer ont fait faire à la question un pas décisif, en sorte que, sur cette question, l'Ouvrage n'est plus au courant. Il s'agit ensuite du théorème de Jordan déjà cité, et de la courbe étudiée par MM. Klein et Poincaré dans la théorie des fonctions automorphes. L'auteur démontre enfin l'invariance de la notion d'*Erreichbarkeit*, introduite par lui pour exprimer qu'on peut atteindre un point d'une courbe par un chemin ne la rencontrant pas et ayant ce point comme seul point limite. Cette notion joue dans les travaux de M. Schœnflies un rôle essentiel. Elle intervient à chaque instant au début du Chapitre VI qui est consacré à l'étude des courbes continues, et qui, après l'exposé des recherches de l'auteur, contient également l'étude des courbes rectifiables et des fonctions d'oscillation bornée.

Le Chapitre VII est consacré aux ensembles de courbes et à l'espace fonctionnel. On expose d'abord la définition de l'élément limite, les travaux de MM. Ascoli et Arzelà sur les ensembles de fonctions, et leur continuité uniforme, enfin les travaux de M. Fréchet sur les ensembles de courbes.

J'ai déjà parlé plus haut du Chapitre VIII et dernier, où, avec les rectifications au premier *Bericht*, est étudiée, comme addition à celui-ci, la notion d'intégrale de Lebesgue.

Je ne puis terminer cette analyse sans faire une remarque, qui n'est évidemment ni une critique, ni l'expression d'un regret : c'est que l'Ouvrage, paru il y a trois ans seulement, est déjà vieilli, tant depuis cette époque les théories dont il s'agit ont rapidement progressé. J'ai cité plus haut un des points sur lesquels il en est

ainsi : ce n'est pas le seul, bien loin de là. Il n'en reste pas moins un des Ouvrages les plus considérables que la théorie des ensembles ait inspiré, et un de ceux qui, pendant longtemps encore, seront des plus utiles aux travailleurs. A cause de l'heureuse idée qu'a eue M. Schœnflies de ne pas se borner à une sèche nomenclature de résultats, mais de donner des démonstrations quelquefois originales, toujours présentées d'une façon heureuse, son Ouvrage se trouve être autre chose qu'un simple répertoire, mais un véritable Mémoire qu'il y a tout profit à étudier.

L. Z.

KOMMEREL (Dr W.) UND KOMMEREL (Dr K.). — ALLGEMEINE THEORIE DER RAUMKURVEN UND FLÄCHEN. II Band. Zweiter, weiterte Auflage. 1 vol. in-12, VI-188 pages. Leipzig, G.-J. Göschen; 1911.

Ce petit Volume, qui constitue le n° 44 de la Collection Schubert, est consacré à la théorie infinitésimale des surfaces. Nous y voyons succinctement mais clairement exposées, la définition et les propriétés des lignes asymptotiques, des rayons de courbure principaux, de la surface des centres, des surfaces parallèles, etc... Après avoir considéré d'une manière générale la correspondance entre deux surfaces, les auteurs traitent de la représentation conforme, de la représentation avec conservation des aires; puis ils abordent la théorie de la déformation, celle des lignes géodésiques. Ils nous font ensuite connaître les équations célèbres de Codazzi et terminent par une étude des paramètres différentiels dont ils indiquent l'emploi dans la théorie de la déformation.

J. G.

KOMMEREL (Dr W.) UND KOMMEREL (Dr K.). — SPEZIELLE FLÄCHEN UND THEORIE DER STRAHLEN-SYSTEME. 1 vol. in-12, VI-171 pages. Leipzig, G.-J. Göschen; 1911.

Ce Volume, qui forme le n° 62 de la Collection Schubert, doit être associé au précédent dont il devait primitivement former la seconde Partie. Les auteurs y étudient successivement les sujets les plus

importants de la géométrie infinitésimale. D'abord les surfaces W et les beaux théorèmes de Weingarten; puis les surfaces minima, les formules de Monge, de Weierstrass et de M. Schwarz. Un article spécial est consacré aux surfaces de courbure totale constante et à la géométrie non euclidienne. Puis viennent les surfaces réglées, les systèmes triples orthogonaux. Le petit Ouvrage écrit avec soin se termine par un Chapitre sur les congruences rectilignes. On y retrouve le théorème de Malus-Dupin, les congruences isotropes de Ribaucour, les congruences de M. Guichard, les congruences pseudosphériques et la transformation de Bäcklund pour les surfaces pseudosphériques. G. D.

SEFERIAN (A.). — NOTICE SUR LE SYSTÈME DES SIX COORDONNÉES HOMOGÈNES D'UNE DROITE et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. 1 vol. in-8, 79 pages. Paris, Gauthier-Villars; Lausanne, Déneréaz-Spengler; 1910.

Cet Opuscule est destiné à faire connaître les propriétés des coordonnées homogènes de la ligne droite et les éléments de la théorie des complexes linéaires. Il s'adresse aux ingénieurs qui désirent lire avec fruit la *Statique graphique des systèmes de l'espace* de M. le professeur B. Mayor. G. J.

LEGRAND (ENRIQUE). — SOMMATIONS PAR UNE FORMULE D'EULER. De l'usage qu'on peut en faire pour résoudre de nombreux problèmes. SUMACIONES POR UNA FÓRMULA DE EULERO : Su aplicabilidad en la resolución de numerosos problemas. 1 vol. in-8, 46 pages. Paris, Gauthier-Villars; Buenos-Aires, Coni Hermanos, 1911.

Cet opuscule prend pour point de départ la célèbre formule d'Euler que l'auteur traduit sous la forme suivante :

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\left[f(b) - f(a)\right] + \frac{B_2 h}{2}\left[f'(b) - f'(a)\right] - \frac{B_4 h^3}{1.2.3.4}\left[f'''(b) - f'''(a)\right] + \cdots$$

et dont il indique un grand nombre d'applications. Nous citerons, par exemple, la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, le calcul des nombres de Bernoulli, celui de π par la formule de Wallis, diverses suites remarquables. Tous ces exemples seront lus avec intérêt par ceux qui désirent se perfectionner dans la pratique du Calcul intégral. J. G.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANDOYER (H.). — *Cours d'Astronomie.* 2e édit. rev., 1re partie. Astronomie théorique. In-8, 384 p., 1 pl. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

BIGOURDAN (G.). — *L'Astronomie; évolution de ses méthodes.* Paris, E. Flammarion. 3 fr. 50.

GAUSS (C.-F.). — *Recherches arithmétiques*, trad. par Poulet-Delisle. In-4, 502 p. Paris, A. Hermann et fils. 16 fr.

HILBERT (D.). — *Théorie des corps de nombres algébriques.* Fasc. I. In-4, 72 p. Paris, A. Hermann et fils. 3 fr.

LAZZERI (G.) u. BASSANI (A.). — *Elemente der Geometrie.* (Unter Verschmelzg. v. ebener u. rauml. Geometrie.) Aus dem Ital. v. P. Treutlein. Gr. in-8, XVI-491 p. avec 336 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 14 m.

Mathematical questions and solutions. Vol. 18, new series. In-8. London, F. Hodgson. 6 s. 6 d.

SÉFÉRIAN (A.). — *Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires.* In-8, 79 p. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 50.

SOMMER (J.). — *Introduction à la théorie des nombres algébriques*, trad. par A. Lévy, préf. de J. Hadamard. In-8, 376 p. Paris, A. Hermann et fils. 15 fr.

HENNEBERG u. LIEBRECHT. — *Die graphische Statik der starren Systeme. (B.-G. Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* XXXI. Bd.) Gr. in-8, XV-732 p., avec 394 fig. Relié, 24 m.

WEBER (Heinr.) u. WELLSTEIN (Jos.). — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende.* In 3 Bdn. III. Bd.

Angewandte Elementar-Mathematik. 1. Tl. : Mathematische Physik. Mit e. Buch üb. Maxima u. Minima v. H. Weber u. J. Wellstein. Bearb. v. Rud. H. Weber. 2. Aufl. Gr. in-8, XII-536 p., avec 254 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 12 m.

CARLEBACH (Jos.). — *Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden.* Gr. in-8, 239 p. avec 3 pl. Berlin, L. Lamm. 5 m.; relié, 6 m.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 85. Bd. (30,5-24), III-609 p. avec 101 fig., 2 cartes et 30 pl. Wien. A. Hölder. Relié, 60 m.

— 86. Bd. (30,5-24,5), V-481 p. avec 4 fig. et 18 pl. Wien, A. Holder. Relié, 39 m.

DINGLER (Hugo). — *Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchg. üb. den Zusammenhang zwischen Theorie u. Erfahrg. in den exakten Wissenschaften.* Gr. in-8, VIII-160 p. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 5 m.; relié, 6 m.

ENGELHARDT (Philipp). — *Untersuchungen üb. die im Schlusswort des Lie'schen Werkes « Geometrie der Berührungstransformationen » angedeuteten Probleme.* Gr. in-8, IV-65 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 2 m.

Jahrbuch d. Mathematik. 39. Bd. J. 1907. 1. u. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 26 m. 50.

LEHMANN (P.). — *Die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Teils des preussischen Normalkalenders f.* 1912. Nebst e. allgemeinen statist. Beitrage v. E. Blenck. (Heft II der Kalendermaterialien f. 1912.) Gr. in-8, V-158 p. Berlin, Verlag des k. statist. Landesamts. 6 m. 70.

RIGHI (Augusto). — *Kometen u. Elektronen.* Deutsch von *Max Iklé.* In-8, 64 p. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 2 m. 40; relié, 3 m.

SCHOTTKY (F.). — *Ueber die Gauss'sche Theorie der elliptischen Funktionen.* In-8, 252-304 p. Berlin, G. Reimer. 2 m.

SERRET (J.-A.). — *Cours de Calcul différentiel et intégral.* 6e édition, augmentée d'une Note sur la théorie des fonctions elliptiques par *Ch. Hermite.* T. Ier : Calcul différentiel. T. II : Calcul intégral et Note sur la théorie des fonctions elliptiques. 2 vol., in-8. T. Ier, XIII-617 p.; t. II, XIII-904 p. Paris, impr. et libr. Gauthier-Villars. Les 2 volumes, 25 fr.

SMOLEY (Constantine). — *Smoley's tables; parallel tables of logarithms and squares, angles and logarithmic functions corresponding to given bevels, five-decimal logarithmic-trigonometric tables, natural trigonometric functions including secant and cosecant, squares, cubes, square roots,* etc.; *for engineers, architects and students.* 6th ed., rev. and enl. X-329-171 p., diagr. New-York, Engineers News. 3 l. 50.

LORETTI (Ludovic). — *Leçon sur le prolongement analytique.* In-8, VI-116 p., avec 16 fig. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 50.

Annales du Bureau central météorologique. T. I. *Mémoires.* 1906. In-4, 350 p., 10 pl. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Annales du Bureau central météorologique. T. III : *Pluies en France,* 1908. In-4, 4 pl. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Atlas pédagographique de la France. 17e fascicule. In-4, avec atlas in-plano. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

GARDNER (Alfred) and MILLER (Byron G.). — *Elements of descriptive geometry; with applications to spherical and isometric projections, shades and shadows, and perspective.* 286 p. New-York, Am. Bk. Co. 1 dl. 90.

COMBEROUSSE (C. DE). — *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, à l'École centrale des Arts et Métiers, etc.* [illegible] 1[illegible]. 10e édition augmentée. T. III : Algèbre supérieure. 1re Partie. In-8, XXI-[illegible]68 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

DONDER (Th.). — *Sur les équations canoniques de Hamilton-Jacobi.* 11 p. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr.

DUMOUSTIER (Emile). — *Cours élémentaire d'arithmétique. Théorie des nombres naturels, opérations, fractions, fractions, opérations.* In-8, IV-180 p. Paris, A. Hermann et fils. [illegible]

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK. Tome I, 2e vol., 2e fasc. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de François MEYER. Fasc. 2 : G[illegible]. In-8, p. 129-[illegible]. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m.

Éphémérides astronomiques et Annuaire des marées pour l'année 1912. Rédigés d'après les documents officiels. [illegible] année. Paris, A. Chedaneel. 1 fr. 50.

HOUEL (J.). — *Traité de la géométrie conique et des courbes.* In-8. Paris, Gauthier-Villars. [illegible]

KLEIN (Fel.). — *Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkte aus.* T. II. Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung, gehalten im Wintersem. 1907-1908. Ausgearb. v. E. Hellinger. 2e éd. [illegible] 8. VI-[illegible]61 p. autogr. avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m. 50.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

E. GOURSAT. — Cours d'Analyse mathématique, 2e édition, t. II. *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles.* 1 vol. in-8° de 617 p. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Dans cette nouvelle édition du Tome II du *Cours d'Analyse*, les principales additions se rapportent à la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles.

1. Ce sont d'abord les théorèmes de M. Darboux [1] sur une équation différentielle de la forme

$$-L\,dy + M\,dx + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

L, M, N étant trois polynomes entiers en x et y de degré m au plus, l'un au moins étant de degré m. Si l'on connaît $\frac{m(m-1)}{2} + 2$ intégrales particulières algébriques, on peut former l'intégrale générale, et si l'on connaît $\frac{m(m-1)}{2} + 1$ intégrales particulières algébriques, on peut former un facteur intégrant de la proposée. La méthode, appliquée à l'équation de Jacobi, donne l'intégrale générale sous la forme classique.

Le théorème de Fuchs donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire d'ordre n, à coefficients uniformes dans le voisinage d'un point a, admette n intégrales distinctes, régulières dans le voisinage du point a, théorème qui avait été admis dans la première édition, est démontré ici, d'abord dans le cas de $n = 2$, puis dans le cas général.

Les équations linéaires à coefficients périodiques sont étudiées d'après un Mémoire de M. Floquet (*Annales de l'École supérieure*, 1883), l'Ouvrage de M. Poincaré, *Les méthodes nouvelles*

---

[1] Darboux. *Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878).

de la Mécanique céleste, et un Mémoire de M. Liapounoff (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IX). L'addition d'une période à la variable indépendante conduit, pour un système fondamental d'intégrales, à une substitution linéaire dont les coefficients sont constants. La recherche, pour cette substitution linéaire, d'une forme canonique aussi simple que possible, conduit à une équation algébrique d'ordre n, l'*équation caractéristique;* les logarithmes des racines divisés par la période sont les *exposants caractéristiques*.

Ces exposants une fois connus, on peut trouver l'expression générale des intégrales qui correspondent à la substitution linéaire canonique. Mais la recherche des exposants caractéristiques est, en général, très difficile. Elle revient au problème suivant : Connaissant les valeurs de n intégrales et de leurs $n-1$ premières dérivées pour $t = t_0$, trouver les valeurs correspondantes pour $t = t_0 + \omega$, t étant la variable indépendante et ω la période. Des indications sont données pour la solution de ce problème par la méthode des approximations successives, dont l'exposé a reçu des additions utiles dans la question actuelle et dans d'autres théories. Une application est faite à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = p(t)\, y,$$

où $p(t)$ est une fonction continue de t, de période ω.

2. Pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, la théorie de Lagrange et celle de Cauchy avaient été exposées séparément. Dans une addition, on montre comment les caractéristiques peuvent se déduire d'une intégrale complète

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

en considérant le complexe des courbes

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

puis, comment la méthode de Cauchy s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes, en appelant, avec Sophus Lie, intégrale de l'équation $F(x_i, z, p_k) = 0$, tout système de ∞^n élé-

ments (x_i, z, p_k) vérifiant les relations

$$F(x_i, z, p_k) = 0, \qquad dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

Les propriétés fondamentales des systèmes linéaires et homogènes, en particulier, des systèmes complets de r équations à n variables indépendantes ont été ajoutées.

Pour les équations simultanées aux dérivées partielles non linéaires, à n variables indépendantes, les traits essentiels des principales méthodes, notamment la méthode de Jacobi qui repose sur l'identité de Poisson, ont été indiquées. Le lecteur sait qu'il trouvera l'exposition détaillée dans l'Ouvrage de M. Goursat : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*.

Le Chapitre consacré aux généralités sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur a été remanié et se termine en indiquant que des travaux récents ont conduit à la solution générale de la question suivante :

« Étant donné un système de m équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, à un nombre quelconque de variables indépendantes et de fonctions inconnues, reconnaître si ce système admet des intégrales et préciser les arbitraires (constantes ou fonctions) dont dépendent les intégrales, quand ces intégrales existent. »

3. Outre les additions précédentes, il faudrait encore en signaler d'autres sur un théorème de Morera se rapportant à l'intégrale d'une fonction complexe, sur les invariants intégraux, sur les systèmes adjoints aux systèmes d'équations différentielles.

Un troisième Volume contiendra les équations aux dérivées partielles du second ordre, le Calcul des Variations et une esquisse de la théorie récente des équations intégrales. Cette brève indication donnée dans la Préface du second Volume, et surtout les travaux de M. Goursat sur ces questions, nous font pressentir l'intérêt que ne peut manquer de présenter le dernier Volume de cet Ouvrage, très vite devenu classique.

E. Lacour.

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. *Edition française* rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de JULES MOLK. — Tome I, vol. 2, *Algèbre*, fascicule 3, p. 329-[23], un vol. in-8°, publié le 15 février 1911. — Tome I, vol. 3, *Théorie des nombres*, fascicule 4, p. 289-98[], publié le 30 octobre 1910. — Tome II, vol. 2, *Fonctions de variables complexes*, fascicule 1, p. 1-96, publié le 25 mai 1911. — Tome III, vol. 1, *Fondements de la Géométrie*, fascicule 1, p. 1-160, publié le 30 mars 1911. — Tome III, vol. 3, *Géométrie analytique plane*, fascicule 1, p. 1-160, publié le 25 juin 1911. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, B.-G. Teubner.

L'Encyclopédie des Sciences mathématiques entreprise par deux puissantes maisons d'édition est une entreprise grandiose qui mérite les sympathies et doit avoir l'appui de tous les géomètres. Elle se poursuit avec une régularité et une rapidité qui doivent nous faire bien augurer du succès final. Analysons d'abord les cinq fascicules que nous avons sous les yeux.

Le premier, qui a été rédigé pour l'édition allemande, par M. François Meyer, professeur à l'Université de Kœnigsberg, se compose de deux articles : 1° *Propriétés générales des corps et des variétés algébriques;* exposé d'après l'article allemand de G. Landsberg (Kiel), par J. Hadamard (Paris) et J. Kurschak (Budapest); 2° *Théorie des formes et des invariants;* exposé, d'après l'article allemand de F.-W. Meyer, par J. Drach (Toulouse).

Le second ne comprend qu'un article : *Propositions transcendantes de la théorie des nombres;* exposé d'après l'article allemand de P. Bachman (Weimar), par J. Hadamard (Paris) et E. Maillet (Bourg-la-Reine).

Le troisième se compose de deux numéros : 1° *Analyse algébrique;* exposé, d'après l'article allemand de A. Prinsgheim (Munich), et G. Faber (Stuttgard), par J. Molk (Nancy); 2° *Fonctions analytiques;* exposé, d'après l'article allemand de W.-F. Osgood (Cambridge, U. S. A.), par P. Boutroux (Poitiers) et J. Chazy (Grenoble).

Le quatrième comprend : 1° *Les Principes de la Géométrie;* exposé par F. Enriquès (Bologne); 2° *Notes sur la Géométrie non archimédienne,* par A. Schoenflies (Kœnigsberg); 3° *Les*

notions de ligne et de surface; exposé, d'après l'article allemand de H. Von Mangoldt (Dantzig), par L. Zoretti (Caen).

Enfin, le cinquième contient un seul article : *Coniques*, exposé d'après l'article allemand de F. Dingeldey (Darmstadt), par E. Fabry (Montpellier).

De nombreux fascicules sont sous presse, et nous aurons, sans doute, à les signaler prochainement. En attendant, nous devons remercier le Directeur de la publication, M. Jules Molk, et l'éditeur, M. Gauthier-Villars, du grand service qu'ils rendent avec cette nouvelle édition de l'Encyclopédie, à la Science mathématique, en général, et plus particulièrement à la Science mathématique française. L'édition de M. Gauthier-Villars venant après l'édition allemande, les auteurs allemands ont pu indiquer les modifications que l'expérience ou les critiques leur avaient suggérées. Les collaborateurs français ont pu, d'autre part, signaler des travaux qui auraient passé inaperçus. Cette collaboration entre des savants appartenant à diverses nations a donc été féconde, et il est à souhaiter qu'elle soit imitée pour tous les travaux d'intérêt général. Aujourd'hui, d'ailleurs, la production mathématique est devenue si intense, que tout travail qui n'est pas signalé dans une publication bibliographique peut être considéré comme perdu. C'est dire tout l'intérêt que les savants de tous les pays doivent prendre à l'œuvre si vaste, entreprise sous les auspices des quatre Académies. J. G.

NIELSEN (NIELS). — THÉORIE DES FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES. Cours professé à l'Université de Copenhague. Un vol. in-4°, VII-212 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Le savant professeur d'Analyse supérieure à l'Université de Copenhague a déjà publié sur les fonctions cylindriques et sur la fonction Γ des travaux et des Ouvrages qui ont trouvé auprès des géomètres le plus favorable accueil. Le nouveau Volume qu'il nous donne, et qui contient la substance d'un cours professé à l'Université de Copenhague, n'obtiendra pas moins de succès que les précédents auprès des lecteurs compétents. Il contient le

résumé de recherches importantes qui ont occupé M. Nielsen pendant près de dix ans.

« Le but principal de mes recherches, nous dit l'auteur, a été l'étude d'une fonction assez générale pour donner, comme cas particuliers, toutes les séries hypergéométriques finies ou infinies qui jouent un rôle dans les applications de l'Analyse, et qu'on nomme généralement des *fonctions sphériques*. »

Une telle fonction générale est, à un facteur près, la fonction hypergéométrique de Gauss, $F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x^2}\right)$, dans laquelle la différence des deux premiers éléments est $\frac{1}{2}$. L'étude minutieuse, habile et savante qu'en fait l'auteur, lui donne la démonstration ou la généralisation de résultats déjà obtenus pour les fonctions sphériques, annulaires ou coniques, qu'il serait trop long d'énumérer dans le détail. Nous nous contenterons de renvoyer à l'exposition de M. Nielsen, et d'en recommander la lecture aux jeunes analystes qui, pour suivre l'auteur, n'auront besoin, le plus souvent, que de la connaissance des fondements de la théorie des fonctions analytiques. L'Ouvrage est à placer, dans les bibliothèques, à côté des Traités bien connus et très appréciés de H. Heine et des Neumann.

G. J.

J.-A. SERRET. — Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung, nach Axel Harnacks Uebersetzung. Vierte und fünfte Auflage, bearbeitet von *G. Scheffers*. Zweiter Band : *Integral-Rechnung*, mit 108 Figuren im Text. Un vol. in-8°, XIV-638 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1911.

En langue allemande, comme en langue française, le Livre de Serret poursuit le cours de ses succès. Nous signalions récemment la récente réédition française ; il nous suffira évidemment d'annoncer l'édition allemande, qui se recommande tout particulièrement par la collaboration de M. Scheffers. J. J.

BEUTEL (E.). — Algebraische Kurven; Zweiter Teil : *Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung*. Un vol. in-18, 136 pages (Collection Göschen). Leipzig, G.-J. Göschen, 1911.

Il nous suffira évidemment de signaler ce petit Volume, dont les différentes sections portent les titres suivants :

I. Polaires et courbe hessienne (18 pages).
II. Le principe de la dualité dans la Géométrie analytique du plan (21 pages).
III. Singularités d'ordre supérieur (5 pages).
IV. Courbes du troisième ordre (16 pages).
V. Courbes du quatrième ordre (52 pages).

J. J.

INSTITUT DE FRANCE. — Académie des Sciences. Procès-Verbaux des séances de l'Académie, tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835, publiés conformément à une décision de l'Académie par *MM. les Secrétaires perpétuels*. t. I, an IV-VII (1795-1799). Un vol. grand in-4°, III-679 pages. Hendaye, Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1910.

Pour donner une idée de cette publication nouvelle qui ne sera pas moins utile aux géomètres qu'à tous les autres savants, nous allons reproduire ici l'avertissement que M. Darboux a placé en tête du premier Volume.

« Depuis longtemps déjà, les procès-verbaux des séances tenues par l'Académie des Sciences étaient considérés comme un des monuments des plus précieux par tous ceux qui s'occupent de l'histoire des sciences. Il ne se passait pour ainsi dire pas de semaine sans que quelque chercheur, ou quelque érudit, vînt demander à notre Commission administrative l'autorisation de les consulter, et de faire des recherches, presque toujours couronnées de succès, dans les Archives de notre Compagnie. Ces procès-verbaux étaient déposés autrefois dans le cabinet du Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques. Pour écarter tout danger de perte ou de destruction, les Secrétaires perpétuels les avaient fait transporter à la Bibliothèque, les confiant ainsi à la garde du savant et dévoué bibliothécaire de l'Institut, M. Alfred Rebelliau. Ils ont pensé

qu'il y avait mieux à faire encore, et que la publication intégrale de ces documents, d'un intérêt si exceptionnel, contribuerait à mettre en lumière les travaux de nos illustres prédécesseurs et permettrait aux historiens de la Science d'éclaircir bien des points demeurés, aujourd'hui encore, douteux ou obscurs. La tâche qu'ils avaient devant eux était immense. Les procès-verbaux des séances de l'Académie ont commencé à être tenus régulièrement depuis l'année 1666, sauf une lacune pour les années 1670 à 1674 inclus. Ils occupent 160 registres in-folio. Le nombre des rapports faits par les membres de l'Académie dépasse 10 000. Ajoutons qu'il convenait d'envisager l'hypothèse où, au cours de la publication, il aurait paru nécessaire de joindre aux procès-verbaux eux-mêmes certaines pièces annexes, présentant un intérêt particulier.

Nos successeurs, nous l'espérons, ne craindront pas d'envisager cette œuvre dans son ensemble. Pour nous, à qui le temps et les moyens étaient mesurés, il nous a paru que nous devions, en quelque sorte, courir au plus pressé. Et nous avons proposé à l'Académie de commencer par publier seulement la partie de nos procès-verbaux qui s'étend depuis la fondation de l'Institut, en l'an IV de la République, jusqu'à cette année 1835 où a été inaugurée, grâce à l'initiative d'Arago, la belle publication des *Comptes rendus hebdomadaires des Séances* de l'Académie, qui comprend aujourd'hui 151 Volumes in-4° et qui constitue le plus puissant moyen d'action dont dispose de nos jours une Société savante. Notre proposition a reçu de l'Académie l'accueil le plus favorable. Son exécution aura l'inappréciable avantage de faire, en quelque sorte, remonter la publication des *Comptes rendus* jusqu'à la date même de la fondation de l'Institut. Et d'ailleurs, la partie que nous avons ainsi choisie se rapporte à la plus belle époque de la Science française, celle où des hommes tels que Lagrange, Laplace, Lamarck, Cuvier, Monge, etc. faisaient partie de l'Académie.

Le premier Volume, que nous publions aujourd'hui, comprend les premières années, depuis l'an IV jusqu'à l'an VII. Il commence à nous donner une idée très nette du rôle et des travaux de la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, dans sa première organisation.

La savante Compagnie se réunissait deux fois par décade. La

séance s'ouvrait à cinq heures et demie du soir, et durait le plus souvent deux heures. A cette époque le président de chaque Classe était nommé pour six mois seulement. Le premier président élu fut Lagrange ; Laplace lui succéda. C'est à Lacepède qu'échurent tout d'abord les fonctions de Secrétaire.

Les membres se montraient très assidus aux séances : presque tous d'ailleurs avaient appartenu à l'ancienne Académie.

La Section I (*Mathématiques*) comprenait Lagrange, Laplace, Borda, Lacroix, Bossut, Legendre, Delambre, tous membres de l'ancienne Académie.

Monge, Le Roy, Carnot, Périer, Vandermonde, qui, avec Prony, Bonaparte, Berthoud, formaient la Section II (*Arts mécaniques*), avaient également appartenu, à des titres divers, à l'Académie des Sciences.

La Section III (*Astronomie*) était uniquement composée d'anciens Académiciens : Lalande, Méchain, Le Monnier, Cassini, Pingré, G. de Bory, Messier, Jeaurat.

La Section IV (*Physique expérimentale*) comprenait deux membres nouveaux, Paul Lévêque et Lefèvre-Gineau, à côté des Académiciens Charles, Cousin, Brisson, Coulomb, Rochon.

Guyton de Morveau, Berthollet, Fourcroy, Pelletier également Académiciens, formaient la Section V (*Chimie*) avec deux membres nouveaux, Bayen et Vauquelin.

La Section VI (*Histoire naturelle et Minéralogie*) comprenait d'Arcet, Haüy, Desmarests, Duhamel, à côté de deux membres nouveaux, Dolomieu et Lelièvre.

La Section VII (*Botanique et Physique végétale*) comprenait cinq membres de l'ancienne Académie : Lamarck, Desfontaines, Adenson, Laurent de Jussieu, L'Héritier, à côté d'un membre nouveau, Ventenat.

La Section VIII (*Anatomie et Zoologie*) comptait un membre nouveau de grande illustration, Cuvier, qui, avec Richard, venait s'adjoindre à quatre Académiciens : Daubenton, Lacepède, Tenon, Broussonet.

La Section IX (*Médecine et Chirurgie*) était celle qui, avec la suivante, comprenait le plus de membres nouveaux : des Essartz, Hallé, Pelletan, Lassus, à côté de Sabatier et de Portal.

Enfin la Section X (*Économie rurale et Arts vétérinaires*

comprenait deux Académiciens : Thouin et Tessier, à côté de Gilbert, Huzard, Cels et Parmentier.

Cette énumération suffit à montrer qu'après deux ans d'interrègne, l'ancienne Académie renaissait tout entière pour former la *Classe des Sciences physiques et mathématiques* de l'Institut nouvellement créé. Personne du reste ne s'y trompa. On avait supprimé l'Académie des Sciences pour obéir à un principe général. On fut heureux de saisir l'occasion qui s'offrait de la rétablir.

On conçoit que la réunion de savants, qui possédaient déjà les traditions académiques, dut beaucoup faciliter le travail de la Compagnie renaissante. Aussi, dès les premières séances, nous voyons les membres de la Classe discuter avec précision les propositions qui leur sont soumises, aboutir rapidement à des solutions pratiques, donner au Gouvernement les avis qu'il demande sur une foule de questions, prendre connaissance des Ouvrages qui leur sont présentés, examiner et discuter les travaux qui leur sont soumis, soit par des confrères, soit par les correspondants et les savants étrangers à l'Académie.

Plusieurs rapports étendus, insérés dans les procès-verbaux, retiendront, aujourd'hui encore, l'attention et l'intérêt du lecteur. L'Académie accueille volontiers les jeunes talents. Si les Commissaires, qu'elle choisit toujours avec l'attention la plus scrupuleuse, ont à signaler quelque défectuosité dans le Mémoire qui leur est soumis, leurs critiques, toujours inspirées par le souci de la vérité et de la rigueur, sont empreintes de la plus grande bienveillance et, le plus souvent, accompagnées d'encouragements.

Les rapports de confiance qui s'étaient établis entre les Académiciens et qui avaient été interrompus pendant la tourmente reprennent tout naturellement. Dès qu'un membre de la Classe est souffrant, le Président délègue un ou deux confrères pour aller prendre de ses nouvelles. Les discussions se maintiennent sur le terrain purement scientifique. La Compagnie reprend, avec les savants des autres nations, les relations amicales et courtoises qui distinguaient déjà l'ancienne Académie. Elle leur fait volontiers les honneurs de ses séances. Elle a soin d'ailleurs de renommer les anciens associés étrangers de l'Académie : Joseph Banks, Priestley, Herschel, Pallas, auxquels elle ajoute deux membres nouveaux : Maskelyne et Cavendish.

La publication que l'Académie a entreprise paraîtra donc, nous l'espérons, pleinement justifiée : et nous avons confiance que cette impression se confirmera de plus en plus à mesure que paraîtront les Volumes suivants. Mais elle présentait, on doit le reconnaître, des difficultés de plus d'un genre.

D'abord il fallait trouver des ressources pour une entreprise aussi étendue. Cette difficulté a été levée de deux manières. En premier lieu, l'Institut, à deux reprises différentes, nous a accordé une subvention sur les fonds Debrousse, et nous espérons qu'il voudra bien nous continuer son appui.

En second lieu, nous avons pu réduire beaucoup les frais de la publication, grâce à l'initiative qui a été prise par M. l'abbé A. Verschaffel. L'infatigable directeur de l'Observatoire que l'Académie possède à Abbadia a bien voulu mettre à la disposition de l'Académie, et dans les conditions les plus favorables, l'imprimerie qu'il a installée à côté de son Observatoire et qui, depuis 8 ans, a publié neuf Volumes de la belle série de ses observations méridiennes.

Une autre difficulté, plus grande qu'on ne pourrait le supposer, subsistait encore. Les procès-verbaux ont été transcrits par des employés, souvent ignorants, à qui il est arrivé plus d'une fois de défigurer les noms propres, et même le sens des phrases. Heureusement, grâce au zèle et à l'activité d'un ancien employé de l'Institut, M. Maindron, auquel nous sommes heureux de rendre un hommage tardif, nos Archives ont été remises en bon ordre. Elles contiennent le plus souvent les minutes du Secrétaire de l'Académie, d'après lesquelles ont été rédigés les procès-verbaux.

Il y avait là une précieuse ressource que l'on n'a eu garde de négliger. Elle a permis de procéder à une revision du texte du manuscrit et des épreuves d'imprimerie. Ce travail fort délicat a été exécuté, sous notre direction, par M. Raveau, chargé de la rédaction des *Comptes rendus* actuels, par M. l'abbé A. Verschaffel, par son frère M. l'abbé C. Verschaffel, et par M. Germain de Saint-Pierre. Je suis heureux de leur adresser, à tous, les biens vifs remercîments de l'Académie. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

KNOBLOCH (Walth.), KÜHL (Herm.). — *Sammlung geometrischer Konstruktionen zum Gebrauche in Gewerbeschulen, Präparanden-Anstalten, Volks- u. Mittelschulen, sowie zum Selbstunterricht u. f. die Teilnehmer am Meisterkursus.* In-8, 87 p. avec 140 fig. Altona-Ottensen, St. Carstens. 1 m. 20.

Ratschläge u. Erläuterungen f. die Studierenden der Mathematik u. Physik an der Universität Göttingen. Hrsg. v. der Direktion des mathematisch-physikal. Seminars. Neue Aufl. Ostern 1911. Mit e. Anhang.: Statuten des mathemat. Lesezimmers. Gr. in-8, 34 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m.

BEUTEL (Eug.). — *Algebraische Kurven.* 1. Tl. : *Theorie u. Kurven* 3. *u.* 4. *Ordng.* [*Sammlung Göschen.* (Unser heut. Wissen in kursen, klaren, allgemeinverständl. Einzeldarstellgn.)]. In-8, 136 p. avec 59 fig. Leipzig, G.-J. Göschen. 0 m. 80.

SCHRUTKA (Edler) v. RECHTENSTAMM (Loth.). — *Theorie u. Praxis des logarithmischen Rechenschiebers.* Gr. in-8, x-96 p. Wien, F. Deuticke. 3 m.

SEYBOTH (J.). — *Tables logarithmiques à trois décimales*, édition de poche. Paris, A. Challamel. 1 fr. 25.

— *Tables logarithmiques et trigonométriques à quatre décimales*, 6e édition. In-8. Paris, A. Challamel. 4 fr.

Tables pour le tracé des courbes de raccordement en arc de cercle par la méthode des angles inscrits et des cordes successives. In-8. Paris, H. Ferreyrol. 3 fr.

VAHLEN (Thdr.). — *Konstruktionen u. Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzg. der niederen, e. Vorstufe zur höheren Geometrie.* [*Teubner's (B.-G.). Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* 33. Bd.]. Gr. in-8, XII-349 p. avec 127 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 11 m.; relié, 12 m.

WEISBACH (Jul.). — *Tafel der vielfachen Sinus u. Cosinus, sowie der vielfachen Sinus versus v. kleinen Winkeln, nebst Tafel der einfachen Tangenten, zum Gebrauche f. prakt. Geometer u. Mechaniker überhaupt u. f. Markscheider besonders.* 8. Ster.-Ausg. Gr. in-8, 28 p. Berlin, Weidmann. 1 m.

WOODWARD (C.-J.). — *ABC of five-figure logarithms and tables for chemists; including electro-chemical equivalents, analytical factors, gas reduction tables, and other tables useful in chemical laboratories.* 75 p. New-York, Spon et Co. 1 d.

ANDRADE (J.). — *Le Mouvement. Mesures de l'étendue et mesures du temps.* In-8, avec 46 fig. Paris, F. Alcan. 6 fr.

DRUDE (Paul). — *Précis d'Optique*, refondu et complété par *Marcel Boll*. T. I. In-8, x-376 p. avec 168 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

DUHEM (P.). — *Traité d'Énergétique ou de Thermodynamique générale.* T. I. In-8, IV-558 p. avec 5 fig. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

FROMMEL. — *Radioaktivitat.* [*Sammlung Goschen.*] Unser heut. Wissen in kurzen, klaren, allgemeinverstandl. Einzeldarstellgn. 317.] 2. Aufl. In-8, 115 p. avec 21 fig. Leipzig, G.-J. Göschen. 0 m. 80.

ARRHENIUS (Svante). — *Das Schicksal der Planeten.* In-8, 55 p. avec 2 fig. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 1 m. 50; relié, 2 m.

Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze v. *U. Amaldi, E. Baroni, R. Bronola* u. a. Gesammelt u. zusammengestellt v. FEDERIGO ENRIQUES. I. Tl.: Die Grundlagen der Geometrie. Deutsche Ausg. v. *Herm. Thieme.* Gr. in-8, x-366 p. avec 144 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 10 m.

HAMMER (E.). — *Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde).* I. Bd., Feldmessen u. Nivellieren, des Lehrbuchs der Vermessungskunde besonders f. Bauingenieure. Gr. in-8, XIX-766 p. avec 500 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 22 m.; relié, 24 m.

MERCER (J.). — *Sturm-Liouville series of normal functions in the theory of integral equations.* London, Dulau. 4 s.

MIKIEWICZ (Boleslaw). — *Die Durchführbarkeit der Gleichung $a^n = b^n = c^n$ in ganzen Zahlen od. das sogenannte Fermat'sche Problem.* Gr. in-8, 28 p. Krakau, D.-E. Friedlein. 2 m.

MONTESSUS (R. de) et ADHÉMAR (R. d'). — *Calcul numérique (Opérations mathématiques et algébriques, intégrations).* 275 p. avec fig. Paris, O. Doin et fils. 5 fr.

LOHSE (O.). — *Untersuchungen üb. die physische Beschaffenheit des Planeten Jupiter (Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam.* Hrsg. vom Direktor R. Schwarzschild. Nr. 62. XXI. Bd. ex. in-8, 182 p. avec 12 pl. Potsdam, Leipzig, W. Engelmann. 16 m.

HERTZSPRUNG (E.). — *Ueber die Verwendung photographischer effektiver Wellenlängen zur Bestimmung v. Farbenäquivalenten. (Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam.*

Hrsg. vom Direktor K. Schwarzschild. Nr. 63. XXII. Bd. I. Stück.) Lex. in-8, 40 p. avec 8 fig. Potsdam. Leipzig, W. Engellmann. 8 m.

Tannery (J.). — *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique.* Nouvelle édition (6e), complètement refondue. In-8, XVI-547 p. avec fig. Paris, libr. A. Colin. 7 fr.

Thomson (Sir William). — *Mathematical and physical papers.* Vol. V. In-8, 618 p. Cambridge, Univ. Press. 18 s.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de M. B. Baillaud, directeur de l'Observatoire. Observations de 1892. VII-498 p. Paris, imp. et libr. Gauthier-Villars. 40 fr.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée par Jules Molk. T. I, vol. 2, fasc. 3: Propriétés générales des corps et des variétés algébriques, d'après *Landsberg*, par *J. Hadamard* et *J. Kurschak*. Théorie des formes et des invariants, d'après *F.-W. Meyer*, par *J. Drach*. In-8, 96 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75.

— T. III, vol. 1, fasc. 1. Principes de la Géométrie, par *F. Enriques*. Notes sur la géométrie archimédienne, par *A. Schoenflies*. Les notions de ligne et de surface, d'après *H. von Mangoldt*, par *L. Zoretti*. 160 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

Jahrbücher der k. k. Zentral-Anstalt f. Meteorologie u. Geodynamik. Offizielle Publikation. Jahrg. 1908. Neue Folge. 45. Bd. (30-23). XXXIV-138-76-41-17 p. Wien, Gerold et Co. 24 m.

— Anh.: Defant (A.). — *Ergebnisse der Beobachtungen des niederösterreichischen Gewitterstationsnetzes in dem J.* 1902-1905. (30-23), 42 p. Wien, Gerold et Co. 6 m. 70.

Kühtmann's *Rechentafeln.* — Ein handl. Zahlenwerk m. 2 Millionen Lösgn., die alles Multiplizieren u. Dividieren ersparen u. selbst die grössten Rechngn. dieser Art in wenigen Additions- u. Substraktionszahlen auflösen. Nebst Taf. der Quadrat- u. Kubikzahlen von 1-1000. Gr. in-8, 476 p. Dresden, G. Kühtmann. Relié, 18 m.

Le Messurier (T.-A.). — *Key to Prof. W.-W. Johnson's Differential equations.* In-8. London, Chapman et H. 7 s. 6 d.

Nielsen (Niels). — *Théorie des fonctions métasphériques*, cours professé à l'Université de Copenhague. In-4, VII-212 p. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Serret (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung.* Nach Axel Harnacks Uebersetzg. 4. u. 5. Aufl. Neu bearb. v. Geo. Scheffers 2. Bd. Integralrechnung. Gr. in-8, XIV-639 p. avec 108 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 13 m.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellsch. 46. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, W. Engelmann. 2 m.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht. Generalregister zu Bd. 1–32. Bearb. v. Thdr. Hoffmann. In-8, VI–174 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m.

Curie (P.). — *Radioaktivität.* 2. u. 3. Lfg. Leipzig, Akadem. Verl.-Gesellsch. Chacune 3 m.

Baker (A.-L.). — *Quaternions as the result of algebraic operations.* In-8. London, Constable. 6 s.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk*. Tome II (vol. 2). Fonctions de variables complexes. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *H. Burckhardt* et *W. Wirtinger*. Fasc. I, gr. in-8, 1-96 p. Paris. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 60.

— Tome III (vol. 1). Fondements de la Géométrie. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer*. Fasc. I, gr. in-8, 1-160 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m.

Grassmann (Herm.). — *Gesammelte mathematische u. physikalische Werke.* Auf Veranlassg. der mathematisch-phys. Klasse der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften u. unter Mitwirkg. v. Jac. Lüroth, Eduard Study, Just. Grassmann, Herm. Grassmann d. J., Geo. Scheffers hrsg. v. *Frdr. Engel*. Gr. in-8. Leipzig, B.-G. Teubner : III. Bd. 2. Tl. *Grassmann's Leben*, geschildert v. *Frdr. Engel*. Nebst e. Verzeichnisse der v. Grassmann veröffentlichten Schriften u. e. Uebersicht des handschriftl. Nachlasses. XV–400 p. avec 3 fig. 18 m.

Kowalewski (Gerh.). — *Die komplexen Veränderlichen u. ihre Funktionen.* Fortsetzung der Grundzüge der Differential- u. Integralrechng., zugleich e. Einführg. in die Funktionentheorie. In-8, IV–455 p. avec 124 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 10 m.; relié, 13 m.

Spitzer (Simon). — *Tabellen f. die Zinses-Zinsen- u. Renten-Rechnung m. Anwendung derselben auf Berechnung v. Anleihen, Konstruktion v. Amortisationsplänen*, etc. 5. Aufl. Gr. in-8. X–513 p. Wien, C. Gerold's Sohn. 15 m.; relié, 16 m. 40.

Wallenberg (Geo.). — *Theorie der linearen Differenzengleichungen.* Unter Mitwirkg. v. *Alf. Guldberg*. (*B.-G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* 35. Bd.) Gr. in-8, XIV–288 p. avec 5 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 10 m.; relié, 11 m.

MÜLLER (Aloys). — *Das Problem des absoluten Raumes u. seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem.* (*Die Wissenschaft*, Sammlung naturwissenschaftl. u. mathemat. Monographien. 39e fasc.) In-8. X-154 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 4 m.; relié, 4 m. 80.

YOUNG (J.-W.) and DENTON (W.-W.). — *Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry*, with a note on the growth of algebraic symbolism. In-8. London, Macmillan. 7 s.

ARNOUX (Gabr.). — *Essai de Géométrie analytique modulaire à deux dimensions.* In-8. XII-160 p. avec 50 fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

BECKER (G.), FERDINAND and VAN ORSTRAND. — *Hyperbolic functions.* New ed. In-8, LI-321 p., diagrs. Washington, D. C., Smithsonian Inst. 4 dollars.

BLIM (E.) et ROLLET DE L'ISLE. — *Manuel de l'explorateur. Procédés de levers rapides de détails. Détermination astronomique des positions géographiques.* 2e édit. In-16, 90 fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk*. Tome III, vol. 3. Géométrie algébrique plane. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer*. Fasc. I. Gr. in-8, 1-160 p. avec 14 fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 m.

Encyclopédie des Sciences mathématiques. Édition française. T. I, vol. 2, fasc. 3. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75.

— T. II, vol. 2, fasc. 1. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr. 20.

— T. III, vol. 1, fasc. 1. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

EULERI (Leonhardi). *Opera omnia.* Sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium helveticæ edenda curaverunt *Ferd. Rudio*, *Adf. Krazer*, *Paul Stäckel*. Series I. Opera mathematica. Vol. I. Vollständige Anleitung zur Algebra m. den Zusätzen v. Jos.-Louis Lagrange. Hrsg. v. Heinr. Weber. Mit e. Bilde v. Euler nach dem Stiche v. Mechel, e. Vorwort zur Eulerausg. u. der Lobrede v. Nicol. Fuss. In-8, XCV-651 p. Leipzig, B.-G. Teubner. Cartonné, 18 m. 50.

GOURSAT (E.). — *Cours d'Analyse mathématique.* 2e édition, entièrement refondue. T. II : Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. In-8, 654 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

POINCARÉ (H.). — Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, *professées à la Sorbonne* (Cours de la Faculté des Sciences de Paris). Rédigées par Henri Vergne. 1 vol. grand in-8, xxv-294 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1911.

Cet Ouvrage contient la fidèle reproduction du Cours professé à la Sorbonne par M. Henri Poincaré, pendant le premier semestre de l'année scolaire 1910-1911.

Au début de son admirable *Préface*, M. H. Poincaré s'exprime en ces termes : « Le problème de l'origine du Monde a de tout temps préoccupé tous les hommes qui réfléchissent ; il est impossible de contempler le spectacle de l'Univers sans se demander comment il s'est formé.... Notre esprit a réclamé impérieusement la solution de ce problème, bien avant qu'elle fût mûre, et alors qu'il ne possédait que de vagues lueurs, lui permettant de la deviner plutôt que de l'atteindre. Et c'est pour cela que les hypothèses cosmogoniques sont si nombreuses, si variées, qu'il en naît chaque jour de nouvelles, tout aussi incertaines, mais tout aussi plausibles que les théories plus anciennes, au milieu desquelles elles viennent prendre place sans parvenir à les faire oublier. »

M. H. Poincaré ne s'est pas attardé à nous présenter toutes les hypothèses qui ont été faites ; il a préféré exposer celles qui ont une base scientifique solide, en faire une analyse approfondie, signaler les objections que soulèvent les idées émises. Bien que cet Ouvrage contienne des calculs élevés, il peut être facilement lu par ceux qui s'intéressent au progrès de la Science, car l'Auteur a toujours bien dégagé en langage accessible à tous les résultats de ses calculs.

Faisons l'analyse succincte des points principaux de chacun des 14 Chapitres qui composent ce Livre.

Chapitre I. — Kant cherche à expliquer les particularités du système planétaire en supposant que, à l'origine, la matière qui compose les astres était répandue dans tout l'espace, que ses par-

ticules s'attiraient mutuellement selon la loi de Newton ; qu'il s'est trouvé, à l'endroit où le Soleil s'est formé, une légère prépondérance de densité et par suite d'attraction. Autour de ce centre, les particules ont circulé selon les lois de Képler et ont donné naissance aux planètes.

Kant a donné aux comètes une origine analogue à celle des planètes et dit que les comètes ont, comme les planètes, un mouvement direct : cependant on connaissait alors dix-neuf comètes ayant un mouvement rétrograde.

Ce qui surtout fait tort à l'hypothèse de Kant, c'est que les « affirmations » de ce philosophe « sont trop souvent en contradiction avec les principes de la Mécanique ».

Chapitres II et III (p. 7-67). — Laplace s'est seulement préoccupé de la formation du système solaire. Il a supposé une masse fluide entourée d'une atmosphère extrêmement ténue, cette masse et cette amosphère étant au début animées d'un mouvement uniforme commun. Dans la suite, cette atmosphère, en se contractant, abandonnera dans le plan de l'équateur une série d'anneaux qui donneront naissance aux planètes.

En supposant que les durées des mouvements angulaires de rotation et de révolution de la Lune étaient à l'origine peu différentes, Laplace a expliqué comment ces durées sont devenues égales et par suite ce fait que la Lune tourne toujours vers nous un même hémisphère. Il a aussi donné la raison de la libration observée par Galilée.

Laplace considère les comètes comme étant « de petites nébuleuses errantes de systèmes en systèmes solaires », ce qui explique pourquoi leurs mouvements sont aussi bien rétrogrades que directs.

M. H. Poincaré soumet au calcul l'hypothèse de Laplace, en rappelant les travaux de Roche. Il démontre la cause de la formation des anneaux primitifs et la nécessité d'admettre pour la nébuleuse de Laplace une très forte condensation centrale. Il explique les alternances de refroidissement central et de refroidissement superficiel de la nébuleuse, d'où il résulte que les anneaux ont pu se produire d'une manière discontinue. Il prouve que la rotation sensiblement uniforme ne pouvait se maintenir que si le processus

de refroidissement et de production d'anneaux a été excessivement lent.

Au sujet de la recherche des conditions de stabilité d'un anneau, dans le cas de la planète Saturne, M. H. Poincaré indique les travaux de Laplace et de Hirn, expose amplement les calculs que fait Maxwell en supposant que l'anneau se compose d'un très grand nombre de satellites répartis sur une circonférence. Il signale l'inconvénient de cette hypothèse trop simple et fait remarquer qu'on l'éviterait en supposant que les satellites occupent un certain volume dans l'espace.

Puis, soumettant au calcul le cas d'un anneau fluide, M. H. Poincaré trouve une limite supérieure et une limite inférieure de la densité d'un anneau fluide, d'où il conclut que l'hypothèse de la fluidité des anneaux de Saturne doit être rejetée. Il démontre ensuite qu'à un certain moment les anneaux abandonnés par la nébuleuse de Laplace seront instables et se rompront en plusieurs parties; il explique comment ces parties pourront se réunir pour former une planète et, en se fondant sur l'action des marées, pourquoi cette planète aura en général un mouvement de rotation direct.

Par l'Analyse mathématique, M. H. Poincaré étudie la formation des satellites, en examinant les conditions d'équilibre d'abord d'une masse fluide homogène en rotation autour d'un axe, puis d'une masse à forte condensation.

Dans ses *Leçons*, M. H. Poincaré a examiné les objections qui ont été faites à l'hypothèse de Laplace et, dans sa *Préface*, il présente ainsi son opinion sur la valeur de cette hypothèse : « La plus vieille hypothèse est celle de Laplace ; mais sa vieillesse est vigoureuse, et, pour son âge, elle n'a pas trop de rides. Malgré les objections qu'on lui a opposées, malgré les découvertes que les astronomes ont faites et qui auraient bien étonné Laplace, elle est toujours debout, et c'est encore elle qui rend le mieux compte de bien des faits; c'est elle qui répond le mieux à la question que s'était posée son auteur. Pourquoi l'ordre règne-t-il dans le système solaire, si cet ordre n'est pas dû au hasard? De temps en temps une brèche s'ouvrait dans le vieil édifice, mais elle était réparée et l'édifice ne tombait pas ».

Chapitre IV. — Faye suppose que, dès l'origine, l'espace était

rempli par un chaos général excessivement rare, formé de tous les éléments de la Chimie. Ces éléments, soumis à leurs attractions mutuelles, ont été animés de mouvements divers, d'où il est résulté des myriades de lambeaux chaotiques qui ont donné naissance, par voie de condensation progressive, aux divers Mondes de l'Univers. Il admet que le lambeau qui est devenu le système solaire était à l'origine une sorte de nébuleuse sphérique et homogène dont une partie des matériaux possédait un lent mouvement tourbillonnaire. Il pense qu'à l'intérieur de cette nébuleuse se forment des anneaux concentriques animés d'un mouvement commun. Certaines particules s'arrangent, sous l'influence de la gravité, en anneau plat qui tourne circulairement ; d'autres décrivent des ellipses concentriques à l'anneau et situées dans son plan.

M. H. Poincaré signale cette différence essentielle entre les hypothèses de Laplace et de Faye : l'un admet que les anneaux se forment à l'extérieur de la nébuleuse, l'autre à l'intérieur ; l'un rend parfaitement compte de la faiblesse des excentricités et des inclinaisons mutuelles des anneaux, l'autre ne donne de ce phénomène qu'une explication beaucoup moins nette. De plus, il fait remarquer que la loi simple d'attraction que Faye admet dans la période intermédiaire est peu vraisemblable.

Faye n'a pas donné une explication suffisante pour ce point capital de sa théorie : au moment où chaque planète se forme, son orbite est circulaire. Admettant l'explication de Faye, M. H. Poincaré démontre que, si l'orbite a été initialement circulaire, elle est restée circulaire, mais que c'est à d'énormes distances de la nébuleuse primitive que se seraient formées les planètes.

Chapitre V. — M. du Ligondès se fait l'idée suivante du chaos primitif : « A l'origine, l'Univers se réduisait à un chaos général extrêmement rare, formé d'éléments divers, mus en tous sens et soumis à leurs attractions mutuelles... Ce chaos s'est partagé en lambeaux qui ont donné naissance, par voie de condensation progressive, à tous les mondes de l'Univers. »

A son début, l'hypothèse de M. du Ligondès ressemble à celle de Faye ; mais les tourbillons et gyrations intestines dont Faye dotait sa nébuleuse primitive sont supprimés.

M. du Ligondès écrit qu'il revient « aux idées de Kant, avec le mouvement en plus, non pas le mouvement régulier de la rotation ou des tourbillons, mais le mouvement sans ordre apparent », et qu'il ne fait « aucune hypothèse sur la nature de ces mouvements, les abandonnant entièrement à ce qu'on est convenu d'appeler le hasard ».

M. H. Poincaré montre qu'il n'y a aucune contradiction à faire sortir le système solaire d'un des lambeaux nébuleux chaotiques de M. du Ligondès. Il expose comment cet auteur rend compte du double fait d'une condensation centrale et d'une tendance à l'aplatissement : le noyau central donnera le Soleil, les matériaux extérieurs formeront autour de cet astre une sorte de disque lenticulaire d'où naîtront finalement les planètes.

M. H. Poincaré, comparant l'hypothèse de M. du Ligondès à la théorie cinétique des gaz, s'engage dans une longue discussion mathématique très intéressante.

Chapitres VI et XIII. — M. See suppose que les planètes n'ont pas été formées par des fragments de la nébuleuse solaire et que la Lune ne provient pas d'un fragment de la nébuleuse terrestre : les planètes sont des corps d'origine cosmique (extérieurs à la nébuleuse solaire), qui, venant à passer dans le voisinage du Soleil, ont été captés par lui ; la Lune a été captée par la Terre ; la capture a eu lieu par l'effet de la résistance de milieu créée par une vaste atmosphère qui, au début, entourait le Soleil.

M. H. Poincaré étudie l'effet d'une résistance de milieu. Il trouve que, si cette dernière était nulle, l'orbite de la planète serait une ellipse; comme, par hypothèse, cette résistance est très faible, l'orbite varie lentement. Il étudie les changements de cette orbite par la méthode de la variation des constantes et trouve que l'effet d'une résistance de milieu est de diminuer à la fois le grand axe et l'excentricité. Admettant, avec M. See, qu'autour du Soleil s'étendait primitivement une vaste atmosphère résistante, on conçoit qu'un astre d'origine cosmique, en passant dans la sphère d'action du Soleil, ait pu modifier la trajectoire de cet astre.

M. See pense que, de même, les satellites ont été captés par les planètes.

Sa théorie rend bien compte de la faiblesse des excentricités des

orbites des planètes et des satellites. Cette question que les mouvements de presque tous ces astres sont directs et que leurs orbites ont de faibles inclinaisons mutuelles reste sans réponse satisfaisante.

M. See s'est encore occupé de la formation des nébuleuses et en particulier de l'origine des nébuleuses spirales. Il pense qu'à l'origine le système solaire était une nébuleuse spirale d'une grande extension.

Chapitre VII (p. 131-189). — Sir George Darwin attribue un rôle essentiel à l'influence des marées pour expliquer l'histoire, dans les temps passés et dans les temps futurs, des astres du système solaire. En considérant l'effet des marées produites sur une planète par un astre troublant, on fait prévoir, par un simple raisonnement, que les deux principaux effets du frottement des marées sont la diminution de la rotation de la Terre et l'augmentation de la distance de la Lune.

Supposons, avec Sir George Darwin, que, dans ses états antérieurs, la Terre était fluide et visqueuse. Celle-ci a dès lors subi des marées dans toute sa masse. Les frottements dus à ces marées internes étaient incomparablement plus énergiques que ceux que l'on peut attribuer actuellement aux marées océaniques.

M. H. Poincaré étudie les variations que subissent, du fait de ces marées, la distance de la Lune et la rotation de la Terre, en admettant, avec Sir George Darwin, que la Lune a pris naissance tout près de la Terre et que son orbite s'est peu à peu agrandie. D'abord, pour simplifier, M. H. Poincaré fait ses calculs en supposant nulles l'excentricité de l'orbite lunaire et l'inclinaison de cette orbite sur le plan de l'équateur terrestre. Puis il s'affranchit de ces hypothèses. Il rappelle d'abord quelques points de la théorie statique des marées. On trouve que si, dans le calcul de l'action des marées produites par la Lune sur la Terre, on peut négliger l'inertie, on doit en revanche tenir compte de la viscosité. M. H. Poincaré étudie les effets de cette viscosité. Il obtient les équations qui donnent, par suite de l'effet des marées, les variations du grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire. Avec Sir George Darwin, il trouve que le frottement des marées a pu faire naître une excentricité de l'orbite lunaire et une inclinaison de son plan qui n'existaient pas initialement.

Autrefois, la Terre a dû soulever des marées sur son satellite. Tenant compte de ce fait, on trouve que l'action retardatrice de la Terre sur la Lune a été plus forte que celle de la Lune sur la Terre. On conçoit donc que la Terre ait pu forcer son satellite à nous tourner toujours la même face.

Le refroidissement séculaire de la Terre la contracte et diminue son moment d'inertie ; par suite, en vertu de la loi des aires, la vitesse de rotation de la Terre doit s'accroître. Il y a donc lieu de tenir compte, à côté de l'influence retardatrice des marées, de l'influence accélératrice de ce refroidissement. Le calcul montre que, pour la Terre, l'effet du frottement de la marée interne l'emporte sur l'effet du refroidissement séculaire de la Terre, et que la vitesse angulaire de rotation de la Terre est actuellement en voie de décroissance.

Ce long Chapitre sur la théorie de Sir George Darwin, dont nous ne pouvons indiquer que les traits les plus saillants, se termine par un résumé d'une partie des recherches faites, sur la question qui a tant préoccupé le savant anglais, par M. H. Poincaré dans son célèbre Mémoire sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Il nous paraît tout à fait convenable de rappeler ici les belles paroles prononcées par Sir George Darwin au sujet de ce travail : « Le Mémoire de M. Poincaré m'est apparu comme une révélation, parce que, juste à l'époque où il fut publié, je venais d'essayer d'attaquer la question par le côté opposé, et de suivre les étapes de l'union en un seul de deux corps séparés; mais, hélas! je dois admettre que mon travail ne contenait pas de principes généraux de grande portée, ni aucune lumière sur la stabilité des systèmes que j'essayais d'imaginer, ni rien de tout ce qui rend le Mémoire de M. Poincaré un travail qui marquera toujours une époque importante, non seulement dans l'histoire de l'Astronomie évolutionnaire, mais aussi dans celle du domaine plus vaste de la Dynamique générale. » (*Savants du Jour* : Henri Poincaré, p. 39-40.)

De sa discussion mathématique M. H. Poincaré tire cette conclusion : pour le système Terre-Lune, il a pu arriver que la Lune se soit détachée de la Terre, qu'elle ait décrit autour de celle-ci une courbe de très petit rayon et que, par suite du frottement des marées, ce rayon ait été en croissant. Il arrive donc à justifier

cette hypothèse de Sir George Darwin que la Lune est née de la Terre.

Chapitre VIII (p. 191-227). — Après avoir envisagé le problème cosmogonique au point de vue mécanique, M. H. Poincaré se préoccupe du point de vue thermodynamique et recherche l'origine de la chaleur solaire.

Le Soleil ne contient pas une provision indéfinie de chaleur et en perd chaque année, d'une part, une quantité considérable dans l'espace céleste, d'autre part une très faible quantité sur les planètes. Or, le rayonnement de la chaleur solaire s'est effectué sans grands changements pendant les temps historiques et une grande partie des temps géologiques ; donc la chaleur solaire se renouvelle et s'entretient. Par suite se pose le problème de la recherche de l'origine de la chaleur solaire.

M. H. Poincaré montre que l'on doit rejeter l'hypothèse que la chaleur solaire peut être entretenue chimiquement comme dans nos foyers, et il examine, avec Lord Kelvin, les hypothèses mécaniques. D'abord, il montre qu'il y a lieu de rejeter aussi l'hypothèse météorique proposée par Robert Mayer, à moins de la modifier profondément comme l'a fait Helmholtz dont les idées ont été adoptées et développées par Lord Kelvin.

M. H. Poincaré étudie la chaleur spécifique du Soleil et montre par le calcul comment, sous de fortes pressions, la chaleur spécifique peut atteindre une valeur considérable. Il est possible que le Soleil ait pu emmagasiner une provision de chaleur considérable. Si l'on admet que cette provision est due à l'énergie de gravitation, elle se trouve toujours limitée par le calcul de Helmholtz. Le problème n'est donc pas résolu.

M. H. Poincaré expose les calculs de Lord Kelvin sur le refroidissement de la Terre. Ces calculs sont faits en supposant, avec Poisson, que la Terre aurait autrefois parcouru des espaces chauds, où elle aurait pris dans toute sa masse une certaine température uniforme, et que, étant ensuite arrivée dans des espaces plus froids, elle aurait commencé à se refroidir. C'est ce refroidissement qui est étudié. On trouve, par le calcul, que la Terre aurait commencé à se refroidir il y a 100 millions d'années. Il s'ensuit que les chiffres de Helmholtz et de Lord Kelvin, qui ne don-

nent pas au Soleil un âge supérieur à 50 millions d'années, ne doivent pas être acceptés sans réserves.

M. H. Poincaré termine le Chapitre VIII par l'étude approfondie de ce problème, qu'il a été amené à poser précédemment : « Une masse chaude qui rayonne tend à se contracter, la contraction tend à l'échauffer ; la masse va-t-elle finalement s'échauffer ou se refroidir en perdant de la chaleur? » De ses calculs, il tire cette conclusion : « Une masse gazeuse (monoatomique ou diatomique), entièrement libre, s'échauffera en se contractant, à mesure qu'elle perdra de la chaleur par rayonnement : ses molécules en perdant de l'énergie verront leur force vive de translation augmenter. »

Chapitres IX et X. — La spectroscopie, en faisant naître la chimie stellaire, a révélé des étoiles de types spectraux très différents. On a donc été amené à étudier l'évolution de ces astres. Ici, les théories mécaniques ou thermodynamiques font place à des théories chimiques.

La théorie de Sir Norman Lockyer sur la genèse des grandes étoiles repose sur l'étude simultanée de la composition chimique de ces astres et des différences de température qu'ils présentent entre eux.

Sir Norman Lockyer a aussi étudié la distribution des étoiles des différents types dans le Ciel.

M. Schuster apporte plusieurs modifications à la théorie de Sir Norman Lockyer sur l'évolution des étoiles. Il pense que les étoiles gazeuses sont, non seulement plus chaudes, mais aussi plus jeunes que les autres.

Chapitre XI. — Dans la théorie « géniale » de M. Arrhenius, la pression de radiation joue un rôle important. C'est pourquoi M. H. Poincaré, avant d'exposer cette théorie, juge nécessaire de définir cette pression.

Sur une particule voisine du Soleil, la gravitation exerce une attraction proportionnelle à la masse de la particule, et la pression de radiation exerce une répulsion proportionnelle à la surface de la particule. Par suite, si la densité de la particule est faible et si ses dimensions sont petites, la pression de radiation peut l'emporter sur l'attraction. Des particules remplissant ces conditions sont

chassées lorsqu'elles arrivent près du Soleil. Ce fait explique pourquoi les queues des comètes sont toujours dirigées à l'opposé du Soleil, et permet de comparer la couronne du Soleil aux queues des comètes. Mais, quelque petite que soit la ténuité de la matière coronale, le Soleil, par suite de cette répulsion, perd constamment de la matière.

Essayant de se faire une idée de la quantité de matière météorique qui tombe réellement sur le Soleil, M. Arrhenius a trouvé que cette quantité est beaucoup trop faible pour être capable d'entretenir la radiation de cet astre. D'autre part, M. H. Poincaré, examinant le mécanisme résultant d'une pluie météorique, montre qu'il est impossible qu'il y ait un entretien de l'énergie solaire.

Abandonnant l'hypothèse météorique, M. Arrhenius établit une hypothèse électrique qui lui permet d'expliquer l'entretien de la chaleur solaire et l'apparition des aurores boréales.

M. Arrhenius cherche à montrer que le Soleil, encore fluide, arrive à se couvrir d'une couche mince qui empêche la matière fluide intérieure de se refroidir. Lorsque deux soleils de ce genre se choquent, il se produit une chaleur et une lumière énormes, qui sont l'origine d'une *nova*. Il arrive à établir une évolution dont le cycle renferme : une étoile nouvelle, une nébuleuse spirale, un amas d'étoiles, un soleil chaud, un soleil refroidi, un soleil éteint. Il est donc amené à admettre que le Monde a toujours suivi cette évolution, qu'il est infini et qu'il ne doit pas « vieillir ».

M. H. Poincaré a discuté l'hypothèse d'Arrhenius en invoquant le principe de Carnot ; de plus, il a montré qu'il n'est pas légitime de comparer, comme le fait Arrhenius, les gaz des nébuleuses, à une atmosphère gazeuse ordinaire ; et il termine ainsi : « De cette discussion je ne veux pas tirer de conclusion définitive : il semble que, par ce processus, la mort calorifique de l'Univers sera énormément retardée, mais on peut croire qu'elle ne sera que retardée ».

Chapitre XII. — M. H. Poincaré expose, sur la Voie Lactée et la théorie des gaz, des considérations dont la première idée remonte à Lord Kelvin. Ces considérations amènent M. H. Poincaré à comparer la Voie Lactée à une masse gazeuse et à essayer de lui

appliquer les principes de la théorie cinétique des gaz. Il assimile successivement la Voie Lactée à une sphère, à un disque aplati, à une nébuleuse spirale, à une masse gazeuse, et il arrive à cette conclusion : la Voie Lactée n'a pas encore atteint l'état d'équilibre statique qui permettrait de l'assimiler à un gaz.

Chapitre XIV. — M. É. Belot pense que le système solaire est l'épanouissement, dans une nébuleuse amorphe, d'une nébuleuse animée d'un mouvement tourbillonnaire. Nous nous dispensons de résumer ici l'hypothèse de M. É. Belot, pensant qu'il nous suffit de renvoyer le Lecteur à l'Analyse que nous avons publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. XXXIV, janv. 1911). Mais nous croyons devoir reproduire la conclusion qui termine l'exposé que M. H. Poincaré a fait du travail de M. É. Belot : « Quelles que soient les critiques que nous ayons cru devoir formuler sur divers points de cette théorie, cette tentative mérite l'attention. Si l'on peut reprocher à M. Belot d'avoir été un peu plus ambitieux qu'il ne convient de l'être dans l'état actuel de la Science et d'avoir voulu prématurément trop embrasser, et si ses idées ne semblent pas pouvoir être acceptées sous leur forme actuelle, il semble qu'il peut être utile de les faire connaître, parce qu'on pourra un jour y trouver à glaner d'intéressantes vérités. »

Er. L.

MONTESSUS (R. de) et ADHEMAR (R. d'). — Calcul numérique. Première Partie : *Opérations arithmétiques et algébriques;* Seconde Partie : *Intégration.* (Encyclopédie scientifique du Dr Toulouse. Bibliothèque de Mathématiques appliquées dirigée par M. d'Ocagne.) 1 vol., petit in-8, 247 pages. Paris, Octave Doin et fils, 1911.

M. R. de Montessus a rédigé la *Première Partie* de cet Ouvrage. Lui-même nous informe qu'il n'a fait que reproduire ce qui se trouve dans les Traités classiques sur les *opérations abrégées*, les *approximations numériques* et le *calcul des différences*. Quant au *calcul des racines des équations numériques algébriques ou transcendantes*, M. de Montessus, à défaut d'Ouvrages

étudiant le côté pratique de ces questions, a dû se contenter de résumer les principales méthodes modernes et les travaux les plus récents. Il n'a pas négligé de traiter des exemples numériques d'équations algébriques de tous les degrés. Par l'emploi du théorème de Sturm, il a calculé les racines d'équations transcendantes qui se présentent en Mathématiques et en Physique.

La *Seconde Partie* de cet Ouvrage est due à M. Robert d'Adhémar. Les méthodes de quadrature pour obtenir une valeur approchée d'une intégrale, que Simpson, Newton et Cotes, M. Mansion, Gauss ont exposées, sont illustrées par des exemples numériques. Par la théorie des fonctions implicites, M. d'Adhémar calcule des racines d'équations algébriques ou transcendantes. Il applique la méthode des différences de Cauchy à une équation différentielle que l'on sait intégrer, afin qu'il soit possible de vérifier l'efficacité de cette méthode. Il expose la généralisation faite, de la règle de Simpson, par M. C. Runge, pour intégrer avec approximation les équations différentielles et l'étude de M. R. Gans pour obtenir l'intégrale approchée d'une certaine équation aux dérivées partielles.

Chacune de ces Parties, qui renferment des questions inédites, est suivie de l'indication bibliographique des Ouvrages que les Auteurs ont consultés : cette indication est précieuse pour les mathématiciens qui auraient besoin de faire des calculs analogues à ceux que les deux Auteurs ont eu l'excellente idée de réunir dans un Ouvrage et d'exposer avec une clarté et une précision dignes d'éloges.

Er. L.

FIN DE LA PREMIERE PARTIE DU TOME XXXV.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXV : 1911. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ADHÉMAR (R. D'). — *Voir* MONTESSUS.

ANDOYER (H.). — Cours d'Astronomie. Première Partie : Astronomie théorique 117-120

ANDOYER (H.). — Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales... 277-283

ANDRE (Le Capitaine D'). — La Mitrailleuse aviatrice 14

APPENDIX scientiam spatii absolute veram exhibens a veritate aut falsitate axiomatis VI Euclidei (a priori haut unquam decidenda) independentem; adjecta ad cusum falsitatis quadratura circuli geometrica. 8

ARCHIMEDIS Opera omnia cum commentarii Eutocii 155-156

BARBETTE (E.). — Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance 154-155

BELOT (E.). — Essai de Cosmogonie tourbillonnaire 10-13

BERZOLARI (Luigi). — Geometria analytica 6-7

BEUTEL (E.). — Algebraische Kurven: Zweiter Teil : *Theorie and Kurven dritter and vierter Ordnung* 299

BIANCHI (Luigi). — Vorlesungen über Differentialgeometrie, autorisierte deutsche Uebersetzung 17-23

BIGOURDAN (G.). — L'Astronomie. Évolution des idées et des méthodes. 261-265

BOLZA (O.). — Vorlesungen über Variationsrechnung 201-204

BOREL (Émile). — Leçons sur la Théorie de la croissance 47-52

BRICARD (Raoul). — Géométrie descriptive 149-150

BRYAN (G.-H.). — Thermodynamics 264-265

COMBEROUSSE (Charles DE). — Cours de Mathématiques 199-201

Pages.

GRELIER (L.). — Systèmes cinématiques 241
DARBOUX (G.). — Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes 33-40
DOUBLET (E.). — Correspondance échangée de 1700 à 1759 entre l'astronome J.-N. Delisle et M. de Navarre 150
DUCHÊNE (Le Capitaine du Génie). — L'aéroplane étudié et calculé par les Mathématiques élémentaires 7-8
EIBE (Thyra). Ole Romers Adversaria 151-152
ENCYCLOPÉDIE des Sciences mathématiques pures et appliquées 296-297
ENESTRÖM (Gustaf). — Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Erste Lieferung 8-9
FABRY. — Théorie des séries à termes constants 46-47
FARAUT (F.-G.). — Astronomie cambodgienne 9-10
FISCHER (B.-J.). — Koordinatensysteme 190
FRANKLAND (William Barett). — Theories of parallelism 13-14
GOURSAT (E.). — Cours d'Analyse mathématique 293-299
HACK (F.). — Wahrscheinlichkeits-Rechnung 108-109
HADAMARD (J.). — Leçons sur le calcul des variations, recueillies par M. Frechet 124-147
HARET (Spiru C.). — Mecanique sociale 53-54
HEATH (Sir Thomas L.). — Diophantus of Alexandria 15-17
HELM (Georg). — Die Grundlehren der höheren Mathematik 5-6
INSTITUT DE FRANCE. — Académie des Sciences. Procès-verbaux des séances de l'Academie 155
JACOB (L.). — Le Calcul mecanique 153
JAHRESBERICHT der deutschen Mathematiker-Vereinigung 246-254
JANKE (E.). — Mathematisch physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende (Herausgegeben von) 264
KELVIN (Lord). — Mathematical and physical Papers. Volume V: Thermodynamics. Cosmical and geological Physics. Molecular and crystalline Theory 221-252
KNESER (A.). — Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik 254-261
KOMMERELL (Dr W.). — Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme 288-289
KOMMERELL (Dr W.). — Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen 288
KOMMERELL (Dr K.). — *Lire* KOMMERELL (Dr W.).
KORN (A.). — Ueber freie und erzwungene Schwingungen, eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen 121-124
LANGE (M.). — Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien 105
LEBON (Ernest). — Paul Appell, *biographie, bibliographie analytique des écrits* 13
LEGRAND (Enrique). — Sommations par une formule d'Euler 285-290
LEHMER. — Factor Table for the first ten millions 101-104
LORIA (Gino). — Spezielle ebene Kurven 156-162
MEYER (Kirstine). — *Voir* EIBE
MONTESSUS (R. DE). — Calcul numérique 319-320
NEUMANN (C.). — Ueber das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche 42-48

Pages

NIELSEN (Niels). — Théorie des fonctions métasphériques..... 297-298
POINCARÉ (H.). — Leçons de Mécanique céleste..... 65-67
POINCARÉ (H.). — Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne. 188-193
POINCARÉ (H.). — Leçons sur les hypothèses cosmogoniques..... 309-319
RUSSEL (B.). — *Voir* WITEHEAD.
SCHŒNFLIES (A.). — Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten..... 285-288
SEFERIAN (A.). — Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. 289
SERRET (J.-A.). — Cours de calcul différentiel et intégral..... 196-197
SERRET (J. A.). — Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung nach Axel Harnacks Uebersetzung..... 299
SOMMER (J.). — Introduction à la théorie des nombres algébriques.... 181-184
STURM (R.). — Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 43-46
STURM (R.). — Maxima und Minima in der elementaren Geometrie... 105-106
TANNERY (J.). — Leçons d'Arithmétique théorique et pratique..... 184-188
TEUBNER (B.-G.). — 1811-1911. — Geschichte der Firma in deren Auftrag herausgegeben von Friedrich Schluze..... 195-196
VERLEN (Oswald). — Projective Geometry..... 40-49
WEBER (H.). — Encyklopadie der elementar Mathematik..... 194-198
WELLSTEIN (I.). — *Voir* WEBER.
WHITEHEAD (A.-N.). — Principia mathematica..... 219-221
YOUNG (John Wesley). — *Voir* VERLEN.
Bulletin bibliographique. — 31-32, 100, 148, 212, 244, 274-276, 290-292, 304-308

MÉLANGES.

BOGGIO (T.). — Nouvelle démonstration du théorème de M. Hadamard sur les déterminants..... 113-116
DARBOUX (G.). — Sur la construction des Cartes géographiques..... 23-28
DARBOUX (G.). — Sur un problème posé par Lagrange..... 28-30
DARBOUX (G.). — Sur une méthode de Tissot relative à la construction des Cartes géographiques..... 55-64
ÉLIE (B.). — Relations entre les paramètres cayléens de trois substitutions orthogonales dont l'une est égale au produit des deux autres. 162-180
FOLLER (Stanislas). — Julius Weingarten..... 142-147
HADAMARD (J.). — Sur les trajectoires de Liouville..... 106-113
LACROIX (Une lettre de)..... 273-275
LALESCO (T.). — Sur une équation intégrale du type Volterra..... 205-211
MAGYAR. — Audomanyos Akademia. Prix Bolyai..... 67-100
MOLLERUP (Johannès). — La détermination du système orthogonal complet d'un noyau donné par les déterminants infinis de M. H. von Koch..... 266-273
VESSIOT (E.). — Sur les transformations infinitésimales et la cinématique des milieux continus..... 233-244

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXV.

PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
1881. Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS, MANSION,
MOLK, RADAU, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXV. — ANNÉE 1911.

(XLVIe VOLUME DE LA COLLECTION)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

5

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADEMIQUES ET PÉRIODIQUES.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

Tome CXXXIV; 1908.

Jolles (Stanislaus). — Espaces polaires primaires et secondaires d'une congruence rectiligne linéaire. (1-14).

Une congruence rectiligne linéaire est formée des droites qui coupent deux droites fixes, appelées *directrices;* la congruence est elliptique si les directrices sont imaginaires conjuguées; hyperboliques si elles sont réelles. Les transformations par polaires réciproques qui conservent chacune des deux directrices sont les espaces polaires (polare Räume) primaires de la congruence; les transformations qui échangent entre elles les deux directrices sont les espaces polaires secondaires de la congruence. L'auteur étudie synthétiquement les relations qu'ont avec la congruence et entre eux ces espaces polaires.

Signalons en particulier la correspondance qui existe entre tout faisceau d'espaces polaires primaires de la congruence et un autre faisceau d'espaces polaires primaires de la même congruence, la quadrique fondamentale (surface d'incidence) de chaque espace polaire du premier faisceau étant sa propre conjuguée par rapport à chaque espace polaire du second faisceau. Il y a aussi des correspondances intéressantes entre les quadriques fondamentales des espaces polaires primaires et des espaces polaires secondaires.

Bauer (Michaël). — Recherches élémentaires sur l'irréductibilité. (15-22).

Dans un travail paru récemment, l'auteur avait donné une interprétation simple des nombres de Puiseux au point de vue de la théorie des idéaux; il en avait déduit un théorème sur l'irréductibilité. Dans la présente Note, il démontre ce théorème par des moyens élémentaires.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont des nombres rationnels non négatifs, le problème de Puiseux consiste à déterminer une valeur T telle que la suite

$$nT, \quad r_1 + (n-1)T, \quad \ldots, \quad r_i + (n-k_i)T, \quad \ldots, \quad r_n,$$

contienne au moins deux nombres inférieurs ou égaux à tous les autres. L'auteur donne une solution purement arithmétique de ce problème, qui le conduit à un certain nombre s de valeurs

$$\frac{\alpha_1}{k_1}, \quad \frac{\alpha_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_s}{k_s}$$

de T, chacune d'elles étant inférieure aux suivantes, la somme des k étant égale à n.

Si l'on a alors une équation à coefficients entiers

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

et si l'on désigne par r l'ordre du coefficient c par rapport au module premier p, les n nombres r conduisent à des nombres de Puiseux. Si maintenant on considère deux polynomes à coefficients entiers et leur produit, les nombres de Puiseux relatifs au produit sont formés par l'ensemble de tous les nombres de Puiseux relatifs à chacun des facteurs.

L'auteur arrive ainsi au théorème suivant :

Si

$$\frac{\alpha_1}{k_1}, \quad \frac{\alpha_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_s}{k_s}$$

sont les nombres de Puiseux relatifs à l'équation donnée, et si de plus les fractions $\frac{\alpha_i}{k_i}$ *sont irréductibles, les degrés des facteurs irréductibles du premier membre de l'équation donnée sont de la forme*

$$n_{i_1 i_2 \ldots i_\varphi} = k_{i_1} + k_{i_2} + \ldots + k_{i_\varphi};$$

on a de plus

$$n = \Sigma n_{i_1 i_2 \ldots i_\varphi},$$

où les combinaisons

$$(K_\varphi) \qquad (i_1 i_2 \ldots i_\varphi)$$

ne contiennent que des nombres de la suite $1, 2, \ldots, s$; *chaque nombre de cette suite entrant une fois et une seule dans les combinaisons* (K_φ).

Noether (Emmy). — Sur la formation du système de formes de la forme biquadratique ternaire. (23-90).

Le système de formes de la forme biquadratique ternaire a déjà fait l'objet

des travaux de Gordan, Maisano et Pascal. M. Gordan a établi le système complet des formes de la forme particulière $f = x_1^2 x_2 - x_2^3 x_3 - x_3^2 x_1$ en se basant sur des principes analogues à ceux qui lui ont servi pour la forme binaire.

M. Maisano a établi, pour la forme biquadratique générale, toutes les formes jusqu'au cinquième ordre inclusivement (c'est-à-dire qui sont, par rapport aux coefficients, de degré inférieur ou égal à 5), ainsi que quelques invariants, covariants et contravariants d'ordre supérieur; il s'est servi pour cela de la méthode employée par M. Gordan pour la forme cubique ternaire. M. Pascal, enfin, s'est occupé surtout, en partant des résultats de Maisano, de la décomposition de la forme biquadratique en facteurs.

Le but du présent Mémoire est la détermination du système de formes pour la forme biquadratique ternaire générale; mais les principes fondamentaux sont seuls donnés et conduisent à l'établissement d'un « système complet relatif ».

Ce Mémoire se rattache étroitement au travail de Gordan. L'introduction de la série des formes (§ 1) permet de formuler d'une manière rigoureuse et de compléter (§ 3) les théorèmes de réduction ; l'établissement d'une formule de récurrence pour certains développements en série (§ 2) donne le moyen de pousser jusqu'au bout le calcul des réductions.

Le principe de la formation du système de formes pour les formes ternaires est le même que pour les formes binaires. En partant d'un premier système complet relatif, on arrive à des systèmes dont le module s'élève constamment, jusqu'à ce que le système d'un module devienne fini et connu, ou bien jusqu'à ce qu'un module se réduise à des formes contenant les invariants en facteur. Le procédé conduit nécessairement, d'après le théorème d'Hilbert, à un nombre fini d'opérations.

Dans le cas présent, le module (abc) du premier système complet relatif (§ 4) est ramené aux modules $\Delta = (abc)^2 a_x^2 \beta_x^2$ et $\nu = (abu)^4$ (§ 5); c'est ensuite qu'on trouve le système complet relatif (mod ν) (§ 6). Ces résultats se trouvent déjà dans le Mémoire de Gordan ; mais la méthode de l'auteur peut se généraliser plus facilement pour les formes de degré supérieur.

L'auteur choisit alors comme série des modules (§ 7) :

$$\nu, \quad \nu(\nu) = (\nu\nu_x)^2 = s_x^2, \quad \nu(s) = (ss'u)^4, \quad \ldots.$$

Pour la formation du système complet relatif mod s, l'auteur adjoint comme modules deux formes quadratiques u_x^2 et t_x^2 (§ 9 et 10), et arrive ainsi au système complet relatif mod (s, ρ, t); il montre ensuite (§ 17) que le module $(ss'u)^4$ est réductible aux modules ρ et t. Le système complet relatif mod (ρ, t) se compose de 331 formes qui sont indiquées dans un tableau, rangées suivant leur degré par rapport aux variables x et u.

Furtwängler (*Ph.*). — Sur les nombres de classes des corps abéliens. (91-94).

L'auteur démontre le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème de Kummer :

Si k et K sont deux sous corps du corps des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, où m est une puissance d'un nombre premier, et si k est contenu dans K, le nombre des classes de k est un diviseur du nombre des classes de K.

Perron (Oskar). — Sur la théorie des séries de Dirichlet. (95-143).

Les séries de Dirichlet sont les séries de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z},$$

où z est une variable complexe, les coefficients c_n sont complexes et les exposants λ_n sont réels, croissants et augmentent indéfiniment avec n.

L'auteur se propose de démontrer rigoureusement sur ces séries des théorèmes qui se trouvent déjà dans le Mémoire fondamental de M. Cahen (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XI, 1894), mais avec des démonstrations insuffisantes et mélangés à des théorèmes inexacts.

1. Toute série de Dirichlet est convergente dans un demi-plan, situé à droite d'une parallèle à l'axe imaginaire, et est uniformément convergente dans tout domaine fini, situé tout entier à l'intérieur du domaine de convergence et ne touchant pas sa limite.

2. Un des théorèmes les plus importants sur les séries de Dirichlet est qu'une fonction ne peut pas être représentée par deux séries de Dirichlet différentes. Plusieurs auteurs : de la Vallée-Poussin, Bachmann, Kronecker, ont donné, à cet égard, des démonstrations qui prêtent à la critique. En particulier, Kronecker énonce un théorème plus général dont l'auteur montre l'inexactitude sur un exemple particulier.

3. M. Perron démontre le théorème suivant :

Si une fonction $f(z)$ peut être développée en série de Dirichlet à droite de l'axe des y, cette fonction n'a qu'un nombre fini de zéros dans tout le domaine infini situé à la fois à droite de la courbe $y = e^{\pi M x}$ et à droite de $x = 1$; cela quelque grande que soit la constante M.

Elle ne prend aussi qu'un nombre limité de fois toute valeur donnée α.

Le théorème précédent fournit une condition nécessaire pour qu'une fonction $f(z)$ soit développable en série de Dirichlet.

Si la série de Dirichlet est absolument convergente, on peut faire correspondre à chaque nombre α une parallèle à l'axe des y, à droite de laquelle la fonction ne prend jamais la valeur α.

4. M. Cahen a indiqué une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$ soit développable en série de Dirichlet. L'auteur va démontrer que cette condition est effectivement nécessaire, mais non suffisante. Il démontre d'abord le théorème suivant :

Si

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

est une série de Dirichlet dont les exposants λ_n sont tous positifs, si de plus a désigne un nombre réel situé à l'intérieur du domaine de convergence, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{a+\infty} \frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz = \begin{cases} 0, & \text{si la partie réelle de } \gamma \text{ est } = a, \\ -f(\gamma), & \text{» } \quad = a \end{cases}$$

5. De ce lemme l'auteur déduit immédiatement la condition nécessaire de M. Cahen :

Pour qu'une fonction $f(z)$ holomorphe à droite de $x = \delta \geqq 0$ puisse être développée en une série de Dirichlet convergente dans le même domaine, il faut que l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(z)e^{wz}}{z}\,dz$$

converge pour $a > \delta$, soit indépendante de $a(> \delta)$ et, si w est un nombre réel quelconque, possède les propriétés suivantes :

1° *Elle est constante pour $\lambda_{n-1} < w < \lambda_n$;*

2° *Elle est nulle pour $w < \lambda_1$;*

3° *Elle possède pour $w = \lambda_n$ la valeur moyenne arithmétique des valeurs qu'elle a dans les deux intervalles adjacents à λ_n.*

L'auteur donne ensuite l'exemple d'une fonction satisfaisant aux conditions du théorème précédent, mais mettant en défaut la réciproque de ce théorème : c'est la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_{2n-1}}\left(e^{-\lambda_{2n-1}z} - e^{-\lambda_{2n}z}\right)$$

où les exposants λ_n sont définis par les formules de récurrence

$$\lambda_1 = 1; \qquad \lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} + \frac{e^{-\lambda_{2n-1}}}{n^2}; \qquad \lambda_{2n+1} = 1 + \lambda_{2n}.$$

Cette fonction est holomorphe à droite de l'axe des y, mais n'est pas développable en série de Dirichlet dans le même domaine : elle est développable en série de Dirichlet à droite de $x = 1$.

L'auteur signale quelques autres propositions inexactes de M. Cahen.

6. Si

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n^z}$$

est une série de Dirichlet convergente à droite de $x = a$, M. Cahen a démontré rigoureusement que la série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

converge sûrement à droite de l'axe des y. Il en déduit, mais par un procédé insuffisamment justifié, la formule

$$\Gamma(z) f(z) = \int_0^{\infty} F(x) x^{z-1}\,dx.$$

L'auteur démontre rigoureusement cette dernière formule, et il en donne une généralisation qui conduit en particulier à la formule

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}\right) x^{\frac{z}{2}-1}\,dx;$$

cette dernière formule était connue dans la théorie de la fonction ζ, mais les démonstrations qu'on en avait données jusqu'à présent prêtaient à la critique.

7. L'auteur démontre ensuite rigoureusement une autre formule de M. Cahen

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(z) f(z) x^{-z} dz \qquad (b > a),$$

qui est en quelque sorte l'inverse de la précédente.

Le Mémoire se termine par quelques remarques critiques sur deux Notes de M. Hadamard relatives aux séries de Dirichlet.

Thomé (*L.-W.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (145-155).

Cet article complète les théories précédemment développées dans le même Journal. Il suppose que dans les coefficients de l'équation différentielle linéaire entre rationnellement, en même temps que les variables indépendantes, une fonction algébrique entière de Kronecker. Il établit le type le plus général d'une expression différentielle linéaire régulière (1). Il indique ensuite la décomposition d'une expression différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont de la nature indiquée en un système dont la première partie est une expression différentielle régulière du type le plus général (2). Il généralise ainsi les recherches exposées dans le Mémoire du Tome CXXIII de ce Journal. Enfin l'auteur ajoute quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle linéaire et d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées [(3) et (4)].

Frank (*Philipp*). — Sur les trajectoires de la Mécanique. (156-165).

L'auteur appelle trajectoires *isénergétiques* les trajectoires d'un point matériel soumis à des forces admettant une fonction des forces et pour lesquelles la constante des forces vives a une même valeur. Dans le cas du plan, une famille de trajectoires isénergétiques dépend de deux paramètres. L'auteur recherche inversement dans quel cas une famille de courbes planes dépendant de deux paramètres peut être regardée comme une famille de trajectoires isénergétiques, ou, ce qui revient au même, comme les extrémales d'une intégrale de la forme

$$\int \sqrt{V(x, y)}\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Si la famille de courbes données est définie par l'équation

$$y'' = \varphi(x, y, y'),$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'expression

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{3\varphi y'}{1 + y'^2}\right) dx$$

soit la différentielle exacte d'une fonction de x et de y. La fonction des forces

est alors donnée par la formule

$$-V(x, y) = Ce^{-\int \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0} dx}.$$

L'auteur se pose ensuite le même problème pour une famille de courbes à un paramètre, définie par une équation

$$y' = p(x, y).$$

Dans ce cas si $y = \eta(x, c)$ ou $\eta(x, y) = c$ est l'équation des trajectoires orthogonales des courbes de la famille, il y a toujours une fonction des forces $-V(x, y) = e^{-\xi(x, y)}$ pour laquelle les courbes données sont des trajectoires isénergétiques. On a

$$\xi(x, y) = \int \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}}{p(1 + p^2)} dx.$$

où l'on suppose qu'on a, sous le signe $\int$, remplacé y par $\eta(x, c)$, puis qu'on a, une fois l'intégration effectuée, remplacé c par $\eta(x, y)$.

Jung Heinrich-W.-E. — Faisceaux de courbes dans un plan. (165-186).

La théorie des faisceaux de courbes dans un plan a été souvent traitée, mais toujours dans l'hypothèse que les singularités des courbes du faisceau aux points de base de ce faisceau sont de nature particulièrement simple. L'auteur traite le problème d'une manière purement analytique et dans le cas le plus général; il le ramène à un problème de la théorie des fonctions algébriques d'une variable.

1. L'auteur rappelle d'abord, d'après Hensel, les notions fondamentales de la théorie des corps algébriques, celles de diviseur premier, diviseur, diviseur de ramification, diviseur des points doubles, classe de diviseurs.

2. Il fait ensuite correspondre à toute fonction $A(x, y)$ rationnelle entière indécomposable un diviseur premier $\mathfrak{U}$ défini de la manière suivante : une fonction rationnelle R est divisible par $\mathfrak{U}^\alpha$ si R, décomposé en ses facteurs indécomposables, contient A à la puissance α. L'ordre du diviseur premier $\mathfrak{U}$ est dit (λ, μ) si A est de degré λ par rapport à x et μ par rapport à y. Les facteurs premiers tels que $\mathfrak{U}$ sont dits de première espèce (Stufe).

3. A chaque point (a, b) et à chaque diviseur premier $\mathfrak{U}$ l'auteur fait correspondre une fonction entière $\overline{A}(u, v)$; si la courbe $A(x, y) = 0$ passe par le point (a, b), on a $\overline{A}(0, 0) = 0$.

4. Comme application l'auteur détermine le nombre des points d'intersection de deux diviseurs premiers de première espèce ; ce nombre est $\lambda\mu - \mu\lambda$.

5. Soit

$$y - b = a_1(x - a)^{\frac{\delta_1}{\lambda}} + a_2(x - a)^{\frac{\delta_2}{\lambda}} + \dots$$

le développement d'une fonction algébrique au voisinage du point (a, b).

L'auteur fait correspondre, à ce développement et à tous ceux qui s'en déduisent lorsqu'on fait tourner x autour de a, ce qu'il appelle un diviseur premier $\mathfrak{p}$ de seconde espèce défini de la manière suivante : une fonction rationnelle de x, y est divisible par $\mathfrak{p}'$ si, en y remplaçant $y - b$ par le développement considéré, elle se transforme en une série de puissances commençant par $(x-a)^{\frac{\gamma}{\alpha}}$.

6. Le produit d'un nombre quelconque de diviseurs premiers de première et de seconde espèce s'appelle un *diviseur*. L'ordre de ce diviseur est la somme des ordres de ses diviseurs premiers de première espèce. L'auteur définit le diviseur de ramification et le diviseur des points doubles d'un diviseur entier de seconde espèce. Deux diviseurs sont dits de la même *classe* si leur quotient est une fonction rationnelle de x, y : tous les diviseurs d'une même classe ont le même ordre, qui est l'*ordre* de la classe ; le nombre des diviseurs linéairement indépendants de la classe est la *dimension* de cette classe ; le *genre* de la classe est le genre d'un diviseur arbitraire de la classe. Si P est un diviseur de la classe, il peut se mettre sous la forme $\mathfrak{a}\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{a}$ est un diviseur de première espèce, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ des diviseurs entiers de seconde espèce. Les diviseurs entiers de la classe sont de la forme $\mathfrak{a}\frac{1}{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{a}$ est un diviseur entier divisible par $\mathfrak{p}$. La recherche de ces diviseurs entiers revient à la détermination du faisceau des courbes qui sont de degré λ, μ au plus et qui se comportent en des points donnés d'une manière donnée à l'avance.

7. Pour résoudre ce problème on peut toujours remplacer le diviseur $\mathfrak{p}$ par un autre qui soit divisible par son diviseur des points doubles, c'est-à-dire qui soit *canonique*. Si δ est l'ordre d'un diviseur canonique et $2d$ l'ordre de son diviseur des points doubles, la différence $\delta - d$ ne dépend que de $\mathfrak{p}$. L'auteur réserve la lettre δ pour désigner l'ordre du diviseur canonique d'ordre minimum. Le *degré* D de la classe est alors par définition le nombre $2\lambda\mu - \delta$.

8. L'auteur considère les classes dont la dimension r est plus grande que zéro. En désignant par ρ le genre de la classe, par r' la dimension de la classe à laquelle appartient un diviseur formé d'une manière simple au moyen de $\mathfrak{p}$, on a les formules

$$\rho = (\lambda - 1)(\mu - 1) - d,$$
$$r = r' + (\lambda + 1)(\mu + 1) - (\delta - d),$$
$$D = r - 1 - \rho + \delta.$$

Les classes pour lesquelles r' est nul sont dites *régulières* ; pour des valeurs suffisamment grandes de λ et de μ, la classe est certainement régulière.

9. L'auteur définit le *produit* de deux classes et montre comment la dimension, le genre et le degré de la classe produit peuvent se déduire des quantités analogues relatives aux deux classes facteurs.

Saalschütz (*Louis*). — Sur la théorie des déterminants. (187-197).

Tout déterminant d'ordre pair peut être regardé comme la racine carrée d'un déterminant symétrique gauche ; on a ainsi, au moyen des pfaffiens, une nouvelle loi de formation des déterminants d'ordre pair.

Tout circulant d'ordre pair peut se mettre sous la forme d'un autre circulant dont l'ordre est moitié moindre ; l'auteur donne une nouvelle démonstration de ce théorème, dû à Glaisher. L'ordre du second circulant peut encore être réduit d'une unité. L'auteur rattache à la théorie précédente le développement d'un déterminant particulier connu sous le nom de *déterminant de Hankel*.

Voronoï (*Georges*). — Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. — Deuxième Mémoire : Recherches sur les parallèloèdres primitifs. (198-287).

Dans l'Introduction à ce Mémoire, dont la première Partie seule (*Partition uniforme de l'espace analytique à n dimensions à l'aide des translations d'un même polyèdre convexe*) est publiée dans ce Tome du Journal, l'auteur rattache ses recherches aux travaux antérieurs sur la réduction des formes quadratiques positives et spécialement aux recherches de Lejeune-Dirichlet et Hermite, sur les propriétés des systèmes de nombres entiers qui représentent le minimum de la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

dans l'ensemble des valeurs entières des x, la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x$ étant positive et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des paramètres arbitraires quelconques.

Lejeune-Dirichlet et Hermite ont démontré le théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\alpha x + 2\beta y \geq 0$$

subsiste pour toutes les valeurs entières des x et y, se ramènent en général à six inégalités

$$al_i^2 + 2bl_i m_i + cm_i^2 + 2(\alpha l_i + \beta m_i) \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les systèmes de nombres entiers (l_i, m_i) ne dépendent que des coefficients a, b, c.

Si l'on regarde α, β comme les coordonnées d'un point dans un plan ces six inégalités définissent un hexagone formé de trois couples d'arêtes parallèles. Cet hexagone jouit de deux propriétés importantes :

I. Il existe un groupe de translations de l'hexagone à l'aide desquelles tout le plan est couvert par les hexagones congruents.

II. Chaque forme quadratique positive binaire peut être transformée en une forme équivalente (a, b, c) satisfaisant aux conditions

$$a - b \geq 0, \qquad b \geq 0, \qquad c - b \geq 0.$$

L'hexagone correspondant à la forme (a, b, c) dans le cas

$$a - b > 0, \qquad b > 0, \qquad c - b > 0$$

est caractérisé par les systèmes $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$.

En partant de ces résultats, on peut exposer du nouveau point de vue suivant

le problème de réduction des formes quadratiques positives. Ce problème consiste en une partition uniforme de l'ensemble des formes quadratiques positives à l'aide des domaines de formes, déterminés à l'aide d'inégalités linéaires et jouissant de la propriété que chaque substitution à coefficients entiers et à déterminant ± 1 ne change pas l'ensemble (D) de ces domaines. En partageant l'ensemble (D) en classes de domaines équivalents et en choisissant les représentants de toutes les classes $D, D_1, \ldots, D_{m-1}$, on appellera *réduites* les formes quadratiques qui appartiennent à ces domaines.

Dans le Mémoire actuel, l'auteur se borne à l'étude des domaines de formes quadratiques qu'on obtient en généralisant les résultats exposés tout à l'heure des recherches de Lejeune-Dirichlet et d'Hermite. L'hexagone peut alors être remplacé, pour les formes quadratiques positives à n variables $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$, par un polyèdre convexe de l'espace à n dimensions, celui dont les points (α_i) satisfont aux inégalités

$$\sum\sum a_{ij} x_i x_j \leq \sum \alpha_i x_i > 0,$$

inégalités qui doivent être vérifiées pour toutes les valeurs entières des variables x. Ce polyèdre R peut être déterminé par un nombre fini d'inégalités linéaires, et ce nombre ne dépasse pas $2(2^n - 1)$; les faces de ces polyèdres sont deux à deux parallèles, d'où le nom de *parallèloèdres* que l'auteur leur attribue.

Les parallèloèdres possèdent une des propriétés des hexagones de Lejeune-Dirichlet : il existe un groupe de translations d'un parallèloèdre R à l'aide desquelles on remplit uniformément l'espace analytique à n dimensions par les parallèloèdres congruents.

On appelle *parallèloèdre primitif* un parallèloèdre dont les sommets sont tous *simples*, c'est-à-dire n'appartiennent qu'à $n + 1$ parallèloèdres congruents. L'auteur ne s'occupe que des parallèloèdres primitifs.

Le reste de l'introduction est consacré aux résultats qui se trouveront développés dans la deuxième Partie, non encore publiée, du Mémoire.

Section I. *Propriétés générales des parallèloèdres.* — Un polyèdre convexe de l'espace à n dimensions est défini par un ensemble de points borné de n dimensions, vérifiant un système d'inégalités linéaires. A chaque sommet d'un polyèdre convexe R on peut faire correspondre par corrélation un domaine A à n dimensions (qui est le supplémentaire de l'angle polyèdre correspondant de R); ces domaines A remplissent uniformément tout l'espace.

Si l'on applique à un polyèdre R les translations $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ où

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{k=m} l_k \lambda_{ik},$$

les l_k désignant des entiers arbitraires, $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1n})$ m translations données, on obtient un ensemble (R) de polyèdres congruents. Cet ensemble (R) partage uniformément l'espace s'il satisfait aux conditions suivantes :

Tout point de l'espace appartient au moins à un polyèdre de l'ensemble (R).

Un point intérieur à une face $P(\nu)$ d'un polyèdre de l'ensemble (R) n'appartient qu'aux polyèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par la face $P(\nu)$.

Un polyèdre R qui possède un groupe de translations satisfaisant aux conditions précédentes s'appelle un *parallèloèdre*.

Parmi les vecteurs qui définissent les translations du groupe, on peut toujours en choisir n dont le déterminant soit différent de zéro et égal à l'intégrale $\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ étendue au polyèdre R.

Les faces à $n-1$ dimensions d'un parallèloèdre sont deux à deux parallèles; chaque face à ν dimensions d'un parallèloèdre appartient au moins à $n+1-\nu$ parallèloèdres congruents; elle est simple si elle appartient exactement à $n+1-\nu$ parallèloèdres.

Un parallèloèdre primitif est un parallèloèdre dont toutes les faces sont simples : il suffit pour cela que les sommets soient simples.

Section II. *Propriétés fondamentales des parallèloèdres primitifs.* — Il existe $n+1$ arêtes des parallèloèdres de l'ensemble (R) contiguës par un même sommet de ces parallèloèdres.

On peut donner, aux équations qui définissent les sommets d'un parallèloèdre primitif, une forme canonique, ainsi qu'aux inégalités qui définissent le parallèloèdre. L'auteur, pour démontrer ce théorème, se sert d'une analyse assez longue.

L'existence d'une forme canonique lui permet d'introduire une fonction $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ définie pour tout point de l'espace et pour tout vecteur (λ_i) qui définit une translation du parallèloèdre R en un parallèloèdre principal R_0. Cette fonction est définie pour chaque parallèloèdre de proche en proche : elle est dans chaque parallèloèdre une fonction linéaire des x (dont les coefficients dépendent des λ); l'auteur démontre ce théorème fondamental que cette fonction est bien définie en tout point de l'espace.

Si deux vecteurs (λ_i) et $(\lambda_i^{(0)})$ caractérisent deux parallèloèdres R et $R^{(0)}$ de l'ensemble (R), on a, pour tout point x_i intérieur à $R^{(0)}$, l'inégalité

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) > V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}).$$

Ce théorème permet de caractériser chaque parallèloèdre R, défini par le vecteur $(\lambda_i^{(0)})$, comme l'ensemble des points vérifiant l'inégalité

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) < V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}),$$

et cela quel que soit le vecteur (λ_i) du groupe.

Si le groupe G des translations de l'ensemble (R) possède une base formée de n vecteurs $(\pi_{i1}), \ldots, (\pi_{in})$, tout vecteur (λ_i) du groupe G est de la forme

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} l_k \pi_{ik}.$$

Si alors on pose

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \pi_{1k}, \ldots, \pi_{nk}) = p_{0k} + \sum_{s=1}^{n} p_{sk} x_s \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$a_s = \sum_{k=1}^{n} l_k p_{sk},$$

on a la formule

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} l_k \left(p_{0k} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} p_{sk} \pi_{sk} - \sum_{s=1}^{n} p_{sk} x_s \right) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} a_s \lambda_s.$$

La somme $\Sigma a_i \lambda_i$ est une forme quadratique des variables entières $l_1, l_2, \ldots, l_n$; cette forme quadratique est positive.

Si l'on effectue sur le paralléloèdre primitif R une substitution linéaire, la forme quadratique $\Sigma a_i \lambda_i$ est transformée en une forme quadratique équivalente. On obtient ainsi un ensemble de paralléloèdres primitifs qui est parfaitement déterminé par une classe de formes quadratiques positives équivalentes, à condition qu'on ne considère pas comme différentes deux formes quadratiques à coefficients proportionnels.

Section III. *Détermination des paralléloèdres à l'aide des formes quadratiques positives.* — Toute forme quadratique positive $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ définit un polyèdre convexe R comme l'ensemble des points (α_i) vérifiant les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqq 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces inégalités, en nombre infini, peuvent être remplacées par un nombre fini d'inégalités

$$\sum \sum a_{ij} l_i l_j + 2 \sum \alpha_i l_i \geqq 0;$$

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ désignent un système d'entiers fournissant, pour la forme quadratique $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, un minimum par rapport à tous les systèmes d'entiers congrus au système (l_i) suivant le module 2; de plus, les systèmes (l_i) et $(-l_i)$ sont les seuls, parmi tous ces systèmes, qui fournissent ce minimum. Le nombre des inégalités indépendantes ainsi obtenu ne dépasse pas $2(2^n - 1)$.

Si l'on effectue les translations de R le long des vecteurs

$$\lambda_i = -\sum a_{ij} l_j,$$

où les l_i sont des entiers arbitraires, on obtient un ensemble (R) de polyèdres congruents qui remplissent uniformément tout l'espace.

L'auteur indique un algorithme pour la recherche du minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2 \Sigma \alpha_i x_i$ dans l'ensemble des valeurs entières de x.

Enfin, il étudie les propriétés des systèmes de nombres entiers qui caractérisent les faces à $n-1$ dimensions du paralléloèdre correspondant à la forme quadratique donnée. Ces systèmes donnent toutes les représentations du minimum arithmétique de la forme. De plus, tous les déterminants qu'on peut former avec n de ces systèmes ne dépassent pas en valeur numérique la limite $n!$.

Sturm (*Rudolf*). — Remarque sur le Mémoire de Crémona relatif aux surfaces de troisième ordre. (288-298).

Dans le troisième Chapitre du Mémoire de Cremona paru dans le même Journal (t. LXVIII, p. 1-133), le géomètre italien démontre certaines propositions relatives à un complexe symétrique. Bien que Cremona ne fasse pas d'hypothèse particulière sur ces complexes symétriques, les propositions ne sont vraies que si ces complexes sont formés par les deuxièmes polaires d'une

2e S. Fr. tic.

surface fondamentale. L'auteur donne des théorèmes de Cremona une démonstration rigoureuse.

Réthy (*Moritz*). — Sur l'instabilité d'un point matériel dans un milieu résistant. (299-307).

L'auteur généralise de la façon suivante un théorème de M. Fejér :

Soit un point matériel mobile dans un milieu résistant et soumis à une force dont le potentiel U présente, en un point G, un minimum isolé, le premier terme non nul U_{2n} du développement de U en série de Taylor étant une forme définie positive. La résistance du milieu est supposée décomposable en une composante $f(v)$ directement opposée à la vitesse, et une composante $\lambda \frac{v^2}{\rho}$ dirigée suivant la normale principale à la trajectoire. Le point G est alors une position d'équilibre instable du point matériel si λ, pour des valeurs suffisamment petites de v, reste inférieur à un certain nombre fixe; si, de plus $f(v)$, s'annulant pour $v = 0$, jouit de la propriété que $\frac{f(v)}{v}$ ou bien croît indéfiniment quand v tend vers zéro, ou bien reste inférieur à un certain nombre fini pour v suffisamment petit.

L'auteur démontre encore un autre théorème analogue et un peu plus général.

Rémoundos (*Georges*). — Sur quelques transformations des équations différentielles du premier ordre. (308-312).

L'auteur considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q désignent des fonctions uniformes par rapport à x et polynomes par rapport à y. Si y_1, y_2, y_3 sont trois solutions particulières de cette équation, la transformation

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = t$$

fait disparaître tous les zéros mobiles et tous les infinis mobiles de la solution générale. De plus, les zéros et infinis (fixes) qui restent sont en nombre fini.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Tome I; année 1908 [1].

Zoretti (*Ludovic*). — Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. (1-51).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 5.

Le Chapitre I est consacré à la théorie des ensembles parfaits plans. Un ensemble *parfait* est un ensemble *identique* à son dérivé. L'auteur donne d'abord une construction générale de ces ensembles. On peut les obtenir en excluant d'un cercle C les points qui sont situés à l'intérieur d'un des cercles d'une infinité dénombrable de cercles.

Il y a lieu surtout d'établir la distinction entre les ensembles parfaits *continus* et *discontinus*.

On appelle *continu* un ensemble tel qu'étant donnés deux points de l'ensemble et un nombre ε, on peut trouver une succession de points de l'ensemble, contenant ces deux points, tels que la distance de deux points consécutifs soit inférieure à ε, et cela quel que soit ε. Si, pour deux points au moins de l'ensemble, cette propriété n'a pas lieu, l'ensemble est dit *discontinu*. Un ensemble parfait est *partout discontinu* quand la propriété précédente n'a lieu pour aucun couple de deux points.

Relativement à ces ensembles l'auteur établit les deux théorèmes suivants :

La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles discontinus ne peut contenir une portion continue.

Étant donné un ensemble partout discontinu, on peut trouver une ligne contenant tous les points de l'ensemble.

Le Chapitre II est consacré à l'étude des fonctions analytiques.

L'ensemble des points singuliers d'une fonction uniforme peut affecter l'une des trois formes suivantes :

1° Il est dénombrable ; il contient alors des points isolés ;

2° Il contient un ensemble parfait, mais aucun ensemble continu ;

3° Il contient des ensembles continus, lignes ou aires.

Si l'on considère un point singulier donné, on peut l'entourer d'un cercle dont on fait tendre le rayon vers zéro. Les points singuliers situés à l'intérieur de ce cercle rentreront dans l'une des trois catégories précédentes. Suivant les cas on dira alors que le point considéré *appartient* à un ensemble dénombrable, discontinu ou continu. Cela posé, l'auteur établit le théorème suivant qui fait le principal objet de son Mémoire :

Étant donnée une fonction uniforme qui dans une aire Δ admet un point singulier faisant partie d'un ensemble discontinu de singularités, la fonction est certainement discontinue en quelque point de cette aire.

Autrement dit ce point est un point transcendant essentiel ou un point limite de points essentiels.

Dans le Chapitre III l'auteur applique ce théorème fondamental aux équations différentielles. En particulier, il résout le problème suivant posé par M. Painlevé :

Étant donnée une équation du premier ordre algébrique en y', y et x, étudier le cas où toute intégrale $y(x)$ est une fonction à n branches au plus.

Saltykow (V.). — Étude sur les transformations infinitésimales. (63-76).

L'auteur étudie les rapports qui existent entre les transformations infinitésimales, les facteurs intégrants et les systèmes canoniques de Liouville correspondant aux équations différentielles ordinaires ou totales.

Si l'on prend d'abord l'équation

$$(1) \qquad dy = X\,dx,$$

X étant une fonction de x et y, un facteur intégrant μ est égal à $\frac{\partial f}{\partial y}$, f étant solution de l'équation aux dérivées partielles

$$Xf + \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

d'autre part, p satisfait à l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial x} + X\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}p = 0.$$

En posant

$$H = Xp,$$

cette équation aux dérivées partielles est équivalente au système canonique de Liouville

$$dy = \frac{\partial H}{\partial p}dx, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial y}dx.$$

Soit alors

$$uf = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

une transformation infinitésimale de l'équation (1). On en déduit que

$$\mu p = h$$

est une intégrale du système canonique de Liouville.

Si l'on prend une équation aux différentielles totales

$$(1) \qquad dx = \sum_{k=1}^{k=m} X_k\,dt,$$

le facteur intégrant p satisfait aux équations

$$\frac{\partial p}{\partial t_k} + X_k\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}p = 0.$$

Et si l'on pose

$$H_k = X_k p,$$

cette équation est équivalente au système canonique

$$dx = \sum \frac{\partial H_k}{\partial p}dt_k, \qquad dp = -\sum \frac{\partial H_k}{\partial x}dt_k.$$

Toute transformation infinitésimale

$$U_k f = \varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial x}$$

donne l'intégrale

$$\varepsilon_k p = h.$$

du système de Liouville généralisée. On en déduit que *toute équation aux différentielles totales, admettant une transformation infinitésimale, s'intègre par une quadrature.*

Si l'on prend un système de n équations différentielles ordinaires

$$dx_i = X_i\,dt, \tag{3}$$

où X_i est une fonction de $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, un système de n facteurs intégrants de Jacobi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ satisfait aux équations

$$\frac{dp_i}{dt} - \sum X_k \frac{dp}{dx_k} + \sum \frac{dX_k}{dx_i} p_k = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}, \tag{5}$$

et si l'on pose

$$H = \Sigma p_k X_k,$$

les équations (4), (5), (6) se ramènent au système canonique de Liouville

$$dx_i = \frac{dH}{dp_i}\,dt, \qquad dp_i = -\frac{dH}{dx_i}\,dt. \tag{6}$$

Si

$$Uf = \sum \xi_i \frac{df}{dx} = \sum \xi_i p_i$$

est une transformation infinitésimale des équations (3), Uf est une intégrale du système de Liouville.

L'auteur étend ces résultats aux systèmes d'équations aux différentielles totales.

L'auteur examine ensuite le cas où les équations (3) admettent un groupe de transformations infinitésimales en involution et il indique le parti qu'on peut en tirer pour arriver à l'intégration de ces équations.

Duhem (*P.*). — Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre. (77-94).

M. Duhem suppose que chacun des éléments qui composent le corps est invariable de forme et de position et que son état est entièrement déterminé par sa température T. Si S est un élément superficiel du corps, a, b, c les cosinus directeurs d'une demi-normale à cet élément, la quantité de chaleur qui traverse cet élément, dans un temps dt, dans le sens de cette demi-normale, est donnée par la formule

$$dQ = (af + bf_1 + cf_2)\,dS\,dt,$$

où f_1, f_2, f_3 sont définis par les égalités

$$f_1 = K\frac{dT}{dx} + C\frac{dT}{dy} + C_1\frac{dT}{dz},$$

$$f_2 = C\frac{dT}{dx} + K\frac{dT}{dy} + C_2\frac{dT}{dz},$$

$$f_3 = C_1\frac{dT}{dx} + C_2\frac{dT}{dy} + K\frac{dT}{dz}.$$

En général, les six quantités K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3 sont des fonctions de x, y, z, T. L'auteur examine le cas où ces expressions ne dépendent pas de T.

Si alors on suppose que tous les points de la surface qui limite le corps soient maintenus à une même température T_0, ou encore que certaines parties de la surface soient imperméables à la chaleur et les autres maintenues à la température fixe T_0, il est clair que l'équilibre thermique sera établi si l'on donne à tous les points du corps la température fixe T_0. Cet équilibre thermique est-il stable ?

L'auteur précise d'abord le sens de cette expression. Soient

$$\theta = T - T_0,$$

θ_0 la valeur initiale de θ. On considère les deux intégrales

$$\mathcal{A}_0 = \int \theta_0^2 \, dv, \qquad \mathcal{A} = \int \theta^2 \, dv,$$

étendues à tous les éléments du système. Cela posé, l'équilibre thermique sera dite *stable*, si A étant un nombre positif arbitrairement choisi, il est possible de trouver un autre nombre positif A_0 tel que la condition

$$\mathcal{A}_0 < A_0$$

entraîne la condition

$$\mathcal{A} < A.$$

M. Duhem arrive alors au résultat suivant :

Si la surface qui borne un système invariable est ou bien maintenue à une température uniforme et constante, ou bien imperméable à la chaleur, ou bien encore si elle se partage en régions soumises les unes à la première condition et les autres à la seconde, pour que l'équilibre thermique soit stable sur ce système, il faut et il suffit que la forme quadratique

$$P(X, Y, Z) = K_1 X^2 + K_2 Y^2 + K_3 Z^2 + 2C_1 YZ + 2C_2 ZX + 2C_3 XY$$

soit une forme définie positive.

Ermakoff (*W.*). — Calcul des variations d'après Weierstrass. (97-137).

Les recherches de Weierstrass sur le calcul des variations l'ont conduit à un résultat très important; il a montré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin infiniment voisin. Le maximum et le minimum dépendant alors du signe d'une certaine fonction que l'auteur appelle *fonction de Weierstrass*. Toutefois, ce résultat suppose la continuité de certaines fonctions sur ce chemin infiniment voisin. Il y a donc lieu d'étudier ces cas douteux.

L'auteur appelle *chemin de Lagrange* un chemin qui satisfait aux équations différentielles de Lagrange. Si l'on veut trouver le minimum de l'intégrale

$$(1) \qquad \int f(x, y, y') \, dx,$$

le chemin de Lagrange est défini par l'équation différentielle

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si l'on cherche le minimum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, q, z')\,dx,$$

le chemin de Lagrange est défini par les équations

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{\partial f}{\partial y},\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si

$$y=p(x, y, a)$$

est une intégrale première de l'équation (2), la variable de l'intégrale (1) est l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[f(x, y, y')+(f(x, y, p)+(y'-p)\frac{\partial f}{\partial p}\right]dx,$$

prise sur un chemin infiniment voisin du chemin de Lagrange.

La fonction $p(x, y, a)$, qui est une intégrale intermédiaire de l'équation (2), peut avoir des points critiques : on appelle *point critique* un point où plusieurs valeurs d'une fonction multiforme deviennent égales. L'ensemble des points critiques forment une ligne.

Si la ligne critique traverse le chemin de Lagrange, le maximum et le minimum dépendent du signe de la fonction de Lagrange.

Si la ligne critique ne traverse pas le chemin de Lagrange, le maximum et le minimum restent douteux, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant.

L'intégrale intermédiaire peut avoir un point à indétermination, c'est-à-dire un point où la valeur de la fonction dépend du chemin qui conduit à ce point. Si le chemin de Lagrange contient un point d'indétermination, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) restent douteux.

Parmi les courbes intégrales de l'équation (2) on considère toutes celles qui passent par un point donné (x_0, y_0) : l'équation de ces courbes est de la forme

$$y=\varphi(x, a),$$

d'où

$$y'=\varphi'(x, a),$$

et en éliminant a entre ces deux équations on a

$$y'=p(x, y).$$

En se servant de cette intégrale l'auteur élucide le cas douteux des points critiques. Tout point critique de la fonction p est dit *conjugué* au point initial (x_0, y_0).

Au delà d'un point conjugué il n'existe ni maximum ni minimum.

Deux points sont dits *opposés* si les courbes de Lagrange passant par ces

deux points dépendent d'une constante arbitraire. En un point opposé au point initial (x_0, y_0), la fonction $p(x, y)$ est indéterminée.

La valeur de l'intégrale (1) *prise le long d'un chemin de Lagrange entre deux points opposés est la même pour tous ces chemins.*

Si un chemin de Lagrange contient deux points opposés, l'intégrale prise le long d'un tel chemin n'est ni maxima ni minima.

Ces résultats s'étendent au cas le plus général du calcul des variations.

Weierstrass a appelé l'attention sur ce fait que les maxima ou minima peuvent être *forts* ou *faibles*. Si le chemin de Lagrange et le chemin infiniment voisin sont tels qu'aux points correspondants l'angle des tangentes est infiniment petit, le maximum ou le minimum est dit *faible;* si ces tangentes forment des angles finis, le maximum ou le minimum sont dit *forts*. Il va sans dire que, s'il existe un maximum fort, il existe également un maximum faible, mais la réciproque n'est pas exacte.

Les cas où il n'y a ni maximum, ni minimum, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant correspondant aux cas où le chemin de Lagrange est traversé par un chemin de Lagrange infiniment voisin. On a donc le théorème suivant :

Si un chemin de Lagrange n'est pas traversé par des chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial, le maximum et le minimum relatifs à ce chemin dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Dans le cas contraire, il n'y aura ni maximum, ni minimum, même dans le cas où la fonction de Weierstrass conserve un signe constant.

Lebesgue (H.). — Sur les fonctions représentables analytiquement. (139-216).

Depuis Dirichlet et Riemann, on dit que y est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lorsqu'il y a correspondance entre un nombre y et des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans se préoccuper du procédé qui sert à établir cette correspondance. Il y a lieu de rechercher si toute fonction peut être définie par des correspondances analytiques.

Il n'est pas évident, *a priori*, qu'il existe des fonctions non représentables analytiquement. Ainsi la fonction $X(x)$, qui est égale à un pour x rationnel et à zéro pour x irrationnel, admet la représentation analytique suivante :

$$X(x) = \lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} \cos(m!\pi x)^n \right].$$

Lorsque certaines conditions très simples relatives à la variation de la fonction sont remplies, on peut affirmer que la fonction est représentable analytiquement. Ainsi l'on sait que :

Toute fonction continue n'ayant qu'un nombre fini de maxima et de minima est représentable par la série de Fourier;

Toute fonction continue est représentable par une série uniformément convergente de polynomes.

Pour étudier le problème de la recherche des fonctions non représentables analytiquement, l'auteur prend comme point de départ la classification de M. Baire.

M. Baire considère les expressions dans lesquels les signes $+$ et $-$ ne sont appliqués qu'à des constantes et aux variables. Ces expressions représentent donc des fonctions qui se déduisent des polynomes par des passages répétés à la limite.

M. Baire appelle *fonctions de classe zéro* les fonctions partout définies qui sont continues par rapport à l'ensemble des variables. Les fonctions partout définies, discontinues, qui sont limites de fonctions continues, constituent la *classe un*.

Les fonctions partout définies, qui ne sont pas de classe un, et qui sont limites de fonctions de classes 0 et 1, forment *la classe* 2, et ainsi de suite.

Il peut exister des fonctions qui ne rentrent dans aucune classe à symbole entier : si une telle fonction est la limite de fonctions à symbole entier, on dit qu'elle appartient à *la classe* ω, etc. On voit les relations qui existent entre cette classification et les *nombres transfinis* de M. Cantor.

M. Lebesgue établit l'existence de fonctions de toute classe et l'existence de fonctions échappant à tout mode de représentation analytique.

Jordan (*Camille*). — Mémoire sur les formes quadratiques suivant un module premier p, invariantes par une substitution linéaire donnée. (217-284).

Deux entiers congrus suivant le module p seront considérés comme égaux pour abréger le langage. Deux substitutions linéaires (ou deux formes) seront regardées comme identiques si tous leurs coefficients sont égaux.

Deux formes sont dites *équivalentes* (ou de même type) si l'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire opérée sur les variables.

Si l'on donne une substitution linéaire

$$S = \{x_i, \Sigma a_{ik} x_k\} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

elle admet une congruence caractéristique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p},$$

qui permet de ramener la substitution à une forme canonique.

D'autre part les formes quadratiques à n variables dont le déterminant n'est pas congru à zéro module p appartiennent à deux classes, correspondant aux deux valeurs ± 1 du caractère quadratique $\left(\frac{D}{p}\right)$.

L'auteur donne la solution des questions suivantes :

1° Une substitution $s \pmod{p}$ étant donnée, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des formes quadratiques $\Phi \pmod{p}$ de discriminant différent de zéro $\pmod{p}$ que s laisse invariantes.

2° Quelle est l'expression générale de ces formes invariantes.

3° A quels types simples peut-on les réduire par les changements de variables qui n'altèrent pas l'expression de s.

4° Quel est le nombre de ces types ?

5° Quel est le nombre des formes invariantes distinctes réductibles à chacun d'eux.

6° Quel est pour chacun d'eux le signe du caractère quadratique $\left(\frac{D}{p}\right)$ ou $\left(\frac{i}{p}\right)$.

En particulier, M. Jordan établit les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de formes invariantes* Φ *sont les suivantes :*

1° *A chaque racine* ζ *de la congruence caractéristique de* s *autre que* 1 $(\bmod p)$ *est associée une racine* ζ^{-1} *de la même congruence, réciproque de* ζ.

2° *Les deux classes* c *et* c' *correspondant à ces deux racines contiennent le même nombre de variables, dont la répartition en séries est identique dans les deux classes.*

3° *Si la congruence caractéristique admet une racine égale à* -1 $(\bmod p)$, *la classe correspondante* c *sera dite singulière. Groupons ces séries en sous-classes, en réunissant ensemble celles où le nombre des variables est le même.*

Si p *est impair, chaque sous classe dont les séries contiennent un nombre pair de variables sera formée d'un nombre pair de séries.*

Si $p = 2$, *chaque sous-classe dont les séries contiennent un nombre impair de variables sera formée d'un nombre pair de séries.*

THÉORÈME II. — *Les formes invariantes* Φ *appartiennent toutes au même type, si la congruence caractéristique de* s *n'a pas de racine égale à* -1 $(\bmod p)$.

Si elle admet de semblables racines, p *étant impair, le nombre des types distincts sera* 2^k, k *désignant le nombre des sous-classes contenues dans les classes singulières et dont les séries sont formées d'un nombre impair de variables.*

Si, p *étant égal à* 3, *la congruence caractéristique admet la racine* 1, *soient, dans chaque classe singulière,* k *le nombre totale des sous-classes,* k' *celui des sous-classes formées d'un nombre pair de séries, contenant chacune un nombre pair de variables, le nombre des types distincts sera* $2^{k-k'}.3^{k'}$.

Boussinesq (*J.*). — Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. (285-332).

L'auteur étudie le refroidissement d'un solide fixe, au sein d'une masse fluide indéfinie, animée, dans son ensemble, d'une vitesse uniforme et donnée v.

Si la vitesse v n'est pas très petite, les filets fluides localement déviés par le corps, et qui sillonnent sa surface, se chauffent à son contact et transmettent de la chaleur à leurs voisins, *sans modification appréciable ni des trajectoires, ni des vitesses d'écoulement, par les variations modérées de la température.* L'Hydrodynamique *ordinaire* permet de déterminer *à part* le mouvement visible et il reste à intégrer l'équation de Fourier qui donne la distribution de la température.

Le résultat pratique de cette analyse est le calcul de la quantité totale de chaleur enlevée au corps par le courant fluide dans l'unité de temps ; cette quantité est le *pouvoir refroidissant* du courant sur le corps.

Cette théorie suppose atteint un état permanent, même calorique, du courant fluide ; soit alors θ_0 l'excès de température de tous les points de la surface par

rapport à l'ensemble de la masse fluide. Le pouvoir refroidissant peut se mettre sous la forme

$$K S \theta_0 .$$

S étant la surface totale du corps, K est appelé la *conductibilité extérieure* fictive du corps. Cette caractéristique K du pouvoir refroidissant ne dépend pas de l'excès de température θ_0; elle varie proportionnellement aux racines carrées de la conductibilité intérieure du courant, de sa capacité calorifique, de sa vitesse V et enfin en raison inverse de la racine carrée du parcours moyen des filets fluides sur le corps.

Le coefficient de cette multiple proportionnalité dépend de la forme du corps et de son orientation dans le courant.

L'auteur examine les cas suivants :

Cylindre dont l'axe est normal au courant ;

Corps de révolution dont l'axe est parallèle au courant ; applications à la sphère, à l'ellipsoïde, au plateau circulaire, à une aiguille.

L'auteur étudie aussi le cas d'un corps convexe quelconque et le cas de l'ellipsoïde à axes inégaux.

Pepin (Le P.). — Relations qui existent entre les formes quadratiques de deux déterminants D et De^2 (*Disquisitiones*, n^os^ **213** et **214**, (1553-5 [6]).

Soient $f(a, b, c)$ une forme de déterminant D, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ une substitution qui la transforme dans la forme $F(A, B, C)$: on dit, d'après Gauss, que la forme f renferme la forme F, proprement si

$$e = \alpha^2 + \beta^2$$

est positif, improprement dans le cas contraire ; le déterminant de la forme F est De^2.

Soit e positif, décomposons de toutes les manières possibles e en un produit de deux facteurs dont l'un peut être égal à l'unité

$$e = mn = m'n' = \ldots$$

A chacune des décompositions $e = mn$ faisons correspondre les m formes qui se déduisent de f par les substitutions (m, k, o, n) où k prend les valeurs $0, 1, \ldots, m-1$.

Désignons par Ω l'ensemble des formes ainsi obtenues ; toutes ces formes de déterminant De^2 sont renfermées dans f, mais elles n'appartiennent pas toujours à des classes différentes.

Cela posé l'auteur établit les résultats suivants :

Si la forme F *est renfermée dans la forme* f, *elle est proprement équivalente à quelque forme du groupe* Ω.

Réciproquement :

Si la forme F *est équivalente à des formes* $\Phi, \Phi', \Phi'', \ldots$ *du groupe* Ω, *la forme* f *renferme la forme* F *et l'on peut trouver toutes les substitutions qui transforment* f *en* F.

Jouguet. — Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. (347-425).

On sait que les ondes se divisent en deux grandes catégories, ondes de choc et ondes ordinaires, suivant qu'il se présente, sur leur front, une discontinuité dans la vitesse ou dans les accélérations des divers ordres. On a cherché à expliquer l'onde explosive par les ondes de choc. Cette interprétation repose sur l'extension, aux fluides qui sont le siège de réactions chimiques, des lois trouvées pour ceux où il ne s'en produit pas.

Pour constituer une véritable théorie, il était nécessaire d'introduire dans la question des principes nouveaux. C'est ce qu'a fait M. Duhem : il a montré comment la réaction chimique pouvait modifier la vitesse de propagation en introduisant, pour ainsi dire, selon l'expression de M. Vieille, une élasticité spéciale. M. Duhem s'est borné à développer le cas des ondes ordinaires. L'auteur complète les recherches de M. Duhem par une étude des ondes de choc dans les milieux qui sont le siège de réactions chimiques.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. Serie 5ª. *Rendiconti.* Classe di Scienze fisiche, mathematiche e naturali (1).

T. II, 1er semestre, 1893.

Pascal (*E.*) [M₁ 6*l* 2]. — Sur les groupements triples de coniques coordonnées à la quartique plane. Note III. (8-14).

Dans la Note précédente, insérée au Tome I (1892), 2e semestre, de ces *Rendiconti*, page 417, l'auteur a étudié les six groupements triples des 315 coniques, contenant au moins un couple de première espèce. Ici il étudie ceux dont tous les couples sont de deuxième espèce. Il y en a trois genres

Tonelli (*A.*) [Q 3 *a*]. — Sur la connexion des surfaces. (15-20).

Démonstration du théorème suivant :

Une section transversale conduite par deux points d'une courbe fermée, constituant à elle seule ou avec d'autres courbes le contour d'une portion de surface, accroît d'une unité le nombre des parties du contour.

L'exclusion des surfaces unilatérales et de celles qui ont des feuillets ne suffit pas pour établir rigoureusement ce théorème. L'auteur y substitue l'hypothèse que les deux marges des sections, suivant des courbes fermées, constituent deux courbes différentes.

Pascal (*E.*) [Q 4 *a*]. — Sur une extension de la configuration des 10 droites de la surface du cinquième ordre à quintique double. (65-72).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XX, p. 66.

Dans ses Notes sur les 315 coniques coordonnées à la courbe plane du quatrième ordre, publiées dans ces *Rendiconti* (t. I, 1891), et dans celle insérée dans ce même Tome II, à la page 8, et aussi dans d'autres travaux, l'auteur a développé des conséquences de son Mémoire publié dans les *Annali di Matematica*, Tome XX : *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e 4*, pour ce qui se rapporte à celles de genre 3, comme c'est le cas pour les tangentes doubles d'une quartique plane, et pour les 27 droites d'une surface du troisième ordre. Ici il arrive à considérer les caractéristiques de genre 4, ce qui conduit à des configurations qui sont des extensions des précédentes. Les 10 droites de la surface du cinquième ordre à quintique double donnent, comme extension, une configuration de 36 plans dans l'espace à quatre dimensions, et le groupe des substitutions entre ces 36 plans est isomorphe avec celui des 27 droites.

Ricci (*G.*) [O 5 *e*]. — Sur les systèmes de coordonnées qui réduisent l'expression du carré de l'élément linéaire d'une surface à la forme $ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2)$. (73-81).

Sur une surface à courbure constante il y a un nombre ∞^2 de tels systèmes (isothermes de Liouville).

Sur les surfaces à courbure variable G qui ne soient pas applicables sur des surfaces de rotation, les lignes G = const. ne font pas partie d'un tel système.

Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces systèmes et leur détermination.

Reina (*V.*) [U]. — Union de l'Observatoire géodésique de S. Pietro in Vincoli avec les observatoires astronomiques du Collège romain et du Capitole. (81-89).

Sella (*A.*) [R 5 *a*]. — A propos de la discussion sur la forme la plus convenable à donner au corps attirant, dans la mesure de la densité moyenne de la Terre, et sur le corps d'attraction maxima par rapport à un point. (90-96).

Pascal (*E.*) [M_3 6 *g*]. — Observations sur les groupes de substitutions entre les caractéristiques impaires de genre 3 et de genre 4. (116-122).

Si l'on connaît deux racines de l'équation qui donne les 120 plans tritangents d'une sextique gauche, la connaissance des autres dépend d'une équation du 27e degré, n'ayant pas de résolvante d'un degré inférieur. Ce fait constitue une extension de celui qui se présente pour les caractéristiques de genre 3, par exemple dans le cas des 27 droites d'une surface du troisième ordre.

Tedone (*O.*) [S 2 *e*]. — Sur le mouvement d'un fluide renfermé dans une enveloppe ellipsoïdique solide. (123-130).

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'ellipsoïde intérieur. Les points qui à l'instant initial se trouvent sur l'ellipsoïde

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = k^2$$

se trouvent au temps t sur l'autre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2,$$

et l'on a

$$\frac{x}{a} = \alpha_1 \frac{x_0}{a} + \alpha_2 \frac{y_0}{b} + \alpha_3 \frac{z_0}{c},$$

$$\frac{y}{b} = \beta_1 \frac{x_0}{a} + \ldots,$$

$$\frac{z}{c} = \gamma_1 \frac{x_0}{a} + \ldots,$$

les α, β, γ étant les coefficients d'une substitution orthogonale. Étant u, v, w les composantes de la vitesse et en posant

$$\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = p,$$

$$\gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots\ldots\ldots\ldots = q,$$

$$\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \ldots\ldots\ldots\ldots = r,$$

les composantes de la rotation instantanée du fluide sont

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{b^2 - c^2}{bc} p,$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 - a^2}{ca} q,$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{ab} r.$$

L'application du principe de Hamilton conduit aux équations

$$A \frac{dp}{dt} = (C - B) qr,$$

$$B \frac{dq}{dt} = (A - C) rp,$$

$$C \frac{dr}{dt} = (B - A) pq.$$

où

$$A = b^2 + c^2,$$

$$B = c^2 + a^2,$$

$$C = a^2 + b^2.$$

c'est-à-dire aux équations du mouvement inverse autour de l'origine des coordonnées, d'un corps solide ayant pour axes principaux d'inertie les axes fixes x, y, z et A, B, C pour moments d'inertie. On a les deux intégrales

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.},$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const.},$$

dont le premier provient du principe des forces vives et le second du principe de Helmholtz sur la conservation des rotations. La solution est complétée par la détermination de x, y, z, ou, ce qui revient au même, des α, β, γ au moyen des équations

$$\frac{d\alpha}{dt} = q\gamma - r\beta,$$
$$\frac{d\beta}{dt} = r\alpha - p\gamma,$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = p\beta - q\alpha,$$

dont l'intégration se réduit aux quadratures.

La pression à l'intérieur du fluide est

$$P = \frac{1}{2}[x^2(q^2 + r^2) + y^2(r^2 + p^2) + z^2(p^2 + q^2)]$$
$$- \left(\frac{bc}{b^2 + c^2}qryz + \frac{ca}{c^2 + a^2}rpzx + \frac{ab}{a^2 + b^2}pqxy\right).$$

Pierpaoli (*N.*) [R 5 *a*]. — Sur le maximum d'attraction d'une pyramide régulière. (130-136).

L'auteur trouve l'attraction de la pyramide sur un point quelconque de sa hauteur H, en décomposant la pyramide donnée en $2n$ pyramides triangulaires. Étant V le volume de la pyramide et R le rayon du cercle circonscrit à la base, et A l'attraction totale par le sommet, la condition de maximum pour cette attraction est

$$\frac{\partial A}{\partial H}\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial V}{\partial H} = 0.$$

Pascal (*E.*) [M_3 6 *g*]. — Sur la configuration des 120 plans tritangents de la sextique gauche du genre 4. Note I. (204-210). Note II. (239-244).

Dans la représentation des caractéristiques de genre 4 au moyen des systèmes de Nœther il y a (Pascal, *Annali di Matematica*, t. XX, § 15) quatre types différents de systèmes quadruples zéro, c'est-à-dire de groupes de quatre caractéristiques dont la somme est le zéro absolu, en tout il y a 5130 de ces systèmes quadruples. Trois des plans d'un tel système forment une surface de contact à la sextique, et la caractéristique du système de cette surface est la même que celle qui correspond au quatrième plan; par cela, suivant un théorème de Nœther [*Ueber die invariante Darstellung, etc.* (*Math. Ann.*, t. XVII, § 6), les 10 points de contact des quatre plans tritangents du système

zéro sont sur une quadrique. Ainsi les 360 points de contact des 120 plans tritangents sont sur 32120 quadriques. On dit que deux de ces quadriques *se rencontrent* lorsqu'elles ont en commun des points de la courbe, autrement on dit qu'elles sont *extérieures* l'une à l'autre; pour chacune des quadriques on en a 18005 extérieures. L'auteur étudie les systèmes de quadriques extérieures l'une à l'autre. Il démontre des propriétés du sous-groupe S de monodromie qui laisse fixe une quadrique, et du sous-groupe S' qui laisse fixes une quadrique et un plan des trois systèmes d'imprimitivité. Dans la Note II l'auteur étudie les propriétés géométriques des systèmes de deux quadriques extérieures l'une à l'autre. Il y en a huit espèces.

Del Re (*A.*) [$M_2 4c$ ref. $N_3 f$]. — Sur la surface du quatrième ordre à conique double. (211-218).

La surface est considérée comme fondamentale d'un connexe point-plan (1, 1) spécialisé et comme surface polaire conjointe par rapport à un connexe plan-droite (2, 2) et à une quadrique. Cette surface peut se construire comme lieu des intersections des éléments correspondants dans une projectivité entre un système de rayons du deuxième ordre et de la première classe et une étoile de plans.

Del Re (*A.*) [N_2 1 g α]. — Sur un système de droites (3, 4). (245-252).

Ce système a été étudié par l'auteur, avec d'autres systèmes, courbes et surfaces, dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (*Su certi luoghi, etc.*) t. I, 1887, p. 172).

Étant S, S' deux étoiles réciproques à une troisième S'', a, a' deux droites correspondantes de S, S', et α' le plan correspondant de S'', le lieu des droites joignant les points $a\alpha'$, $a'\alpha'$ est le système K en question. Ici l'auteur trouve les formules pour la représentation d'un tel système sur le plan, et étudie le système linéaire de courbes représentant les surfaces réglées de K contenues dans les complexes linéaires de l'espace. Les courbes du système sont du quatrième ordre, et deux quelconques ont sept points communs en dehors des points fondamentaux. Puis il déduit les formules pour la représentation plane de certaines surfaces homaloïdes du septième ordre avec 9, du sixième avec 10, et du cinquième avec 11 droites respectivement, qui peuvent être regardées comme des projections de K sur l'espace ordinaire.

Enfin il traite le cas où K se réduit à une congruence du troisième degré.

Frattini (*G.*) [J 4 b α]. — Sur un double isomorphisme dans la théorie générale des substitutions. (253-259).

Étant S une substitution d'un groupe π, faisons correspondre à S la substitution (T, TS) qui remplace toute substitution T de π par TS; on a ainsi un groupe

$$\Pi' = (T, TS),$$

en isomorphisme oloédrique avec Π. C'est ce que l'auteur a appelé groupe *potentiel* de Π) [*I gruppi transitivi, etc.* (*Mémoires de Lincei*, 3e série,

t. XIV, 1885) et *Intorno ad alcune proposizioni, etc.* (*Ibid.*, t. XVIII, 1884).
Semblablement on obtient un autre groupe

$$\Pi'' = (T, S^{-1}T),$$

qui est aussi oloédriquement isomorphe à Π (groupe *antipotentiel* de Π). Le groupe Δ composé avec Π', Π'' est de la forme

$$\Delta = (T, S^{-1}TS_1).$$

S, S_1 étant deux substitutions quelconques de Π, qui restent les mêmes dans toutes celles de Δ, tandis que T parcourt tout Π. Les sous-groupes exceptionnels de Π correspondent univoquement aux sous-groupes de Δ renfermant le groupe des substitutions qui en Δ ne déplacent pas l'élément 1. En faisant varier S et S_1 en Π, le groupe Δ se conserve isomorphe à Π aussi bien par rapport à S que par rapport à S_1, car de

$$\Delta = (T, S^{-1}TS_1), \qquad \Delta = (T, S^{-1}TS_1),$$

on obtient

$$\Delta\Delta' = [T, (S^{-1}S_1)^{-1}T(S^{-1}S_1)];$$

c'est ce que l'auteur appelle *double isomorphisme*. Cette propriété est très utile, comme l'auteur le montre, pour donner une forme analytique fonctionnelle à l'étude des groupes de substitutions, et en particulier à la recherche des sous-groupes exceptionnels.

Tonelli (*A.*) [I 4 *b*]. — Sur la résolution de la congruence $x^2 \equiv c \pmod{p_r}$. (259-265).

Le nombre p étant premier et de la forme $2^s\alpha - 1$, les solutions sont données par

$$x = g^{\frac{\alpha+1}{2}} c^{\frac{\alpha+1}{2}} \pmod{p_r},$$

g étant un non-résidu de p et les z ne pouvant avoir d'autres valeurs que 0 ou 1. Dans le cas de $s = 2$ le fait de l'existence d'un nombre (le nombre 5) jouissant de la propriété que, augmenté de 1, il donne un résidu, et diminué de 1 un non-résidu, a permis à l'auteur de faire disparaître les z de la formule précédente.

Pour tout cela *voir* la Note du même auteur dans le Tome I, 1892, 1er semestre. Ici l'auteur, après avoir prouvé que, pour s quelconque, il existe toujours un nombre ayant la propriété indiquée, montre comment on peut l'employer pour trouver les solutions.

Lauricella (*G.*) [T 2 *a*]. — Sur l'équilibre des corps élastiques isotropes. (298-306).

Relativement à l'équilibre d'un corps élastique isotrope M. Volterra a démontré un théorème analogue à celui de Poisson concernant la fonction potentielle des corps à trois dimensions. L'auteur donne de ce théorème une démonstration qui suppose un nombre moindre de conditions pour la fonction représentant la densité.

Volterra (*V.*) [T 2 *a*]. — Sur les vibrations des corps élastiques. (389-397).

Volterra (*V.*) [T 2 *a*]. — Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un corps élastique isotrope. (549-558).

Supposons que les composantes u, v, w des déplacements soient indépendantes de z, et que les forces appliquées aux points de la masse soient nulles. Alors, a et b étant les vitesses de propagation des vibrations, on a

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Pour l'équation (3) l'auteur a donné (ces *Rendiconti*, t. I, 2e semestre) une formule comprenant celle de Poisson-Parceval, d'où il résulte que par rapport à cette équation il y a certaines surfaces coniques qui se comportent comme les lignes caractéristiques relatives aux équations différentielles à deux variables. Dans la première de ces deux Notes il étend sa méthode aux deux équations simultanées (1) et (2). Il trouve des formules donnant les valeurs de u et de v au sommet commun de deux cônes caractéristiques, au moyen des valeurs de u, de v et de leurs dérivées sur une surface placée entre les deux cônes, et qui avec chacun d'eux renferme une région adjacente au sommet.

Dans l'autre Note il trouve des formules analogues pour le cas où la surface, sur laquelle on donne les valeurs des déplacements et de leurs dérivées, est extérieure aux cônes.

Di Legge (*A.*) [U]. — Observations de l'éclipse de Soleil du 16 avril 1893, faites à l'Observatoire astronomique royal du Capitole. (406).

Del Re (*A.*) [N_2 1 ref. P 4]. — Sur les systèmes crémoniens de droites. (452-460).

Des systèmes tels que ceux-ci sont les congruences crémoniennes, étudiées par Hirst : *On crémonian congruences* (*Proceed. of the London Math. Soc.*, t. XIV, 1883). On en obtient d'autres au moyen de trois formes de deuxième espèce, dont deux sont en correspondance birationnelle réciproque avec la troisième, analoguement au cas considéré plus haut pour les formes projectives dans la Note du même auteur : *Sur un système de droites* (3, 4) (ce Tome, p. 245). L'auteur appelle des *systèmes de deuxième espèce* les systèmes considérés dans la Note présente. Il donne les formules de la correspondance et celles relatives au monoïde engendré par deux étoiles en réciprocité crémonienne. Un système crémonien de droites, de deuxième espèce,

résulte aussi en joignant les points correspondants de deux de ces monodes. On déduit de là les formules de représentation des droites du système. Suit la même recherche pour les systèmes de première espèce; puis les formules de la représentation plane de deux classes de surfaces homaloïdes, qui sont des projections sur l'espace ordinaire des deux systèmes de droites, et l'application au cas particulier que deux des étoiles soient entre elles en réciprocité linéaire et en correspondance quadratique avec la troisième. Alors les surfaces de l'une des deux classes sont de l'ordre 11, 10 ou 9, celles de l'autre sont du sixième ordre à six droites doubles et courbe double du neuvième ordre, ou bien du cinquième ordre à dix droites doubles et courbe double du cinquième ordre, ou bien du quatrième ordre à conique double.

Amodeo (*F.*) [M₁ 2 *c*]. — Courbes adjointes minima. (460-467).

L'auteur se propose de prouver l'utilité de considérer les courbes adjointes d'ordre $< m - 3$ pour une courbe C_p^m de l'ordre m et du genre p. La série canonique relative aux courbes adjointes $C^{m-3-\alpha}$ est de dimension

$$R = p - 1 + \left[m\alpha - \frac{\alpha(\alpha - 3)}{2} \right] - 1$$

et d'ordre

$$N = 2p - 2 + m\alpha.$$

ρ étant le nombre des conditions linéairement dépendantes des autres entre les $\sum \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ auxquelles doivent satisfaire les $C^{m-\alpha-2}$. Toutes les courbes pour lesquelles on a

$$m\alpha - \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} = p - m(\alpha+1) - \frac{(\alpha+1)(\alpha+4)}{2}$$

ont les courbes adjointes d'ordre $m - 3 - \alpha$ pour adjointes minima. Pour celles ou

$$p = m(\alpha+1) - \frac{(\alpha+1)(\alpha+4)}{2}$$

et

$$\rho = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \quad (\text{ou} \quad \frac{m-\alpha-3}{\alpha+1}),$$

la relation de Clifford $N \geq 2R$ prend la forme déterminée

$$N = (\alpha+2)R.$$

Ces courbes ont pour représentation canonique des courbes simples de même genre, d'ordre $(\alpha+2)R$, et normales de l'espace S_R. Par cela ces courbes peuvent se classifier en familles, dont un caractère important est le plus petit ordre des courbes adjointes.

Enriques (*F.*) [P 4 *a*]. — Sur les groupes continus de transformations crémoniennes dans le plan. (468-473).

Ces groupes peuvent se transformer birationnellement en l'un de ces types :

1° Groupe ∞^2 des homographies (et ses sous-groupes);

2° Groupe ∞^6 des transformations quadratiques qui changent en lui-même le système linéaire de coniques à deux points-base distincts, et par cela les deux faisceaux de rayons ayant ces deux points pour centres (et ses sous-groupes);

3° Groupe ∞^{n+2} des transformations de Jonquières (d'ordre n), qui changent en lui-même le système linéaire ∞^{n+1} des courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)$-ple et les $n-1$ tangentes fixes (et ses sous-groupes).

Donc la Géométrie plane, ayant comme groupe principal un groupe continu de transformations crémoniennes, coïncide avec la Géométrie projective sur le plan, ou sur une quadrique réglée, ou sur un cône rationnel normal de l'espace de $n-1$ dimensions, ou bien avec un cas particulier de l'une de ces trois géométries.

Enriques (*F.*) [P 4 *a*]. — Sur un groupe continu de transformations de Jonquières dans le plan. (532-538).

Des trois groupes typiques considérés dans la Note précédente, les deux premiers ont été étudiés. L'auteur donne la composition du troisième, qui correspond au groupe K des transformations projectives qui changent en lui-même le cône rationnel normal de l'espace S_{n+1} (en supposant que ce cône soit représenté sur le plan). Il contient trois groupes exceptionnels :

1° Celui ∞^{n+1} des homographies spéciales (avec un point uni infiniment rapproché du sommet O);

2° Celui ∞^{n+2} des homologies de centre O;

3° Celui ∞^{n+1} des homologies spéciales de centre O et hyperplans passant par O, permutables deux à deux.

L'auteur transporte ces résultats sur le plan, relativement au groupe de transformations de Jonquières qui changent en lui-même le système ∞^1, représentatif du cône, et ensuite donne l'interprétation de la géométrie du plan ayant ce groupe comme groupe principal.

Amodeo (*F.*) [P 4 *a*]. — Séries résiduelles dans la série canonique des courbes adjointes d'ordre $m-3-\alpha$. (528-532).

Dans cette Note l'auteur montre la forme que prennent relativement à ces courbes adjointes les théorèmes de réduction de Nœther, le théorème de réciprocité de Brill et Nœther et celui de Riemann-Roch.

Tout groupe G_n d'une série g'_n complète, conjointement à un point quelconque P de C_p^m qui n'appartient pas à toutes les C^{m-3} passant par G_n, détermine une série linéaire complète ayant pour point fixe P.

Lorsque $n = r$ (R la série g'_n existant sur C_p^m est déterminée par un système de courbes adjointes d'ordre $m-3-\alpha$.

Le théorème de Riemann Roch prend la forme d'égalité lorsque ρ est maximum (et en particulier pour les courbes adjointes d'ordre $m-3$).

Boggio-Lera (*E.*) [T 4]. — Sur une équation analogue à celle des aériformes, valable pour les métaux. (559-563).

M étant la masse, V le volume, K la chaleur spécifique absolue, T la température absolue, E l'équivalent dynamique de la calorie, N le nombre de molé-

cules dans l'unité de volume, ψ la force moyenne exercée sur une molécule par les autres, l'auteur déduit d'un théorème de Clausius que

$$\frac{MKTE}{V} = H,$$

où

$$H = N^2 \psi.$$

S. R.

2e semestre, Tome II; 1893.

Enriquez (*F.*). — [$M_2 1d$] Une question sur la linéarité des systèmes de courbes appartenant à une surface algébrique. (3-7).

Boggio-Lera (*E.*). — [$S 4a$] Sur le travail intérieur dans la dilatation des corps solides et sur le rapport de Poisson. (43-48).

Pagliani (*S.*). — [$T 5b$] Sur le pouvoir inducteur spécifique des corps et sur les constantes de réfraction de la lumière. (48-53).

Bianchi (*L.*). — [$B 2c$] Sur les divisions régulières de l'espace non-euclidien en polyèdres réguliers. (65-72).

Il n'y a que deux de ces divisions : celle en octaèdres et celle en dodécaèdres à dièdres droits. Dans la première les sommets du polyèdre sont à distance infinie et les angles sont nuls ; dans l'autre les angles sont droits.

Le groupe reproduisant la première de ces divisions coïncide avec le groupe des substitutions $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ à coefficients entiers complexes de Gauss et à déterminant

$$\alpha\delta - \beta\gamma = i^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, 3).$$

Le groupe reproduisant l'autre division est engendré par les trois substitutions élémentaires

$$z' = \frac{\varepsilon^2 z}{\varepsilon^2}, \qquad z' = \frac{(\varepsilon - \varepsilon^2) z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z + (\varepsilon - \varepsilon^2)}, \qquad z' = \frac{\sqrt{3} + i}{(\sqrt{3} - i) z},$$

où

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Del Re (*A.*). — [$M_2 6b 2$] Sur la surface du cinquième ordre avec cinq points triples et une cubique double. (99-107). Note II. (138-146).

Surface représentée par

$$x_1 = \frac{\xi_1}{C_{11} - \lambda_1 \tau}, \qquad x_2 = \frac{\xi_2}{C_{22} - \lambda_2 \tau}, \qquad x_3 = \frac{\xi_3}{C_{33} - \lambda_3 \tau}, \qquad x_4 = \frac{\xi_4}{C_{44} - \lambda_4 \tau},$$

les C_{ik} étant des formes cubiques par rapport à deux paramètres λ, μ, données par

$$C_{ik} = \frac{\partial \Omega}{\partial c_{ik}},$$

où

$$\Omega = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}$$

et

$$c_{ik} = \lambda f_{ik} + \mu \xi_i \xi_k;$$

τ un autre paramètre et ξ_i les coordonnées d'un point fixe.

La surface est la polaire conjointe du pôle ξ_i par rapport au faisceau de quadriques

$$c_{ik} = \lambda f_{ik} + \mu \xi_i \xi_k = 0$$

et à la quadrique

$$\sum_1^4 \frac{x_i^2}{\lambda} = 0.$$

Le point ξ_i est triple pour la surface.

La cubique double est la transformée de la droite double du cône cubique tangent en ξ_i, par la transformation crémonienne

$$x_i x_k^2 = \xi_k^2 \xi_i.$$

Les autres quatre points triples sont les sommets du tétraèdre fondamental.

Droites de la surface : génération et propriétés.

Cette surface peut être obtenue de cinq manières différentes au moyen d'un faisceau de quadriques à base décomposée et d'un faisceau de cônes quadriques, en correspondance (1, 2).

Autres générations et équation de la surface dans la note II. Connexes point-plan (1, 2) dont la surface peut être regardée comme fondamentale. *Voir* une autre Note dans le Tome III, 1894, 1er semestre, page 11.

Ricci (*G.*). — [O 5*l*] A propos d'un Mémoire de M. Kœnigs sur les lignes géodésiques. (146-148).

Voir la réponse de M. Kœnigs à la page 336.

Brioschi (*F.*). — [F 5*b*] Sur les équations modulaires. (185-192).

Développement et complètement de quelques points des *Fragments relatifs à la transformation* contenus dans le Tome troisième du *Traité* de Halphen.

Castelnuovo (*G.*). — [$M_2$8*a*] Sur la rationalité des involutions planes. (205-209).

Soit F une surface dont les points ont des coordonnées fonctions rationnelles de deux paramètres α, β. En considérant ces derniers comme coordonnées des points d'un plan, on a une correspondance entre les points de F et les groupes de n points du plan, groupes constituant une involution plane d'ordre n. Même lorsque $n = 1$, l'auteur démontre que la surface F est rationnelle, ou, ce qui

revient au même, *toute involution plane* est rationnelle. Il prouve d'abord que tout système linéaire normal sur F a la série caractéristique complète ; puis il démontre qu'il y a sur F un système linéaire [Γ] ayant la dimension supérieure au genre. Après cela, trois autres théorèmes relatifs au système [Γ] adjoint de [Γ], lui servent à établir une méthode de réduction pour conclure la rationalité de la surface.

Sandrucci (*A.*). — [S5*a*] Sur les expériences récentes de G.-A. Hirn et sur les lois de l'écoulement des gaz. (209-216).

Millosevich (*E.*). — [U] Eléments elliptiques et perturbations de la petite planète (306) *Unitas*. (236-240).

Millosevich (*E.*). — [U] Sur la nouvelle comète Brooks. (240).

Morera (*G.*). — Un théorème fondamental de Mécanique. (245-246).

Etant X, Y, Z les composantes de la force agissant sur un point (x, y, z) d'un système, et $\delta x, \delta y, \delta z$ celles du déplacement dans le temps δt ; X, Y, Z les composantes d'une autre force agissant sur le même point et $\delta x, \delta y, \delta z$ celles du déplacement dans le même temps δt, on a

$$\Sigma_i X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \Sigma_i X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z.$$

Sandrucci (*A.*). — [S4*a*] Sur une formule de Thermodynamique et sur le travail thermique intérieur dans les corps solides et liquides. (252-259).

Enriques (*F.*). — [M_1 1 *f* ref. M_2 8] Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes hyperelliptiques. (281-287).

Une surface à sections planes hyperelliptiques de genre $p > 1$ est :

1° Une surface réglée hyperelliptique de genre p ;

2° Ou bien une surface rationnelle renfermant un faisceau de coniques.

Une variété de trois dimensions dont les sections avec les S_r de S_r sont hyperelliptiques de genre $p > 1$ est :

1° Un système simplement infini de plans, de genre p ;

2° Ou bien une variété rationnelle renfermant un faisceau de quadriques.

Reina (*V.*). — [U 10*a*] Sur la détermination des rayons de courbure d'une surface par des mesures locales. (287-295).

Millosevich (*E.*). — [U] Sur la planète (306) *Unitas* en troisième opposition. (336).

Kœnigs (*G.*). — [O5*l*] Réponse à la Note de M. le professeur Gregorio Ricci, du 3 septembre 1893. (336-337).

La Note de M. Ricci est à la page 146. *Voir* une autre communication de M. Ricci à la page 338.

Ricci (*G.*). — [O5*l*] Quelques observations à propos de la réponse précédente de M. Kœnigs. (338-339).

Voir à la page 336.

1er semestre. Tome III; 1894.

Bianchi (*L.*). — [B2*c*] Sur les formes quaternaires quadratiques et sur les groupes polyédriques. (3-12).

Les substitutions linéaires réelles à déterminant $+1$, transformant en elle-même la forme

$$f = px_1^2 + qx_2^2 + rx_3^2 + sx_4^2 \quad (p, q, r, s, \text{ premiers}),$$

ont été déterminées par l'auteur dans un Mémoire des *Annali di Matematica* (1893). Les nouvelles variables x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 sont exprimées par les anciennes avec des coefficients qui dépendent de quatre quantités complexes a, b, c, d et de leurs conjuguées a_0, b_0, c_0, d_0, étant

$$(a - b)(a_0 - b_0) + (c + d)(c_0 - d_0) = 1.$$

A la substitution quaternaire on fait correspondre celle sur la variable complexe z

$$(1) \qquad z' = \frac{(a + b)z + (c - d)}{(c_0 + d_0)z + (a_0 + b_0)};$$

analoguement aux substitutions linéaires à déterminant -1 de la forme quaternaire correspondent les substitutions linéaires de deuxième espèce

$$(2) \qquad z' = \frac{(a + b)z_1 + (c - d)}{(c_0 + d_0)z_1 + (a_0 - b_0)}.$$

La recherche du groupe de substitutions reproduisant la forme f se réduit à celle du sous-groupe G dont les substitutions sont congruentes à l'identité (mod 2) et qui ont le dernier coefficient positif. A G correspond un groupe polyédrique Γ de substitutions (1), (2), dont la détermination dépend de celle du sous-groupe exceptionnel Γ′ formé par la combinaison des réflexions de Γ. Par cette voie l'auteur établit huit types de substitutions, formant ensemble un groupe, qui coïncide avec Γ, ou dont Γ peut se déduire.

Pincherle (*S.*). — [H12*b*] Sur les équations aux différences. (12-17).

Une *forme linéaire aux différences* est une expression

$$F(f) = f_{n+r} - a_{1,n} f_{n+r-1} - \ldots - a_{r-1,n} f_{n+1} - a_{r,n} f_n$$

où r est appelé l'*ordre* de la forme. Le *produit* $FG(f)$ de deux formes $F(f)$, $G(f)$ est la forme qu'on obtient en mettant G en F au lieu de f; ce produit est associatif mais il n'est pas commutatif. On peut toujours trouver une forme H telle qu'on ait

$$F - HG = R,$$

R étant d'ordre inférieur à F et G; lorsque $R = 0$ on dit que F est *divisible* par G. Cela posé, la condition pour que F soit divisible par une forme du premier ordre est que l'intégrale de celle-ci soit une intégrale de F. On en déduit la décomposition d'une forme en un produit de formes du premier ordre. La recherche de ces facteurs linéaires conduit à des relations qui constituent une généralisation des propriétés des fractions continues. En supposant que les coefficients de la forme soient des polynômes rationnels entre y ou x, on dit *irréductible* une forme n'ayant pas de diviseurs rationnels en x. Moyen de trouver les conditions pour qu'une forme à coefficients linéaires en x ait des intégrales indépendantes de x. (*Voir* aussi la Note à la page [illegible]).

Millosevich (*E.*). — [U] Sur les découvertes des petites planètes entre Mars et Jupiter. (18-23).

Castelnuovo (*G.*). — [M_2 1 *d*] Sur les surfaces algébriques admettant un système doublement infini de sections planes réductibles. (22-25).

Les surfaces (irréductibles) ayant la propriété mentionnée dans le titre sont des surfaces réglées, ou bien la surface de Steiner.

Démonstration de ce théorème, énoncé par Kronecker dans une séance des Lincei (1886).

Castelnuovo (*G.*). — [M_2 8 *c*] Sur les surfaces algébriques dont les sections planes sont des courbes elliptiques. (59-61).

Toute surface à sections elliptiques est réglée ou rationnelle.

Pincherle (*S.*). — [H 12 *b*] Sur les équations aux différences. (99-105).

Applications de la décomposition d'une forme aux différences en facteurs (symboliques) linéaires (*voir* la Note à la page 12). Ces applications se rattachent à la théorie des fractions continues et à leurs relations avec les séries.

Bertini (*E.*). — [D 5 *b*] Sur les surfaces de Riemann. (106-110).

L'auteur indique une voie plus simple pour déterminer une surface riemannienne considérée par Lüroth (*Math. Ann.*, t. IV, p. 181) et Clebsch (t. VI, p. [illegible]), et employée par Picard (*Traité d'Analyse*, t. II, p. [illegible]).

Bianchi (*L.*). — [O5*fα*] Applications géométriques de la méthode des approximations successives de Picard. (143-150).

Deux courbes C, C′ étant données, de torsion $+1$ et -1 respectivement, et passant par un point où elles ont même plan osculateur et tangentes distinctes, il y a une surface pseudo-sphérique de rayon $+1$ qui les contient comme courbes asymptotiques. Cette surface est unique si l'on pose la condition que les courbes et la surface soient analytiques. Ce théorème est équivalent à cet autre :

L'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z$$

admet une solution qui pour $y = 0$ *se réduit à une fonction arbitraire* $\varphi(x)$, *et pour* $x = 0$ *à une autre* $\psi(y)$. C'est ce théorème que l'auteur démontre par la méthode de Picard. Puis il fait l'application de ce théorème à quelques questions relatives aux déformations d'une surface pseudo-sphérique, dans lesquelles une asymptotique reste rigide.

Padova (*E.*). — [R8*aα*] Sur le mouvement de rotation des corps rigides. (161-165).

En posant la condition que la fonction potentielle des forces soit réelle, on ne peut avoir d'autre intégrale que celle des aires et celle des forces vives. On a une troisième intégrale première algébrique en ôtant cette condition.

Pizzetti (*P.*). — [U10*a*] Sur l'expression de la gravité à la surface du géoïde supposé ellipsoïdique. (166-172).

Le potentiel, et par conséquent la gravité, peut se déterminer indépendamment de toute hypothèse par la distribution de la densité, en connaissant la masse totale et une surface d'équilibre. Cela a été démontré par Stokes en négligeant des quantités du deuxième ordre de petitesse par rapport à l'aplatissement terrestre. L'auteur trouve l'expression exacte du potentiel en supposant que le géoïde soit un ellipsoïde de révolution aplati. *Voir* l'autre Note à la page 230.

Pierpaoli (*V.*). — [R5*aα*] Attraction d'une pyramide droite à base régulière sur le centre de la base. (173-176).

Valeur du rapport entre la hauteur et le périmètre de la base, pour laquelle cette attraction est un *maximum*.

Millosevich (*E.*). — [U] Sur l'orbite de la petite planète (303) *Josephina* au moyen de trois oppositions. (229-230).

Pizzetti (*P.*). — [U10*a*] Sur l'expression de la gravité à la surface du géoïde, supposé ellipsoïdique. (230-238).

Note faisant suite à la précédente (p. 166). Ici l'on suppose que l'ellipsoïde soit quelconque et que l'un des axes soit celui de la rotation diurne.

Voir aussi la Note de M. Morera à la page 371.

Somigliana (*C.*). — [T2*a*] Sur la loi de rationalité par rapport aux propriétés élastiques des cristaux. (238-246).

Un axe de symétrie élastique, dont la période n'est pas 2, 3 ou 4, ne diffère pas d'un axe d'isotropie. Par cela la loi de rationalité résulte des principes de la théorie de l'élasticité, et il n'est pas nécessaire de l'admettre comme un postulatum dans cette théorie.

Tedone (*O.*). — [T9*a* ref. R8*c*] Sur la courbe élastique. (265-271).

Il y a, entre le problème de la courbe élastique et celui du mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe, des relations exprimées par un théorème de Kirchhoff. L'auteur reprend en examen cette question et la tractation qui en a été faite par Halphen (*Traité des fonctions elliptiques*, 2e partie, p. 142), et trouve les formules donnant les coordonnées d'un point de la courbe.

Millosevich (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle comète Denning. (313).

Cesàro (*E.*). — [O5*c*, *f*] Les nombres de Grassmann en géométrie intrinsèque. (367-371).

Les conditions pour que x, y, z représentent les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport à trois axes rectangulaires dont l'axe z soit normal à la surface dans l'origine (mobile), sont

$$\frac{dx}{ds} = \mathfrak{T}z - \mathfrak{G}y = 1, \qquad \frac{dy}{ds} = \mathfrak{G}x - \mathfrak{C}z, \qquad \frac{dz}{ds} = \mathfrak{C}y - \mathfrak{T}x,$$

$\mathfrak{T}$ étant la courbure normale, $\mathfrak{G}$ la courbure géodésique et $\mathfrak{C}$ la torsion géodésique d'une courbe de la surface qui touche l'axe des x. Par l'introduction des unités i, j, k satisfaisant aux conditions

$$i^2 = j^2 = k^2 = 0,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

on peut écrire les relations précédentes sous la forme :

$$i\frac{dx}{ds} = i\mathfrak{C}.ix + k\mathfrak{G}.jx - j\mathfrak{T}.kx = i,$$

$$j\frac{dy}{ds} = k\mathfrak{G}.ix - j\mathfrak{T}.jx + i\mathfrak{C}.kx,$$

$$k\frac{dz}{ds} = j\mathfrak{T}.ix - i\mathfrak{C}.jx = k\mathfrak{G}.kx,$$

et les résumer en écrivant

$$\frac{d\Omega}{ds} = \omega\Omega - i$$

où

$$\Omega = ix + jy + kz, \qquad \omega = i\mathfrak{C} + j\mathfrak{T} + k\mathfrak{G}.$$

En considérant deux courbes sur la surface, dont l'une touche l'axe x et l'autre l'axe y à l'origine, soient

$$ds_1 = Q_1 dq_1, \quad ds_2 = Q_2 dq_2$$

leurs axes élémentaires et q_1, q_2 les paramètres des deux courbes dans le système orthogonal ; posons

$$\omega_1 = i\bar{\omega}_1 + j\bar{\omega}_1 + k\Omega_1, \quad \omega_2 = i\bar{\omega}_2 + j\bar{\omega} + k\Omega_2,$$

les indices 1 et 2 étant relatifs aux deux courbes : alors la formule

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial s_2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial s_1} + \omega_1\Omega_1 + \omega_2\Omega_2 = \omega_1\omega_2$$

résume les trois formules de Codazzi.

Morera (*G.*). — [U 10*a*] Quelques considérations au sujet de la Note de M. le professeur Pizzetti « Sur l'expression de la gravité à la surface du géoïde supposé ellipsoïdique ». (371-377).

La Note de M. Pizzetti est à la page 360.

Favero (*G.-B.*). — [T 7*c*] Quelques observations sur la théorie des moteurs électriques. (1re Partie : 418-427 ; 2e Partie : 523-535).

Millosevich (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle comète Gale. (428).

Millosevich (*E.*). — [U] Observations historiques et critiques sur la découverte des taches solaires, à propos de la brochure du docteur Gerhard Berthold intitulée : « Der Magister Johann Fabricius und die Sonnenflecken, etc. ». (428-433).

Sella (*A.*). — [R 5*aα*] Encore sur la forme du corps attirant, dans la mesure de la densité moyenne de la Terre, et sur le corps dont l'attraction sur deux points est un maximum. (436-442).

Castelnuovo (*G.*). — [M 21*d*] Sur les surfaces algébriques contenant un réseau de courbes hyperelliptiques. (473-481).

Si une surface renferme un réseau de courbes C hyperelliptiques du genre p, tel que le groupe des intersections variables de deux C se compose de $\nu \geq p$ couples de la série g_2^1 qui se trouve sur les C, cette surface peut se représenter biunivoquement :

(α) sur un plan,

(β) ou sur une surface réglée hyperelliptique de genre p,

les C correspondant à des directrices;

(2) ou sur une surface réglée elliptique, les C correspondant à des courbes qui coupent les génératrices en $\frac{v+1}{2}$ ou $\frac{v+2}{2}$ points.

Ce dernier cas ne peut se présenter que lorsque $v = p$, ou lorsque $v = 4$ et $p = 3$.

Enriques (*F.*). — [M_2 1 *f*] Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes elliptiques. (481-487).

Enriques (*F.*). — [M_2 1 *f*] Encore sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes elliptiques. (536-543).

Ces systèmes, qu'on suppose d'ordre $n \geq 3$, c'est-à-dire que trois surfaces variables se rencontrent en n^3 points, peuvent se classifier en les réduisant par des transformations birationnelles aux trois types suivants :

1° Pour $n = 4, 5, 6, 7, 8$, un système de surfaces cubiques ;

2° Pour $n = 7, 8$, aussi le système ∞^1 ou ∞^2 des quadriques ayant un point de base, ou dépourvu de point de base ;

3° Pour $n = 8$, aussi le système ∞^1 des surfaces du quatrième ordre à point triple de base, deux droites doubles de base passant par ce point, et le même cône quadrique tangent en ce point.

Ces conclusions sont tirées d'une étude que l'auteur fait en général sur les variétés d'un espace S_n, où il démontre d'abord que les variétés à sections hyperplanaires elliptiques ou contiennent un faisceau elliptique de plans, ou bien sont rationnelles ; et ensuite, il étudie les variétés normales de S_{n+1}, dont la représentation sur S_n donne les types cherchés.

Bianchi (*L.*). — [O6*k*] Sur l'interprétation géométrique du théorème de Moutard. (565-573).

D'une surface S quelconque on considère deux différentes déformations infinitésimales, pour lesquelles on construit les respectives surfaces *transformées* S_1, S_2 suivant la construction indiquée par l'auteur dans ses *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, E. Spœrri, 1894) ; cette construction consiste à tirer, par tout point de S et dans le plan tangent, le rayon normal à la direction du déplacement : on obtient ainsi une congruence W, dont S est une nappe de la surface focale ; l'autre nappe est la transformée S_1. Il y a une simple infinité de surfaces S, qu'on peut obtenir par une quadrature, dont chacune admet avec S le même couple de transformées S_1, S_2.

En appliquant ce théorème aux congruences W dont les deux nappes de la surface focale ont courbure égale aux points correspondants, on trouve que pour ces congruences ont lieu des propriétés déjà signalées par l'auteur pour les congruences pseudosphériques.

2e semestre, Tome III; 1894.

Leoncini (*M.*). — [R7*a*] Sur quelques transformations des équations de la dynamique du point. (3-11).

1° Cas où les forces ont un potentiel :

2° Cas des forces centrales.

Dans le cas où il y a un potentiel, si l'on veut qu'à tout mouvement sur une surface S corresponde un mouvement sur une autre surface S_1 sous l'action de forces qui ne dépendent que de la position du point, il est nécessaire et suffisant que des deux systèmes orthogonaux de lignes qui se correspondent sur les deux surfaces, celui de S soit isotherme, et celui de S_1 ait la forme de Liouville.

Del Re (*A.*). — [$M_2$6*b*α] Sur la surface du cinquième ordre avec cinq points triples et une cubique double. (11-16).

Suite de la Note de même titre, insérée au Tome II, 1893, 2e semestre, page 138. Les cinq connexes, dont la surface est fondamentale; générations de la surface par formes projectives; autre équation de la surface; invariants absolus.

Sella (*A.*). — [R5*a*α] Sur les corps d'attraction maximum. (47-53).

Une attraction A étant de dimension 1 par rapport aux longueurs, et un Volume V de dimension 3, on a

$$A = \lambda V^{\frac{1}{3}}.$$

La condition pour que, V étant constant, A soit maximum est celle qui a lieu pour le maximum de λ, ce qui entraîne

$$\frac{\partial A}{\partial V} = \frac{A}{3V}.$$

Applications à des cas où la forme du corps dépend de deux paramètres.

Bianchi (*L.*). — [O5*i*] Sur les surfaces dont les plans principaux ont constant le rapport des distances à un point fixe. (77-84).

Les surfaces mentionnées dans le titre, dont celles étudiées par M. Guichard (*Comptes rendus*, t. CXVI, 1893, p. 78) sont un cas particulier (le rapport = 1), rentrent comme cas particulier dans celles étudiées par l'auteur dans le Tome XVIII, 4e série (1890), des *Annali di Matematica*, qui sont divisées en parallélogrammes infiniment petits, équivalents par le double système isogonal des lignes de courbure sous un certain angle constant. L'auteur donne aussi une construction par laquelle, en connaissant une telle surface, on peut en déduire une double infinité.

Ricci (*G.*). — [O6*p*] Sur l'équation de condition pour les paramètres des systèmes de surfaces appartenant à un système triple orthogonal. (93-96).

Transformée en coordonnées générales de l'équation de Weingarten. Condition pour qu'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre ait deux intégrales orthogonales. Tout cela, par les méthodes du calcul différentiel absolu.

Pittarelli (*G.*). — [O4*f*] Sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées contenues dans une congruence linéaire. (111-116).

Les propriétés démontrées par l'auteur dans ces *Rendiconti*, 4e série, t. VII, 1891, 1er semestre, p. 391 et p. 482, pour les surfaces réglées algébriques et rationnelles, sont ici étendues à des surfaces réglées quelconques, même transcendantes, pourvu qu'elles soient contenues dans une congruence linéaire. On a toujours une infinité de transformations par dualité de la surface en elle-même, pour lesquelles une asymptotique n'est pas changée.

Pittarelli (*G.*). — [O4*f*] Autres observations sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées appartenant à une congruence linéaire. (148-152).

Suite à la Note précédente. Cas où les directrices de la congruence sont coïncidentes.

Siacci (*F.*). — [T2α ref. R1*e*] Sur les tensions dans un système élastique articulé. (205-214). Note II. (245-255).

Dans un système élastique articulé isolé, en équilibre sous l'action de forces appliquées aux sommets, la forme des carrés des tensions des tiges, divisés par les coefficients de résistance, est un minimum, compatiblement avec les équations d'équilibre, lorsque les longueurs naturelles des tiges sont les projections des côtés d'un polygone complet sur les tiges tendues.

Dans la Note II, on suppose que le système soit appuyé.

De Paolis (*R.*). — [P1*b*] Théorie générale des correspondances projectives et des groupements projectifs dans les formes fondamentales à deux dimensions. (225-229).

Ces recherches constituent la troisième Partie du grand travail de De Paolis : *Fondamenti di una teoria, puramente geometrica, delle curve e delle superficie*, dont les deux premières Parties sont constituées par le Mémoire : *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* (*Memorie della Società italiana delle Scienze*, serie 3a, t. VII, 1890), et par l'autre : *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1a specie* (*Memorie nella R. Accademia delle Scienze*

di Torino; serie 2ᵉ, t. XLII, 1892). Cette troisième Partie est restée incomplète par la mort de l'auteur.

Une Note ajoutée par M. Segre rend compte de quelques résultats contenus dans les manuscrits laissés par l'auteur.

Pittarelli (*G.*). — [O4*f*] Sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées algébriques de genre quelconque, faisant partie d'une congruence linéaire. (229-236).

Note se rattachant aux deux autres insérées dans ces *Rendiconti*, 4ᵉ série, t. VII, 1891, 1ᵉʳ semestre, p. 391 et 48[illegible], où l'auteur a étudié le cas des surfaces algébriques et rationnelles.

Pittarelli (*G.*). — [O4*f*] Correction à la Note : Sur les lignes asymptotiques d'une classe de surfaces gauches de genre zéro. (264).

La correction est relative à la Note de ces *Rendiconti*, 4ᵉ série, t. VII, 1891, 1ᵉʳ semestre, p. 391, et regarde le genre de la courbe asymptotique.

Cesàro (*E.*). — [T2*a* ref. Q2] Sur les équations de l'élasticité dans les hyperespaces. (290-294).

Millosevich (*E.*). — [U] Observations de la planète BE 1894 et réflexions sur son orbite. (367-368).

Besso (*D.*). — [H5*f*] Sur certaines équations différentielles hypergéométriques. (393-400). S. R.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXV, 1909 (¹).

Ritz (*Walter*). — Sur une nouvelle méthode pour la résolution de certains problèmes de variation de la Physique mathématique. (1-61).

Lorsqu'il s'agit de représenter une fonction réelle $w(x, y, \ldots)$ dans un domaine donné, on peut se servir avantageusement des développements en polynomes, séries de Fourier, etc., pourvu que la fonction satisfasse dans tout le domaine à certaines conditions de continuité, etc., qui sont remplies en général. Mais si w est l'intégrale d'une équation différentielle donnée, le calcul des coefficients des développements ne réussit que dans le cas très particulier où une intégration par des séries de puissances très rapidement convergentes est possible. L'auteur se propose de trouver dans le cas général la représentation

(¹) Voir *Bulletin*, XXXIV₂, p. 5.

approchée de l'intégrale par un polynome de degré n (ou une série de Fourier, etc.) avec une précision croissant indéfiniment avec n. D'une manière générale il cherche une expression approchée w_n de la forme

$$(1) \qquad w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n,$$

où les ψ sont des fonctions données à l'avance et qui dépendent de la nature de la question.

Dans ce Mémoire l'auteur indique une méthode pour la détermination des a_i dans le cas où il s'agit d'un problème de variation. Si, par exemple, il s'agit d'intégrer l'équation différentielle qui donne les extrémales de l'intégrale

$$(2) \qquad J = \int_a^b f(x, w, w', \ldots, w^{(p)})\, dx,$$

on n'a qu'à remplacer w par l'expression (1) et calculer l'extremum de la fonction $J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ainsi obtenue. Si J est une forme définie il n'y a qu'un extremum; la fonction w_n ainsi obtenue, ou du moins certaines intégrales indéfinies portant sur w_n, converge uniformément dans tout le domaine considéré. Si les ψ possèdent la propriété que chaque fonction w qui satisfait aux conditions de continuité et aux conditions aux limites imposées à l'intégrale cherchée est représentable, ainsi qu'un nombre déterminé de ses dérivées par une expression de la forme (1), et cela avec une approximation aussi grande qu'on veut, alors w_n converge vers la solution cherchée.

La méthode s'applique naturellement au cas de plusieurs variables indépendantes; l'auteur traite quatre exemples :

1-13. *Déformation d'une plaque élastique encastrée sur son pourtour et soumise à une pression normale donnée.* Ce problème revient à l'intégration de l'équation

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y),$$

où la fonction inconnue w satisfait, sur le contour du domaine donné R, aux conditions

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

et où w, ainsi que ses dérivées jusqu'au quatrième ordre, est finie et continue dans R et sur L. La fonction cherchée w rend extremum l'intégrale

$$J = \int_L\int_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - f(x, y)\, w\right] dS.$$

L'intégrale J possède une borne inférieure (qui peut d'ailleurs ne pas être atteinte); elle reste en effet supérieure à

$$J_n = \int_L\int_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w_1)^2 - f w_1\right] dS = \int_L \left[w_1 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_1}{\partial n}\Delta w_1\right] ds,$$

où l'on a posé

$$w_1 = a_1 b_1 - \frac{1}{8\pi}\int_R\int r^2 \log r\, f(x, y)\, dS; \qquad r = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}$$

L'auteur introduit alors une suite infinie de fonctions

$$\psi_1(x, y), \quad \psi_2(x, y), \quad \ldots \quad \psi_n(x, y), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles sont dans le domaine R et sur son contour L, finies et continues ; il en est de même de leurs dérivées *principales*

$$\frac{\partial x^{m+n}}{\partial x^m \, \partial x^n} \quad (m = 0, 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, 2, 3);$$

2° Sur L on a, pour chaque valeur de n, $\psi_n = 0$, $\frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0$;

3° Soit ζ une fonction quelconque finie et continue ainsi que ses dérivées principales, nulle partout ailleurs que dans un rectangle ρ, tout entier intérieur à R, et dont la position et la grandeur restent arbitraires. On suppose qu'on peut choisir l'indice m et les coefficients α_i de manière qu'en posant

$$\zeta_m(x, y) = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \ldots + \alpha_n \psi_m,$$

la fonction $\zeta - \zeta_m$ et ses dérivées principales restent dans R et sur L inférieures en valeur absolue à un nombre donné aussi petit qu'on veut ε :

4° Une somme de la forme ζ_m ne peut s'annuler identiquement dans R que si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Cela étant l'auteur détermine $a_1, a_2, \ldots, a_m$ par la condition que la fonction

$$w_m = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \ldots + a_n \psi_n$$

rende minimum l'intégrale J, par rapport à toutes les fonctions de même forme. Cela est possible, m étant donné, d'une manière et d'une seule. La valeur J_m^0 du minimum décroît constamment quand m augmente et tend vers une limite J^0.

L'inégalité

$$\int_R \int_R [\Delta(w_{m+n} - w_m)]^2 dS \leqq \varepsilon,$$

démontrée par l'auteur pour $m \geqq M$, n quelconque, montre que la fonction w_m converge uniformément dans R vers une fonction $w(x, y)$ continue dans R et nulle sur elle. De même

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_\alpha^y w_m \, dx, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \int_\beta^x w_m \, dy$$

convergent uniformément vers

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_\alpha^y w \, dx, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \int_\beta^x w \, dy.$$

Les résultats précédents sont indépendants de l'hypothèse 3° faite sur les ψ_i. Si l'on tient compte maintenant de cette hypothèse, la fonction limite w est la solution cherchée. L'auteur introduit pour le démontrer une fonction U_m et

une fonction U satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2 \partial y^2} = w_n, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial y^2} = f;$$

la fonction U_n converge uniformément vers une fonction U, et l'on a pour toute fonction ζ

$$\int\int_R (\Delta\Delta U - f)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2}\, dS = 0.$$

Un lemme de Hilbert permet de déduire de U une fonction V satisfaisant à

$$\Delta\Delta V = f(x, y),$$

d'où enfin l'on déduit $\Delta\Delta w = f(x, y)$.

En toute rigueur on n'est pas sûr que $\frac{\partial w_n}{\partial x}$ converge vers $\frac{\partial w}{\partial x}$.

Pour appliquer la méthode précédente l'auteur suppose, ce qui est possible dans un très grand nombre de cas, que le contour L puisse être représenté par une équation $F(x, y) = 0$, F étant fini et continu ainsi que ses dérivées principales, dans R et sur L, ne s'annulant pas à l'intérieur de R, et enfin satisfaisant sur L à la condition $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$, sans que $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} = 0$, ... s'annulent identiquement sur L. L'auteur passe en revue les différents développements possibles de la fonction $\frac{\zeta}{F} = P$, en séries de Fourier, en séries de polynomes de Legendre, etc. Il traite enfin en détail le cas où la plaque a la forme d'un carré de côté a.

Dans ce cas particulier il introduit la fonction ζ de la forme

$$\zeta_{m,n} = \xi_m(x)\,\xi_n(y),$$

où $\xi_m(x)$ désigne la $m^{\text{ème}}$ solution de l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = u\lambda,$$

solution assujettie à s'annuler ainsi que sa dérivée première pour $x = 0$ et $x = a$ et à rendre de plus l'intégrale $\int_0^a u^2\, dx$ égale à a. Il calcule enfin numériquement les valeurs des coefficients a pour w_1, w_2, w_3 dans le cas où f est constante.

13 [illegible]. *L'équation potentielle. Le principe de Dirichlet.* — La deuxième application que l'auteur donne de sa méthode générale se rapporte au principe de Dirichlet. Il se propose la recherche d'une fonction $u(x, y)$, finie et continue ainsi que ses dérivées du premier ordre dans un domaine R, satisfaisant dans R à l'équation $\Delta u = 0$ et prenant sur le contour de R des valeurs données.

Il suppose que l'équation du contour puisse se mettre sous la forme $F(x, y) = 0$, où F ne s'annule pas à l'intérieur et est, ainsi que ses dérivées principales, finie et continue dans R et sur L ; de plus, on n'a pas identiquement $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ sur le contour.

Il suppose de plus que les valeurs que doit prendre la fonction u sur L sont celles que prend une fonction $Q(x, y)$, finie et continue dans R ainsi que ses dérivées du premier ordre et telle que ΔQ soit fini.

En posant $u - Q = w$, la fonction w s'annule sur L et satisfait dans R à une équation $\Delta w = f(x, y)$; elle rend extremum l'intégrale

$$J = \int\int_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - 2 w f(x, y) \right] dS.$$

La méthode de l'auteur le conduit à une suite de fonctions w_m; les intégrales $\int_0^y w_m dy$, $\int_0^y w_m dx$ convergent uniformément vers des fonctions limites continues, ainsi que l'intégrale $\int w_m ds$ étendue à un petit arc de courbe l. Le lemme de Hilbert permet de démontrer que la fonction

$$w = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{m = \infty} \int_y^{y+\varepsilon} w_m(x, y)\, dx = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{m = \infty} \int_y^{y+\varepsilon} w_m(x, y)\, dy$$

satisfait aux conditions demandées.

15. *Équations différentielles linéaires à coefficients variables.* — L'auteur applique sa méthode à l'équation différentielle linéaire qui donne les extrémales de l'intégrale

$$J = \int_a^b [f_1(x) y'^2 + 2 f_2(x) y y' - f_3(x) y^2]\, dx.$$

Il cherche à déterminer une fonction y finie et continue ainsi que sa dérivée y', dans l'intervalle ab, prenant pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs données A et B et rendant J minimum. Il suppose que la forme sous le signe $\int$ est définie et positive.

Il arrive, dans ce cas, à une suite u_m qui converge uniformément vers une fonction limite u, satisfaisant à la question.

16. *La corde vibrante.* — L'auteur montre comment sa méthode peut être numériquement appliquée, même à des cas où la convergence n'est pas assurée; il cherche une représentation approchée par des polynomes des solutions de l'équation des cordes vibrantes.

David (*Ludwig v.*). — Sur la théorie de l'itération de Schapira. (62-74).

Schapira, généralisant un algorithme de Lagrange-Gauss, a défini au moyen de l'identité

$$\begin{aligned} x^n - (n)_1^{(i+1)} a_1 x^{n-1} + (n)_2^{(i+1)} a_2^2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n (n)_n^{(i+1)} a_n^n \\ = (x - {}^{(i)}a_1)(x - {}^{(i)}a_2) \ldots (x - {}^{(i)}a_n), \end{aligned}$$

un procédé permettant de passer d'un système ${}^{(i)}a_1, {}^{(i)}a_2, \ldots, {}^{(i)}a_n$ de nombres positifs à un autre système ${}^{(i+1)}a_1, \ldots, {}^{(i+1)}a_n$. Si le système initial ${}^{(0)}a_1, \ldots, {}^{(0)}a_n$ est formé de nombres positifs quelconques, Schapira a démontré, pour

$n = 2, 3, 4, 5$, l'existence d'une limite pour $a_\nu^{(i)}$ lorsque i augmente indefiniment, et de plus il a montré qu'on a

$$\lim {}^{(i)}a_1 = \lim {}^{(i)}a_2 = \ldots = \lim {}^{(i)}a_n.$$

Dans une Communication antérieure l'auteur a généralisé ce résultat pour n quelconque. Dans le présent article il considere le cas où les ${}^{(0)}a_\nu$ sont complexes et arrive à un theoreme analogue.

L'existence des limites pour $|{}^{(i)}a_\nu|$ repose sur le théorème suivant :

Si $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$ sont des suites de nombres positifs telles que l'on ait, pour chaque valeur de i, au moins un indice m_i satisfaisant aux conditions

$$a_{m_i}^i \geq a_\nu^i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(a_{m_i}^i)^{m_i} = \frac{1}{(n)_{m_i}} \sum a_{r_1}^{i-1} a_{r_2}^{i-1} \ldots a_{r_{m_i}}^{i-1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

$a_\nu^{(i)}$ tend vers une limite pour i infini et l'on a

$$\lim a_1^i = \lim a_2^i = \ldots = \lim a_n^i.$$

Quant à l'existence des limites pour arc ${}^{(0)}a_\nu$, il faut supposer ces arguments choisis entre o et 2π, la deuxième limite étant exclue.

L'auteur étudie ensuite les propriétés de la limite considérée comme fonction des valeurs initiales ${}^{(0)}a_1, \ldots, {}^{(0)}a_n$.

Haentzschel (E.). — Sur une substitution due à Hermite pour la réduction de l'intégrale elliptique de première espèce à la forme normale de Weierstrass. (75-80).

Hermite a montré que l'integrale $\int_x^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}$ se transforme en l'integrale $\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ si l'on pose

$$s = \frac{h(x)}{R(x)};$$

les notations sont définies par les formules

$$R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

$$h(x) = (a_0 a_4 - a_1^2)x^3 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)x^2 + (a_0 a_2 - 3a_1^2)x + (a_1 a_2 - a_0 a_3)x + a_2 a_4 - a_3^2,$$

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3;$$

de plus x_0 est une racine de $R(x)$.

L'auteur montre comment on peut passer inversement de la seconde intégrale à la première.

Hessenberg (Gerhard). — Théorie des chaînes et ensembles bien ordonnés. (81-133).

Les recherches exposées dans ce Mémoire ont trait à la portée des axiomes de la théorie des ensembles et des conséquences qu'on peut en tirer. L'auteur part des axiomes indiqués par Zermelo et qui écartent les paradoxes connus tenant à ce que le « domaine des choses » dont s'occupe la théorie des ensembles n'est pas lui-même un ensemble. L'objet principal du Mémoire est la théorie des *chaînes* (Ketten) qui appartiennent à une correspondance donnée ; elle est précédée de la théorie des correspondances les plus importantes, à savoir les « fonctions » qui sont caractérisées par la condition qu'à tout *ensemble* d'arguments corresponde un *ensemble* de valeurs de la fonction. Les fonctions les plus importantes sont les fonctions monotones (homéotones et antitones). La chaîne est un argument d'une fonction homéotone tel que la valeur de la fonction soit une partie de la valeur de l'argument. La considération de la plus petite chaîne qui embrasse un argument donné conduit à la théorie des ensembles bien ordonnés et à la démonstration du théorème de Zermelo sur la possibilité de bien ordonner un ensemble quelconque.

I. *Les relations fondamentales.* — La première relation fondamentale est celle de l'identité $a = b$. La seconde est exprimée par la formule $a \varepsilon \alpha$, qui s'énonce : « *a est élément de* α », ou « *a est contenu dans* α » ou « α *contient* a » ; cette relation est transitive ; si un objet α contient d'autres objets, c'est un *ensemble* (Menge) ; un ensemble peut être vide ou nul. Il y a des ensembles de différents degrés (Stufe) : un ensemble du second degré admet pour éléments des ensembles (du premier degré) et ainsi de suite. L'auteur se sert des lettres minuscules latines a, b, ... pour designer un objet ; des lettres minuscules grecques α, β, ... pour désigner un ensemble de premier degré, des lettres majuscules latines A, B, ... pour désigner un ensemble du second degré.

La troisième relation fondamentale, qui n'a lieu qu'entre des ensembles, exprime que tout élément de β est aussi élément de α ; on l'énonce : « α embrasse β », « β est sous-ensemble de α », « α est sur ensemble de β », et on l'écrit [1]

$$\beta \leqslant \alpha ;$$

cette relation de *subsomption* est transitive. On dit encore que « α est plus grand que β dans le sens de la subsomption ».

Un ensemble A est dit « ordonné par subsomption » si entre deux éléments quelconques α et β de A existe l'une des relations $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \alpha$.

II. *Les axiomes de Zermelo.* — L'auteur énonce ces axiomes :

Axiome de la détermination : Un ensemble est déterminé par ses éléments.

Axiome des ensembles élémentaires : Il y a un ensemble nul et un seul zéro. A chaque objet a correspond un ensemble $\mathfrak{E}a$ ou $\{a\}$ qui contient cet objet et cet objet seulement ; à deux objets différents a, b correspond un ensemble $\{a, b\}$ qui contient ces deux objets.

Axiome de l'infini : Il y a au moins un ensemble qui contient zéro et qui contient $\mathfrak{E}a$ dès qu'il contient a.

Axiome de discrimination : Si la proposition $\mathfrak{A}x$ est définie pour tous les éléments x d'un ensemble α, il y a un sous-ensemble $\mathfrak{b}_\alpha$ de α qui contient tous les élements de α pour lesquels $\mathfrak{A}x$ est vraie et ceux-là seulement.

---

[1] La difficulté de l'impression a conduit à remplacer le signe qui figure dans le Mémoire original par le signe $\leqslant$.

Axiome de l'ensemble puissance : A chaque ensemble α correspond un ensemble $\mathfrak{V}\alpha$ qui contient tous les sous-ensembles de α. On démontre que, si $\beta \leq \alpha$, il existe un ensemble $\mathfrak{V}(\beta, \alpha)$ contenant tous les ensembles qui sont sous-ensembles de α et sur-ensembles de β.

Axiome de la somme (Vereinigung) : A chaque ensemble A du second degré correspond un ensemble $\mathcal{S}$A qui contient les éléments des éléments de A et ceux-là seulement.

On démontre l'existence d'un ensemble $\mathfrak{D}$A, le *noyau* de A, qui contient comme éléments les éléments communs à tous les éléments de A ; $\mathfrak{D}$A est *l'intersection* des éléments de A.

Axiome du choix : Si les éléments de A n'ont deux à deux aucun élément commun et si de plus aucun des éléments de A n'est nul, il y a au moins un ensemble μ qui a exactement un élément commun avec chaque élément de A.

Dans la suite, l'auteur ne fait pas usage de l'axiome de l'infini ; il ne fait usage de l'axiome du choix que dans le dernier Chapitre.

III. *Fonctions.* — Une correspondance est dite *une fonction* lorsque, étant donné un ensemble quelconque de valeurs de l'argument, on peut démontrer que les valeurs correspondantes de la fonction forment un ensemble. Si $\mathfrak{F}x$ est le symbole de la fonction et si α est un ensemble de valeurs de l'argument, l'auteur désigne par $\mathfrak{F}_1\alpha$ l'ensemble des valeurs de la fonction. En particulier, la correspondance définie par $\mathfrak{J}x = x$ est une fonction ; $\mathfrak{C}x$ est une fonction.

Si deux correspondances $\mathfrak{F}x$ et $\mathfrak{G}x$ sont telles qu'on ait pour chaque argument $\mathfrak{F}x \leq \mathfrak{G}x$, $\mathfrak{G}x$ est dite *une majorante* de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{G}$ est une fonction il en est de même de $\mathfrak{F}$. Les correspondances $\mathfrak{V}$, $\mathcal{S}$ sont des fonctions définies pour des ensembles du second degré.

IV. *Relations fonctionnelles.* — L'auteur établit un certain nombre de formules qui découlent des axiomes de Zermelo et de la définition de la fonction. Il introduit aussi des notations abrégées pour certaines fonctions à deux arguments, lorsque l'un des arguments est supposé fixe ; par exemple, il désigne, pour μ fixe, par $\mathfrak{V}\alpha$, la fonction $\mathfrak{V}(\alpha, \mu)$, par $\mathfrak{C}\alpha$ la fonction $\mu - \alpha$.

V. *Fonctions monotones.* — Si $\mathfrak{F}$ est une fonction telle que les valeurs de l'argument et de la fonction soient des ensembles, la fonction est dite *monotone* si de $\alpha \leq \beta$, resulte toujours $\mathfrak{F}\alpha \leq \mathfrak{F}\beta$ ou $\mathfrak{F}\beta \leq \mathfrak{F}\alpha$; dans le premier cas elle est dite *homéotone*, dans le second cas *antitone*. L'argument zéro peut être pour certaines fonctions arbitraires un argument *singulier*, aussi il est nécessaire de désigner par un symbole particulier $\mathfrak{N}$A l'ensemble obtenu en retranchant, de l'ensemble A, l'élément zéro s'il le contient. $\mathfrak{N}$ est une fonction.

Si $\mathfrak{Z}$ est une fonction homéotone, on a les relations fondamentales

$$\mathcal{S}\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathcal{S}, \qquad \mathfrak{Z}(\mathfrak{D}) = (\mathfrak{D})\mathfrak{Z}_1, \qquad \mathfrak{Z}_1\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\mathfrak{Z},$$

la seconde n'ayant lieu que si l'argument A n'est pas nul. Il y a des relations analogues pour les fonctions antitones.

VI. *Fonctions distributives.* — Une fonction distributive est définie par la relation

$$\mathcal{S}\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathcal{S} ;$$

elle est toujours homéotone. La fonction $\mathcal{S}$ est distributive ; toutes les fonctions $\mathfrak{F}_1$ sont distributives.

VII. *Fonctions discriminantes.* — Soient un domaine Ω et une proposition $\mathfrak{A}x$ définie pour tous les éléments de ce domaine. Cela étant, si α est un ensemble dont les éléments sont contenus dans α, il existe un ensemble $\mathcal{A}_0\alpha$ formé des éléments de α pour lesquels la proposition est vraie. $\mathcal{A}$ est une fonction discriminante. Elle est distributive : on a de plus $\mathcal{A}_0\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$. Deux fonctions discriminantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ satisfont à la relation $\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0\mathcal{A}$. La fonction $\mathfrak{T}$ est une fonction discriminante.

VIII. *Fonctions monotones particulières.* — L'auteur établit un certain nombre de formules se rapportant aux fonctions $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$, $\mathfrak{D}$. En particulier, les fonctions homéotones $\mathcal{S}_1\mathfrak{T}\mathcal{U}$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{T}\mathcal{U}$, qui joueront plus loin un rôle important, satisfont aux deux relations

$$\mathcal{S} = \mathcal{F}_1\mathfrak{T}\mathcal{U}, \qquad \mathcal{F}_1\mathfrak{T}\mathcal{U}\mathcal{F}_1\mathfrak{T}\mathcal{U} = \mathcal{F}_1\mathfrak{T}\mathcal{U} \qquad (\mathcal{F} = \mathcal{S} \text{ ou } \mathfrak{D}).$$

IX. *Chaînes.* — Soit $\mathfrak{Z}$ une fonction homéotone : un argument α est dit chaîne de $\mathfrak{Z}$ si l'on a

$$\mathfrak{Z}\alpha = \alpha;$$

les chaînes appartenant à une fonction simplement homéotone sont dites chaînes de Zermelo ; celles qui appartiennent à une fonction distributive sont dites chaînes de Dedekind.

Si tous les éléments d'un ensemble A sont des chaînes de $\mathfrak{Z}$, il en est de même de $\mathfrak{D}$A.

Si tous les éléments d'un ensemble A sont des chaînes d'une fonction $\mathfrak{Z}$ distributive, il en est de même de $\mathcal{S}$A.

Si α est sous-ensemble d'une chaîne β de $\mathfrak{Z}$, il existe une plus petite chaîne α_0 embrassant α.

Soient μ une chaîne de $\mathfrak{Z}$ et M l'ensemble des chaînes de $\mathfrak{Z}$ embrassées par μ ; M contient alors le noyau de chacun de ses sous-ensembles non nuls M′ ; M contient aussi $\mathcal{S}$M′, si $\mathfrak{Z}$ est distributive. Dans ce dernier cas l'ensemble M est *fermé*, si l'on entend par ensemble fermé un ensemble qui contient le noyau $\mathfrak{D}$M′ et la somme $\mathcal{S}$M′ de tous ses sous-ensembles non nuls. Un ensemble fermé M est caractérisé par la formule

$$(\mathcal{S}_1 + \mathfrak{D}_1)\mathfrak{T}\mathcal{U}\mathrm{M} = \mathrm{M}.$$

Tout ensemble fermé M peut être regardé comme un ensemble de chaînes de Dedekind ; la fonction $\mathfrak{Z}$ correspondante est définie de la manière suivante : $\mathfrak{Z}\alpha$ est le plus petit élément de M qui embrasse l'argument $\alpha = \mathcal{S}$M.

L'exemple le plus simple d'un ensemble fermé est $\mathcal{U}(\alpha, \beta)$. Chaque ensemble du second degré admet un plus petit sur-ensemble fermé.

X. *Fonctions équivalentes.* — Si deux fonctions ont les mêmes chaînes, elles sont dites *équivalentes*. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que la fonction de chaînes $\mathfrak{Z}$ est majorante de $\mathfrak{I}$; dans le cas où $\mathfrak{Z}$ est distributive, elle est de la forme $\mathcal{S}\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ étant majorante de $\mathfrak{C}$.

Si l'on désigne par $\mathfrak{Z}_0\alpha$ la plus petite chaîne de $\mathfrak{Z}$ embrassant α, la fonction $\mathfrak{Z}_0$ est majorante de $\mathfrak{I}$ et satisfait à la relation $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_0 \neq \mathfrak{Z}_0$. C'est, parmi toutes les fonctions équivalentes à $\mathfrak{Z}$, la plus grande de celles qui jouissent de ces deux propriétés. Si $\mathcal{F} = \mathfrak{Z}$, on a $\mathcal{F}_0 = \mathfrak{Z}_0$; si $\mathfrak{Z}$ est distributive, $\mathfrak{Z}_0$ l'est aussi. L'auteur désigne par $\mathfrak{Z}_c$ la fonction $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{C}$: $\mathfrak{Z}_c a$ est alors la plus petite chaîne de $\mathfrak{Z}$ contenant l'élément a.

Si la fonction $\mathfrak{Z}$ admet des chaînes, il en est de même de $\mathfrak{Z}_1$. Si μ est une chaîne de $\mathfrak{Z}$ et si $\alpha \subset \mu$, il y a une plus petite chaîne de $\mathfrak{Z}_1$ contenant α : c'est $\mathfrak{Z}_{1\alpha}$. La fonction $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1\alpha}$ est équivalente à $\mathfrak{Z}$: elle est égale à $\mathfrak{Z}_1$ si $\mathfrak{Z}$ est distributive. Si $\mathfrak{Z}$ est simplement homéotone, la fonction $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1\alpha}$ peut être différente de $\mathfrak{Z}_1$: mais en substituant à la fonction $\mathfrak{Z}_1$ la fonction

$$\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}\,\mathfrak{N}\mathfrak{V} = \mathfrak{D}_1\,\mathfrak{N}\mathfrak{V},$$

toute chaîne de $\mathfrak{Z}^*$ est une chaîne de $\mathfrak{Z}_1$ et est de plus un ensemble fermé.

La fonction $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_\alpha$ est équivalente à $\mathfrak{Z}$ et identique à $\mathfrak{Z}_0$.

L'auteur donne une interprétation des résultats précédents au moyen de la théorie des nombres ordinaux transfinis.

XI. *Coupures par subsomption.* — Si M est un ensemble du second degré décomposable en deux parties M_1, M_2 telles que tout élément de M_1 soit un sous-ensemble de tout élément de M_2, cette décomposition définit une *coupure* (Schnitt) : on a

$$\mathfrak{S}M_1 = \mathfrak{D}M_2.$$

Si ni $\mathfrak{S}M_1$ ni $\mathfrak{D}M_2$ n'appartiennent à M, on dit que la coupure est une *lacune* (Lücke) : un ensemble fermé n'admet par suite aucune lacune.

Si $M = M_1 + M_2$ et si $\mathfrak{S}M_1 \neq \mathfrak{D}M_2$, l'ensemble M admet la coupure (M_1, M_2), à moins que M_1 et M_2 aient un élément commun qui est alors $\mathfrak{S}M_1 = \mathfrak{D}M_2$: dans ce cas cet élément est dit un élément de coupure ; tout autre élément de M est sous-ensemble ou sur-ensemble de cet élément de coupure.

Si M_1 et M_2 sont fermés et si $\mathfrak{S}M_1 \neq \mathfrak{D}M_2$, l'ensemble $M_1 + M_2$ est aussi fermé.

Si l'on désigne par A_1 le plus petit sur-ensemble fermé de A, et si

$$M = M_1 + M_2, \qquad \mathfrak{S}M_1 = \mathfrak{D}M_2,$$

on a

$$M = M_1 + M_2, \qquad \mathfrak{S}M_1 = \mathfrak{D}M_2.$$

Toute coupure de M donne donc naissance à une coupure de M_0. L'ensemble de tous les éléments de coupure d'un ensemble fermé est lui-même fermé.

XII. *Coupures par relations non symétriques.* — Supposons qu'étant donné un ensemble μ, il existe une proposition $(x\tau y)$ définie par deux éléments quelconques de l'ensemble x et y et que l'une au moins des deux propositions $(x\tau y)$ et $(y\tau x)$ soit fausse. Tous les y pour lesquels $(y\tau x)$ est faux forment un sous-ensemble $\mathfrak{F}x$ de μ. Cela étant, les chaînes de $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$, qui sont des sous-ensembles de μ, forment un ensemble du second degré ordonné par subsomption, c'est-à-dire que, si α et β sont deux de ces chaînes, on a toujours $\alpha \neq \beta$ ou $\beta \neq \alpha$. Cet ensemble est fermé puisque $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$ est distributive. L'auteur appelle *reste* toute chaîne de $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$ et « Abschnitt » l'ensemble complémentaire d'un reste. Si ρ est un reste et α l'« Abschnitt » correspondant, si de plus x est un élément quelconque de α, y un élément quelconque de ρ, la proposition $(x\tau y)$ est vraie. La décomposition (α, ρ) est une coupure.

Si x et y appartiennent respectivement aux deux parties α et ρ d'une coupure, on écrira $x < y$; si l'on n'a ni $x < y$, ni $y < x$, on écrira $x \leq y$. La relation $(x\tau y)$ est une conséquence de $x < y$; mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

L'auteur compare les considérations précédentes avec la construction du continu donnée par Dedekind (« Stetigkeit und irrationale Zahlen »). Dans l'ensemble μ des nombres rationnels, la proposition $(x \tau y)$ est : *x est inférieur à y*. Un reste est un ensemble des nombres rationnels tel que, si un nombre rationnel appartient à cet ensemble, tous les nombres rationnels plus grands lui appartiennent aussi. La notion de coupure est ici classique. La relation $x \prec y$ signifie ici : *x est inférieur à y* ; elle est identique à $(x \tau y)$.

XIII. *Induction.* — L'auteur démontre la légitimité du raisonnement par induction qu'il présente sous trois formes différentes. La première est la suivante :

Soit $\mathfrak{Z}$ une fonction homéotone qui possède des chaînes, $\mathfrak{Z}_0 \alpha$ la plus petite chaîne embrassant α et $\alpha \xi$ une proposition définie pour tous les arguments ξ de $\mathfrak{Z}$. Cela étant :

Si $\alpha \alpha$ est vrai ;
Si $\alpha \mathfrak{Z} \xi$ est vrai dès que $\alpha \xi$ est vrai ;
Si $\alpha \varepsilon A$ est vrai dès que $\alpha \xi$ est vrai pour tous les éléments ξ de A :
Alors $\alpha \mathfrak{Z}_0 \alpha$ est vrai

Ces raisonnements par induction permettent à l'auteur de démontrer que, si $\mathfrak{Z}$ est une fonction majorante de $\mathfrak{H}$, la plus petite chaîne de $\mathfrak{Z}$ qui soit fermée et qui contienne α est *bien ordonnée*. Comme on ne suppose pas $\mathfrak{Z}$ homéotone, l'existence de cette plus petite chaîne doit être supposée vérifiée. L'auteur désigne par $\mathfrak{P} \xi$ la plus petite chaîne de $\mathfrak{Z}$, fermée et embrassant ξ ; il pose $\mathfrak{P} \alpha = M$. Il démontre d'abord que tous les éléments de M embrassent α. Il démontre ensuite par induction que, si ξ appartient à M, chaque élément η appartenant à M et sous-ensemble de ξ satisfait à l'une des relations $\mathfrak{Z} \eta \prec \xi$ ou $\eta = \xi$. Il en résulte que ξ est un élément de coupure de M. L'ensemble M admet donc tous ses éléments comme éléments de coupure ; il est donc ordonné par subsomption. De plus, si A est un sous-ensemble quelconque de M, A admet un *plus petit* élément ; autrement dit, M est *bien ordonné*.

XIV. *Le théorème sur les ensembles bien ordonnés.* — Les considérations précédentes conduisent à un ordre « incomplet » des éléments x du plus grand ensemble μ contenu dans M. On a $x \prec y$ s'il existe un élément ξ de M qui ne contient pas y. Sinon on a $x \succ y$. Tous les éléments $y \prec x$ sont les éléments de l'ensemble $\mathfrak{Z} \mathfrak{S} X - \mathfrak{S} X$, où l'on désigne par X l'ensemble de tous les $\xi \varepsilon M$ qui ne contiennent pas x. L'ordre sera « complet » si l'ensemble $\mathfrak{Z} \mathfrak{S} X$ contient un seul élément de plus que $\mathfrak{S} X$; il en sera certainement ainsi si, pour chaque argument ζ, $\mathfrak{Z} \xi$ contient au maximum un élément de plus que ξ.

L'axiome du choix permet, d'après cela, de démontrer que tout ensemble μ peut être bien ordonné, c'est-à-dire qu'étant donnés deux éléments quelconques différents x et y de cet ensemble il existe l'une ou l'autre des relations transitives $x \prec y$ ou $y \prec x$; de plus, tout sous-ensemble de μ admet un élément x, tel que $x_0 \prec x$, x désignant tout autre élément du sous-ensemble. On arrive à ce théorème en partant de la fonction $\mathfrak{Z} \alpha = \alpha + \mathfrak{F}(\mu - \alpha)$, où $\alpha \neq \mu$ et où $\mathfrak{F} \alpha$ désigne un élément de α choisi suivant une loi déterminée dont l'axiome du choix affirme la possibilité. La plus petite chaîne fermée de $\mathfrak{Z}$, contenant 0 est bien ordonnée par subsomption ; cette plus petite chaîne existe et son plus grand élément est μ. Cela permet de bien ordonner les éléments de μ. L'auteur indique d'autres procédés qui se ramènent au précédent.

Dickson (*L.-E.*). — Sur la congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p}$. (134-141).

Si n et p sont des nombres premiers impairs et si la congruence donnée n'a aucune solution en nombres entiers premiers avec p on a nécessairement $p = mn + 1$, m n'étant pas divisible par 3.

L'auteur se propose, n étant donné, de déterminer les modules p pour lesquels la congruence a des solutions premières avec p. Il part de la remarque suivante : si la congruence n'admet pas de solutions premières avec p, la congruence

$$\rho(1-\rho^n)\sum_{s=0}^{n-1}(1-\rho^n)^{s+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

a lieu pour chaque entier ρ.

Si $n = 3$, les seules valeurs exceptionnelles de p sont 7 et 13 ; si $n = 5$, les valeurs exceptionnelles de p sont 11, 41, 71, 101 ; enfin, si $n = 7$, les valeurs exceptionnelles de p sont 29, 71, 113, 491.

Biermann (*O.*). — Un procédé pour déduire formellement la serie de Laurent d'une fonction de l'une des fonctions rationnelles qui lui servent d'approximation. (142-145).

Friedmann (*A.*) et *Tamarkine* (*J.*). — Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et des nombres de Bernoulli. (Extrait d'une lettre adressée à M. K. Hensel.) (146-156).

Si p est un nombre premier et a un nombre entier non divisible par p, les auteurs désignent par $\left[\frac{a}{p}\right]$ le plus grand entier contenu dans $\frac{a}{p}$ et par $q(a)$ le nombre $\frac{a^{p-1}-1}{p}$. Ils posent ensuite

$$\alpha_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)-1}{p}, \qquad \alpha_{\frac{p-1}{2}} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_k = (-1)^{\frac{p-k}{2}}\frac{B_{\frac{p-k}{2}}}{p-k}$$
$$(k = 2, 3, \ldots, p-2);$$

$B_{\frac{p-k}{2}}$ désigne le $\left(\frac{p-k}{2}\right)^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli si $\frac{p-k}{2}$ est pair, 0 si $\frac{p-k}{2}$ est impair.

Cela étant, si a n'est pas multiple de p, on a la formule fondamentale

$$\left(\frac{a}{p}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} = a\,q(a) - 1 - \sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k a^k \pmod{p}.$$

Les auteurs déduisent de ce théorème plusieurs formules concernant les nombres de Bernoulli. Ils démontrent aussi quelques formules relatives au nombre $H(p)$, qui désigne le nombre des classes des formes binaires quadratiques proprement primitives de déterminant négatif $-p$, où p est un nombre

premier de la forme $4n-3$; en particulier, on a

$$H(-p) \equiv \left[2-\left(\frac{2}{p}\right)\right](-1)^{\frac{p+1}{4}} \cdot 2B_{\frac{p-1}{2}} \pmod p,$$

formule déjà connue de Cauchy.

Neumann (*C.*). — Sur quelques développements en séries qui procèdent suivant des produits de fonctions sphériques. (157-180).

1. L'auteur rappelle les formules classiques relatives aux fonctions $P_n(\mu)$, définies par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2-2\rho\rho_1\mu}} = \sum_0^\infty \frac{\rho^n}{\rho_1^{n+1}} P_n(\mu) \qquad (\rho < \rho_1),$$

et aux fonctions $Q_n(x)$, définies par la formule

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)}{x-z}\,dz.$$

Ces formules peuvent s'obtenir en regardant ρ, $\vartheta = \text{arc}\cos\mu$, φ comme les coordonnées polaires d'un point (x, y, z) dans l'espace et cherchant de deux manières différentes les dérivées par rapport à x, y, z de $\rho^n P_n(\mu)$. C'est cette méthode que l'auteur se propose d'appliquer, mais en prenant des coordonnées elliptiques au lieu des coordonnées polaires.

2. Les coordonnées elliptiques d'un point sont définies par les formules

$$x = a\rho\mu,$$
$$y = a\sqrt{\rho^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,$$
$$z = a\sqrt{\rho^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi.$$

Si E est la distance du point (ρ, μ, φ) au point $(\rho_1, 1, \varphi_1)$, on a

$$\frac{a}{E} = \frac{1}{\sqrt{-2+(\rho^2-\rho_1^2-\mu^2+1)-2\rho\rho_1\mu}} = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) P_n(\rho)\, P_n(\mu)\, Q_n(\rho_1)$$
$$(\rho < \rho_1).$$

Le calcul de $\frac{\partial[P_n(\rho)P_n(\mu)]}{\partial x}$, fait directement et fait en s'appuyant sur le développement de $\frac{a}{E}$, conduit à la formule

$$\frac{n(n+1)}{2n+1}\,\frac{P_{n+1}(\rho)P_{n-1}(\mu)-P_{n+1}(\mu)P_{n-1}(\rho)}{\rho^2-\mu^2}$$
$$= (2n-1)P_{n-1}(\rho)P_{n-1}(\mu) + (2n-5)P_{n-3}(\rho)P_{n-3}(\mu)+\ldots \qquad (n>0).$$

On peut déduire de là une formule donnée par Christoffel en 1858.

3. Si au lieu de supposer $\rho < \rho_1$ on suppose $\rho_1 < \rho$, on a

$$\frac{a}{E} = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) Q_n(\rho) P_n(\mu) P_n(\rho_1).$$

Un procédé analogue au précédent pour calculer $\frac{\partial[Q_n(\rho)P_n(\mu)]}{\partial x}$ conduit à la formule

$$\frac{n(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{Q_{n+1}(\rho)P_{n+1}(\mu) - Q_{n+1}(\rho)P_{n+1}(\mu)}{\rho^2 - \mu^2}$$
$$= [(2n+3)Q_{n+1}(\rho)P_{n+1}(\mu) + (2n+7)Q_{n+3}(\rho)P_{n+3}(\mu) + \ldots] \quad (n \geq 0),$$

d'où l'on peut déduire une formule analogue à celle de Christoffel.

4. Le calcul de $\frac{\partial[P_n(\rho)P_n(\mu)]}{\partial y}$ conduit, dans le cas $\rho < \rho_1$, à l'équation

$$\frac{\rho P_n(\rho)P_n(\mu) - \mu P'_n(\mu)P_n(\rho)}{\rho^2 - \mu^2} = \left(\frac{2n-1}{(n-1)n}\right) P_{n-1}(\rho)P_{n-1}(\mu)$$
$$+ \left(\frac{2n-5}{(n-2)(n-1)}\right) P'_{n-3}(\rho)P_{n-3}(\mu) + \ldots$$

5. Le même calcul, dans le cas $\rho > \rho_1$, conduit à l'équation

$$\frac{\rho Q_n(\rho)P_n(\mu) - \mu P_n(\mu)Q_n(\rho)}{\rho^2 - \mu^2} = \left(\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right) Q'_{n+1}(\rho)P'_{n+1}(\mu)$$
$$+ \left(\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}\right) Q_{n+3}(\rho)P'_{n+3}(\mu) + \ldots$$

Dickson (*L.-E.*). — Limite inférieure du nombre des solutions de $x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod{p}$. (181-188).

La congruence considérée, où e et f sont des nombres premiers impairs, a certainement des solutions pour lesquelles x, y, z sont les entiers premiers avec p, si e est premier avec $p-1$. Si, au contraire, $p-1$ est de la forme ef, il en est encore certainement ainsi, si l'on a

$$f \equiv e^3 - 6e^2 + 13e - 6,$$

c'est-à-dire si

$$p - (e-1)(e-2) \equiv 6e - 2;$$

de plus, le nombre N des solutions est supérieur à

$$(p-1)[p - 1 - 3e - (e-1)(e-2)\sqrt{p}].$$

La méthode employée par l'auteur peut s'appliquer à des valeurs non premières de e. C'est ainsi que la congruence $x^e + y^e + z^e \pmod{p}$ a des solutions premières avec p pour tout nombre premier p supérieur à 17 et de la forme $4f+1$.

Bohl (*P.*). — Sur un problème qui se présente dans la théorie des perturbations séculaires. (189-283).

On rencontre dans la théorie des perturbations séculaires les équations

$$e\sin\omega = N_0\sin(g_0t+\beta_0)+N_1\sin(g_1t+\beta_1)+\ldots+N_{n-1}\sin(g_{n-1}t+\beta_{n-1}),$$
$$e\cos\omega = N_0\cos(g_0t+\beta_0)+N_1\cos(g_1t+\beta_1)+\ldots+N_{n-1}\cos(g_{n-1}t+\beta_{n-1}),$$
$$\operatorname{tang}\Phi\sin\Theta = M_0\sin(h_0t+\gamma_0)+M_1\sin(h_1t+\gamma_1)+\ldots+M_{n-1}\sin(h_{n-1}t+\gamma_{n-1}),$$
$$\operatorname{tang}\Phi\cos\Theta = M_0\cos(h_0t+\gamma_0)+M_1\cos(h_1t+\gamma_1)+\ldots+M_{n-1}\cos(h_{n-1}t+\gamma_{n-1}).$$

Dans ces formules e, ω, Φ, Θ désignent l'excentricité, la longitude du perihélie, l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant; t désigne le temps; les N, g, β, M, h, γ sont des constantes.

Lagrange et Laplace ont posé, dans le cas $n=2$, la question de savoir si ω et Θ possèdent un moyen mouvement, c'est-à-dire peuvent se mettre sous la forme $ct+\gamma$, où c est une constante et où γ reste compris entre des limites fixes quand t augmente indéfiniment. Il y a moyen mouvement, comme l'a montré Lagrange, si n ne dépasse pas la valeur 7 ou encore si, n étant quelconque, l'un des coefficients N ou M est en valeur absolue plus grand que la somme des valeurs absolues des autres.

En dehors de ces deux cas, les auteurs qui se sont, depuis Lagrange, occupés de la théorie des perturbations séculaires n'ont rien obtenu de précis, les uns niant, les autres affirmant l'existence d'un moyen mouvement. Même les recherches récentes de Gyldén et de Cavallin semblent supposer *a priori* l'existence d'un moyen mouvement ou démontrer cette existence, mais en se basant sur des raisons certainement insuffisantes, comme le montrent les résultats que vient d'obtenir l'auteur dans son important Mémoire.

Le premier Chapitre (*Considérations de nature générale*) contient des théorèmes de nature très simple, mais qui étaient indispensables pour la suite. L'auteur considère les équations

$$\xi = A_1\cos(g_1t+\beta_1)+A_2\cos(g_2t+\beta_2)+\ldots+A_n\cos(g_nt+\beta_n),$$
$$\eta = A_1\sin(g_1t+\beta_1)+A_2\sin(g_2t+\beta_2)+\ldots+A_n\sin(g_nt+\beta_n),$$

dans lesquelles les A, g et β désignent des constantes et t une variable. Il suppose que ξ et η ne s'annulent pas identiquement, quel que soit t. Une valeur t_0 de t qui annule ξ et η est appelée un zéro; au voisinage de t_0, il n'y a pas d'autre zéro que t_0. Les équations

$$u\cos\varphi = \xi, \qquad u\sin\varphi = \eta$$

permettent, dans chaque domaine connexe T de la variable t, de définir une infinité de fonctions continues φ de t; elles se déduisent toutes de l'une d'entre elles par addition d'un multiple de π. Si le domaine T ne contient aucun zéro, on peut déterminer la fonction continue φ de manière que la quantité u soit constamment positive : φ n'est alors déterminée qu'à un multiple près de 2π. Mais, dans la suite, l'auteur laisse de côté la condition $u \geqq 0$.

La fonction φ est dite *posséder un moyen mouvement* s'il existe une constante g telle que $\varphi(t)-gt$ reste, lorsque t augmente indéfiniment, compris entre des limites fixes. L'auteur démontre que, si les rapports mutuels des différences g_2-g_1, g_3-g_1, ..., g_n-g_1 sont des nombres rationnels, il existe un moyen mouvement. Il en est de même si l'un des A est en valeur absolue égal à la somme des valeurs absolues des autres, et si de plus il existe deux zéros distincts. Cette dernière restriction peut même être laissée de côté.

Enfin, l'auteur s'occupe, dans le premier Chapitre, de la question des limites supérieure et inférieure de $|u|$. Laplace avait déjà indiqué qu'on a toujours

$$|u| \leq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Si l'un des coefficients, A_λ par exemple, est plus grand en valeur absolue que la somme des valeurs absolues des autres, on a de plus

$$|u| \geq 2|A_\lambda| - \sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu|.$$

L'auteur démontre que, s'il n'existe aucune relation de la forme

$$m_1(g_2 - g_3) + m_2(g_3 - g_1) + \ldots + m_n(g_1 - g_2) = 0,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers non tous nuls, on peut faire correspondre à tout nombre positif p un nombre positif q tel que, dans chaque intervalle de temps de longueur q, $|u|$ s'écarte de moins de p, soit de la limite supérieure $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$, soit de la limite inférieure $2|A_\lambda| - \Sigma|A_\nu|$, si $2|A_\lambda| > \Sigma|A_\nu|$, ou 0, si chaque $|A_\lambda|$ est inférieur ou égal à la somme des autres $|A_\nu|$.

II. *Lemmes empruntés à la géométrie des nombres.* — L'auteur imagine une circonférence de longueur 1, sur cette circonférence un arc AB de longueur $s < 1$. Un fil, indéfini dans un sens, a son extrémité en un point Q de la circonférence et est enroulé sur cette circonférence; il porte, à intervalles réguliers, de longueur r, des nœuds, le premier étant à l'extrémité Q. L'auteur désigne par $\varphi(n)$ le nombre de ceux des n premiers nœuds du fil qui se trouvent à l'intérieur de l'arc AB, les extrémités A et B étant exclues. Cette fonction $\varphi(n)$ jouit de la propriété que le rapport $\frac{\varphi(n)}{n}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment : cette limite est s, si r est irrationnel; au contraire, si r est rationnel et égal à la fraction irréductible $\frac{\mu}{\nu}$, la limite est $\frac{\lambda}{\nu}$, λ désignant le nombre des sommets, situés à l'intérieur de l'arc AB, d'un polygone régulier de ν côtés dont Q serait un des sommets. De plus, dans le cas où r est rationnel, la différence entre $\varphi(n)$ et $n\frac{\lambda}{\nu}$ reste comprise entre deux limites fixes $\pm \frac{\lambda(\nu - \lambda)}{\nu}$.

La limite C de $\frac{\varphi(n)}{n}$ s'appelle le *nombre caractéristique* de la fonction $\varphi(n)$. Cette fonction est dite *posséder le caractère linéaire* si la différence $\varphi(n) - cn$ reste comprise entre deux limites fixes quand n augmente indéfiniment. Si r est rationnel, $\varphi(n)$ possède le caractère linéaire. La question de savoir si $\varphi(n)$ possède le caractère linéaire ne dépend que de r et de s, mais est indépendante du point Q et du sens dans lequel le fil est enroulé.

Cela étant, l'auteur démontre le théorème suivant :

Le nombre s étant donné, on peut choisir r aussi voisin qu'on veut d'un nombre donné r_0 pour que, à volonté, la fonction $\varphi(n)$ possède ou ne possède pas le caractère linéaire.

III. *Le cas de trois planètes.* — L'auteur commence par des considérations préliminaires. A, B, C étant trois nombres positifs dont chacun est inférieur à la somme des deux autres, il considère un triangle dont les côtés sont A, B, C et désigne par β et γ les angles opposés aux côtés B et C. Les formules

$$X = A + B\cos x + C\cos y,$$
$$Y = \quad B\sin x + C\sin y$$

font correspondre à tout point $w(x, y)$ d'un plan un point $W(X, Y)$ d'un autre plan. Les points critiques w du premier plan sont ceux pour lesquels X et Y sont nuls : il y en a de deux espèces ; ceux de première espèce ont pour coordonnées

$$x = \quad \pi + \gamma + \mu 2\pi,$$
$$y = -(\pi - \beta) + \nu 2\pi;$$

ceux de deuxième espèce ont pour coordonnées

$$x = \quad (\pi - \gamma) + \mu 2\pi,$$
$$y = \quad \pi - \beta + \nu 2\pi.$$

Lorsque w décrit une ligne continue dans son plan, la fonction

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{Y}{X},$$

lorsqu'on la fait varier d'une manière continue, subit une certaine variation. Si w décrit un contour fermé entourant un seul point critique et tournant une seule fois autour de ce point critique dans le sens direct, la variation de φ est 2π ou -2π, suivant que le point critique est de première ou de deuxième espèce.

L'auteur imagine alors que le point w décrive une droite L dont le coefficient angulaire μ soit supérieur à $\frac{\beta}{\pi - \gamma}$. Si l'ordonnée y de w augmente de Δy, il calcule l'accroissement de φ. Cet accroissement, abstraction faite d'une quantité qui varie entre des limites fixes lorsque Δy augmente indéfiniment, est, si μ est irrationnel, égal au produit de 2π par la fonction $\varphi(n)$ du Chapitre II, l'entier n étant ici remplacé par le plus grand entier supérieur à $\frac{\Delta y}{2\pi}$, r étant remplacé par $\frac{1}{\mu}$ et s par $\frac{1}{\pi}\left(\gamma + \frac{\beta}{\mu}\right)$. Si μ est rationnel et égal à la fraction irréductible $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, il faut ajouter un terme correctif $\eta\,\Delta y$, où η est égal à $\frac{g}{2\mu_1}$, g étant égal à 0, 1 ou 2.

En s'appuyant sur les résultats précédents, on peut traiter la question de l'existence d'un moyen mouvement dans le cas où $n = 3$. On peut toujours supposer $g_1 < g_2 < g_3$, et $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$. Le seul cas à élucider est celui où chacun des nombres A est plus petit que la somme des deux autres. Soient w_1, w_2, w_3 les angles du triangle construit avec les longueurs A_1, A_2, A_3 comme côtés. Soit enfin

$$\rho = \frac{g_3 - g_1}{g_2 - g_1}, \qquad \zeta = \frac{1}{\pi}(w_3 + \rho w_2),$$

$$b = \beta_3 - \beta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\rho}, \qquad \omega = \frac{1}{2\pi}[\pi + \pi\zeta + (b - \pi)\rho].$$

Les deux nombres ρ et ζ sont compris entre 0 et 1. Dans le cas où ρ est rationnel et égal à la fraction irréductible $\frac{m}{n}$, l'auteur désigne par H le nombre des entiers compris entre $n\omega$ et $n(\omega+\zeta)$, par h le nombre des entiers égaux à $n\omega$ ou $n(\omega+\zeta)$.

Cela étant, l'expression $\frac{\varphi(t)}{t}$, lorsque t augmente indéfiniment, tend toujours vers une limite. Cette limite, le *nombre caractéristique*, est, dans le cas où ρ est irrationnel, égale à

$$\frac{1}{\pi}(g_1 w_1 + g_2 w_2 + g_3 w_3);$$

dans le cas où ρ est rationnel, elle est égale à

$$\frac{g_2 - g_1}{2n}(2H - h) = g.$$

Quant à l'existence d'un moyen mouvement, elle ne dépend que des quantités ρ et ζ. *Si ρ_0 et ζ_0 sont des quantités arbitrairement données, comprises entre zéro et 1, il y a des nombres $\rho_0 - \varepsilon$ aussi voisins de ρ_0 qu'on veut et tels qu'aucun moyen mouvement n'existe pour $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 - r$. Il y a aussi des nombres $\rho_0 + \varepsilon$ aussi voisins de ρ_0 qu'on veut et tels qu'il existe un moyen mouvement pour $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + r$.*

Si les constantes A, g, β sont données par l'expérience, il est par suite, en général, impossible de décider s'il y a ou non un moyen mouvement; les erreurs d'observation, aussi faibles qu'on les suppose, permettent de choisir ρ et ζ de manière qu'à volonté il y ait ou il n'y ait pas un moyen mouvement. On pourrait néanmoins se demander si, étant donnés les procédés par lesquels on détermine les A, g et β, il n'y aurait pas des raisons théoriques pour décider s'il y a ou non moyen mouvement. L'auteur examine cette question et montre que dans le cas de trois planètes, les constantes N et M étant telles qu'on ait

$$2|N_\mu| < |N_0| + |N_1| + |N_2| \qquad (\mu = 0, 1, 2),$$
$$2|M_\mu| < |M_0| + |M_1| + |M_2| \qquad (\mu = 0, 1, 2),$$

il est impossible de décider s'il y a ou non un moyen mouvement.

L'auteur ajoute, dans son introduction, quelques considérations sur l'impossibilité, dans le cas où il n'y a pas de moyen mouvement, d'un développement de la forme

$$\varphi = (t) + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \ldots + \psi_n(t) + \ldots,$$

dans lequel chaque fonction $\psi_\mu(t)$ serait uniformément continue pour $t = t_0$, la série du second membre étant uniformément convergente pour $t = t_0$.

Thue (Axel). — Sur les valeurs approchées des nombres algébriques. (284-305).

L'auteur démontre les théorèmes suivants :

Si ρ est une racine positive d'une fonction rationnelle entière de degré r à

coefficients entiers, la relation

$$0 < |q\rho - p| < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

où c et k sont deux nombres positifs arbitrairement donnés, ne peut être vérifiée que pour un nombre fini de valeurs entières de p et de q.

Si l'on développe un nombre positif ρ en fraction continue, et si l'on désigne par $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite, la relation

$$a_n > Q_n^{k+\frac{r}{2}-1},$$

où a_n désigne le $n^{\text{ième}}$ élément de la fraction continue, k un nombre positif arbitrairement donné, ne peut être vérifiée que pour un nombre fini de valeurs de n.

Si ρ désigne une racine positive d'une fonction entière F à coefficients entiers de degré r, et si h et k sont deux nombres positifs arbitrairement donnés, on peut déterminer deux nombres positifs G_0 et G jouissant de la propriété suivante : il est impossible de trouver simultanément deux couples d'entiers positifs (p_0, q_0) et (p, q) satisfaisant aux inégalités

$$q > G_0, \quad 0 < |\rho q_0 - p_0| < \frac{1}{q_0^{\frac{r}{2}+k}},$$

$$q > G, \quad 0 < |\rho q - p| < \frac{1}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}}.$$

De là résulte le dernier théorème suivant :

L'équation $U(p, q) = c$, *où c est une constante donnée,* U *une fonction entière homogène et irréductible à coefficients entiers, ne possède qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers positifs p et q, si le degré de* U *est supérieur à* 0.

Fischer (*Ernst*). — Généralisation du théorème de Sylvester sur les déterminants. (306-318).

Soit une matrice

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{matrix}$$

dont les éléments sont regardés comme des variables indépendantes. Écrivons, dans un ordre quelconque, les $\nu = \binom{n}{\rho}$ combinaisons ρ à ρ des entiers $1, 2, \dots, n$: soient

$$C_1, \quad C_2, \quad \dots \quad C_\nu.$$

Rangeons dans chaque combinaison les ρ nombres dans un ordre déterminé

et posons

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\lambda\alpha} & a_{\lambda\beta} & \dots & a_{\lambda\gamma} \end{vmatrix},$$

en supposant que les combinaisons C et C_k soient

$$(\alpha\beta\dots\gamma), \quad (\alpha'\beta'\dots\gamma').$$

Considérons un déterminant Θ d'ordre quelconque 2ν et de la forme

$$\Theta = \begin{vmatrix} \Delta_{pp} & \Delta_{pq} & \dots & \Delta_{p\nu} \\ \Delta_{qp} & \Delta_{qq} & \dots & \Delta_{q\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{\nu p} & \Delta_{\nu q} & \dots & \Delta_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

et posons

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \\ a_{h2} & a_{h3} & \dots & a_{h1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{hh} & a_{h1} & \dots & a_{h,h-1} \end{vmatrix} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

D'après le théorème de Sylvester, si le système $(C_1, C_2, \dots, C_\nu)$ des combinaisons de Θ est formé des ν combinaisons C_i, Θ est une puissance de A_n. De plus, si le système des combinaisons de Θ est formé de toutes les combinaisons dans lesquelles ne manque aucun des nombres $1, 2, \dots, h$ (ou $h, h+1, \dots, n$), Θ est un produit de puissances de A_h et de A_n.

L'auteur cherche plus généralement dans quel cas Θ est de la forme

$$\Theta = A_1^{\bar{\nu}_1} A_2^{\bar{\nu}_2} \dots A_n^{\bar{\nu}_n}.$$

Il démontre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le système S des combinaisons de Θ soit terme inférieurement, c'est-à-dire que, si l'on considère une quelconque des combinaisons de S et si l'on diminue d'une manière quelconque les nombres qui constituent cette combinaison, la nouvelle combinaison obtenue appartient encore à S.

L'auteur généralise son théorème en l'étendant à des formations plus générales de déterminants dues à Picquet. On considère pour cela deux matrices (a_{ik}) et (b_{ik}) d'ordre n; on remplace les déterminants A_h de tout à l'heure par

$$D_h = \begin{vmatrix} a_{h1} & \dots & a_{hh} & b_{h,h+1} & \dots & b_{hn} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nh} & b_{n,h+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

et les déterminants Δ_{ik} par les suivants:

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} & b_{i\gamma'} & b_{i,\gamma'+1} & \dots & b_{i\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu\alpha} & a_{\nu\beta} & & a_{\nu\gamma} & b_{\nu\gamma'} & b_{\nu,\gamma'+1} & \dots & b_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

où C_i est la combinaison $(\alpha\beta\dots\gamma)$ et où C_k est formée des nombres $1, 2, \dots, n$

autres que $\lambda', \mu', \ldots, \nu'$. Pour que Θ soit un produit de puissances de $D_0, D_1, \ldots, D_n$, il faut et il suffit que le système des combinaisons de Θ soit fermé inférieurement.

E. CARTAN.

MATHEMATISCHE ANNALEN [1].

Tome LII; 1899.

Steinitz (*E.*). — Sur la théorie des modules (p. 1-57).

Il s'agit ici des *modules* introduits par Dedekind (onzième Supplément à la Théorie des nombres de Dirichlet). Frobenius et Stickelberger (*Journal de Crelle*, t. 86 et 88) ont éclairci les relations qui lient ces *modules* aux *groupes d'éléments permutables*; M. Steinitz se borne à considérer les premiers.

Soit A un système de mn éléments a_{ik} (m lignes, n colonnes) qui sont des entiers positifs: H. S. Smith a étudié le calcul de ces *matrices* et leurs conditions d'équivalence : A et B sont équivalents si l'on a à la fois $A = BC$ et $B = AD$, la multiplication étant la composition habituelle des systèmes linéaires. On sait que la condition nécessaire et suffisante est l'identité des diviseurs élémentaires des déterminants $|A|$ et $|B|$. Après avoir rappelé, d'après Frobenius, ces résultats qui permettent de caractériser une *classe* de systèmes quadratiques en donnant le *système principal* correspondant :

$$Dg(e_1)|e_2|\ldots(e_n)$$

dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont les diviseurs élémentaires $e_1, e_2, \ldots, e_r$ communs à tous les systèmes de la classe, M. Steinitz étudie l'*arithmétique des classes* (plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple, conditions de divisibilité, décomposition en produit de classes *primaires* premières entre elles, etc.).

Il passe ensuite aux *modules* de Dedekind (systèmes de nombres tels que la différence de deux d'entre eux appartient encore au système). Si l'on a un module de base finie, c'est-à-dire dont tous les éléments sont compris dans la formule $c_1\eta_1 + \ldots + c_r\eta_r$ où les c_i sont des nombres entiers, chaque nombre du module peut être défini par la ligne $c_1 \ldots c_r$; un système de r nombres (qui définit le module lui-même) conduit donc à un système quadratique de degré r — d'où la relation entre les modules et les classes : les divers systèmes formés avec les bases d'un module appartiennent à la même classe. M. Steinitz développe alors l'arithmétique des modules (divisibilité, module principal d'une classe, congruences suivant les modules, étude du système des restes incongrus, isomorphisme de ces systèmes, conditions pour qu'un module soit le plus grand commun diviseur ou le plus petit commun multiple d'autres modules, etc.).

Steinitz (*E.*). — Continuité et dérivée (p. 58-69).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 60-127.

Considérations sur la continuité et la dérivabilité destinées à mettre en lumière, de façon naturelle, l'existence de fonctions continues sans dérivée.

Wellstein (*J.*). — Sur la théorie des fonctions et des invariants d'un domaine binome (p. 70-80).

Quand on transporte la théorie de Galois des équations algébriques aux fonctions algébriques d'une variable, les fonctions definies par une équation binome (dont le groupe de monodromie est cyclique) se présentent d'abord à l'attention; l'auteur veut établir qu'elles méritent aussi d'être étudiées au point de vue de la théorie des formes et des invariants algébriques.

Les fonctions binomes dont les points de ramification sont donnés par les zéros de la forme binaire d'ordre n : $f(x_1|x_2) = 0$, sont uniformes dans le domaine algébrique T defini par $f(x_1|x_2) = 1$, ou en posant

$$x_1 = \frac{x}{s}, \qquad x_2 = \frac{1}{s}, \qquad s^n = f(x|1);$$

les intégrales fondamentales de première, deuxième, troisième espèce s'expriment avec des formes binaires en $x_1|x_2$.

Si $f(x|1)$ n'a que des facteurs différents, l'intégrale de première espèce la plus simple

$$\omega_x = \int (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) = -\int (x\,dx);$$

les autres sont :

$$\int \varphi_{\mu\nu}(x_1|x_2)\,d\omega_x,$$

quand on a choisi pour $\varphi_{\mu\nu}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, \mu$), $(\mu + 1)$ formes linéaires indépendantes d'ordre μ quelconque d'ailleurs :

$$\mu = 0, 1, \ldots, (n-3); \qquad \varphi_0 = 1;$$

le genre

$$p = 1 + 2 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Au lieu de la forme habituelle, l'auteur prend pour l'intégrale de troisième espèce, d'après Weierstrass et Christoffel, la fonction R qui devient infinie comme un logarithme avec le poids 1 en un point du domaine T, avec le poids $-\frac{1}{n}$ aux n points à l'infini du domaine : si l'on transporte ces dernières discontinuités aux n points à distance finie superposés $(z_1\theta^k, z_2\theta^k)$, $(\theta^n = 1)$, $f(z_1, z_2) = 1$ cette intégrale s'écrit :

$$R_z(x|y) = \int \frac{1}{n}\left[1 + \frac{(zx)}{(zy)} + \frac{(zx)}{(zy)} + \ldots + \frac{(zx)^{n-1}}{(zy)^{n-1}}\right]\left(\frac{(y\,dx)}{(yx)} - \frac{(z\,dx)}{(zx)}\right).$$

L'intégrale normale de troisième espèce est alors

$$H_{\xi,\eta}(x) = R_\xi(x|y) - R_\eta(x|\eta)$$

et l'on en déduit les intégrales de seconde espèce à la manière habituelle.

En introduisant par la substitution à déterminant (-1) :

$$x_1 = t_1 \xi_1 + \frac{1}{n} \frac{\partial f(t_1 | t_2)}{\partial t_2} \xi_2, \quad x_2 = t_2 \xi_1 - \frac{1}{n} \frac{\partial f(t_1 | t_2)}{\partial t_1} \xi_2,$$

les *variables types* d'Hermite ξ_1 et ξ_2, on obtient la *forme type*

$$1 : f(x_1, x_2) = \sum \binom{n}{\nu} u_\nu \xi_1^{n-\nu} \xi_2^\nu$$

qui permet de représenter typiquement les covariants de formes $f(z_1, z_2)$, $\varphi(x_1, x_2)$, ...

L'auteur observe qu'on a ici

$$\frac{d\varphi(x_1, x_2)}{d\omega_x} = h(\varphi a) \varphi_x^{h-1} a_x^{n-1}$$

avec $f(x_1, x_2) = a_x^n$, $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_x^h$, c'est-à-dire que la différentiation par rapport à ω_x est identique au *rejet* (Ueberschiebung) avec la forme f.

Toute forme linéaire $\lambda = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ vérifie donc l'équation de Riccati (généralisée)

$$\frac{d^2 \lambda}{d\omega_x^2} + \Pi \lambda = 0,$$

où $\Pi = \frac{n-1}{2} (aa')^2 a_x^{n-2} a_x'^{n-2}$ est le hessien de f.

Au moyen des formules de récurrence qui lient les formes u_ν (coefficients de la forme-type de f) et les formes v_ν [coefficients de la forme-type de $\varphi(x_1, x_2)$], l'auteur établit aisément les équations différentielles satisfaites par le hessien

$$\tau = \frac{(n-1)}{2} (aa')^2 a_t^{n-2} a_t'^{n-2} \qquad \text{de} \qquad f(t_1, t_2)$$

et par une forme quelconque $\varphi(t_1, t_2)$ d'ordre h.

L'équation vérifiée par τ présente un intérêt particulier. Si l'on pose

$$-p(\omega_t) = \frac{(n-2)^2}{n-1} \tau$$

et si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont les valeurs de ω_t aux n points de ramification, la fonction $p(\omega_t)$ ne devient infinie qu'aux points $\omega_1, \ldots, \omega_n$: on a dans le voisinage de ω_ν

$$p(\omega_t) = \frac{1}{(\omega_t - \omega_\nu)^2} + \text{partie continue},$$

et l'on peut choisir la limite inférieure de l'intégration de façon que $\omega_1 = 0$ par exemple. La fonction $p(\omega_t)$ coïncide avec la fonction p de Weierstrass *toutes les fois où elle est uniforme en* ω_t. Ceci arrive en particulier si f est biquadratique ou l'une des formes polyédrales.

L'auteur étudie ensuite les équations différentielles vérifiées par les fonctions rationnelles du domaine T, et enfin les zéros des formes f et φ (et leurs fonctions symétriques) regardés comme dépendant de la variable ω_t.

Abraham (M.). — Sur quelques équations différentielles qui interviennent dans les problèmes de vibrations (p. 80-112).

L'auteur se propose d'étudier les vibrations des milieux continus en cherchant *des expressions, indépendantes des coordonnées, des lois physiques qui régissent la propagation des ondes*, puis en introduisant, comme l'a fait Lamé, des coordonnées curvilignes générales. Les symboles de la Géométrie vectorielle donneront un moyen commode de parvenir à ce but quand on leur attribue leur sens géométrique (HEUVISIDE, *Electrical papers*, t. I, art. 23).

Soit α une quantité scalaire, fonction uniforme et continue de la position d'un point; on définit le vecteur

$$\mathfrak{B} = -\nabla\alpha$$

par la condition que l'intégrale curviligne, prise le long d'une courbe ρ allant du point (1) au point (2), soit égale à $\alpha_1 - \alpha_2$:

$$\int_1^2 \mathfrak{B}_\rho \, d\rho = \alpha_1 - \alpha_2 .$$

Si l'on connaît un vecteur $\mathfrak{B}$ dont l'intégrale prise le long d'une courbe fermée quelconque ne soit pas nulle, on définit le nouveau vecteur

$$\mathfrak{C} = \text{curl.}\,\mathfrak{B}$$

par la condition que l'intégrale de surface de la composante normale de $\mathfrak{C}$, étendue à une portion σ de surface ouverte, soit égale à l'intégrale curviligne de $\mathfrak{B}$ le long du contour ρ, qui limite cette surface :

$$\int_\sigma \mathfrak{C}_\nu \, d\sigma = \int_\rho \mathfrak{B}_\rho \, d\rho$$

la normale ν forme avec la direction choisie sur ρ un tétraèdre direct). Si $\mathfrak{C}$ est un vecteur pour lequel $\int \mathfrak{C}_\nu \, d\sigma$ prise le long d'une surface fermée n'est pas nulle, on définit la quantité scalaire

$$\delta = \text{div.}\,\mathfrak{C}$$

par la condition que l'intégrale $\int_\tau \delta \, d\tau$ étendue à un volume τ soit égale à $\int_\sigma \mathfrak{C}_\nu \, d\sigma$, en prenant pour ν la normale extérieure au volume :

$$\int_\tau \delta \, d\tau = \int_\sigma \mathfrak{C}_\nu \, d\sigma$$

Si l'on choisit des coordonnées curvilignes orthogonales (u, v, w) conduisant à

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

de façon à déterminer de manière uniforme un point par ses coordonnées, les

composantes de $\mathfrak{B} = -\nabla\alpha$ sont, suivant les tangentes aux lignes coordonnées

$$B_u = U\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \qquad B_v = -V\frac{\partial\alpha}{\partial v}, \qquad B_w = -W\frac{\partial\alpha}{\partial w},$$

u, v, w étant pris positivement.

Les composantes de $\mathfrak{C} = \text{curl. } \mathfrak{B}$ seront de même :

$$C_u = VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B_w}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{B_v}{V}\right)\right], \qquad \ldots$$

et la divergence d'un vecteur $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = UVW\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C_u}{VW}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C_v}{WU}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{C_w}{UV}\right)\right].$$

On supposera le milieu tel que toutes les vibrations s'y propagent avec une vitesse commune c; $\mathfrak{F}$ désignera le vecteur qui caractérise cette propagation (déplacement élastique pour les vibrations mécaniques, forces magnétiques pour les ondes électriques). La variation de $\mathfrak{F}$ sera définie par le facteur $e^{\mathfrak{S}ct}$ ou $\mathfrak{S}$ est une quantité complexe à partie réelle positive (vibrations amorties) ou nulle (vibrations périodiques). Un vecteur $\mathfrak{F}$ affecté du facteur $e^{-\mathfrak{S}ct}$ sera dit *vecteur d'onde* si ses composantes F_x, F_y, F_z vérifient les équations :

$$\mathfrak{S}^2 F_x = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} = \Delta F_x,$$

$$\mathfrak{S}^2 F_y = \Delta F_y, \qquad \mathfrak{S}^2 F_z = \Delta F_z$$

qu'on peut réunir dans la condition unique :

$$\mathfrak{S}^2\mathfrak{F} = \nabla \text{ div. } \mathfrak{F} - \text{curl. curl. } \mathfrak{F}.$$

M. Abraham définit les ondes *longitudinales* par la condition

$$\text{curl. } \mathfrak{F} = 0,$$

les ondes *transversales* par la condition div. $\mathfrak{F} = 0$, ce qui est d'accord avec ce qu'on sait pour les ondes planes. On a alors pour la propagation des premières

$$\mathfrak{S}^2\mathfrak{F} = +\nabla \text{ div. } \mathfrak{F}$$

et pour celle des ondes transversales

$$\mathfrak{S}^2\mathfrak{F} = -\text{curl. curl. } \mathfrak{F}.$$

L'étude des unes et des autres comprend celle de tous les mouvements vibratoires d'un milieu homogène et isotrope — puisqu'un tel mouvement pour un solide élastique se décompose en vibrations longitudinales et vibrations transversales (avec vitesse de propagation différente), que les fluides n'admettent que des vibrations longitudinales et que les vibrations électromagnétiques et lumineuses sont transversales.

La recherche des vibrations longitudinales se ramène à celle d'une quantité

scalaire $\sigma = \text{div.}\,\vec{\pi}$ qui doit satisfaire à l'équation $\xi^2\sigma = \text{div.}\,\Delta\sigma$; on a en effet :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\xi^2}\nabla\sigma.$$

Pour les vibrations tranversales en introduisant le vecteur auxiliaire $\mathfrak{G}$ défini par

$$\xi\,\mathfrak{G} = \text{curl.}\,\vec{\pi},$$

on aura

$$\xi\,\vec{\pi} = \text{curl.}\,\mathfrak{G},$$

d'après l'équation de propagation. [Ce système coïncide avec celui qui régit les vibrations électromagnétiques d'après Heaviside et Hertz.] Les deux équations précédentes donnent en coordonnées curvilignes les six équations :

$$-\xi\,G_u = VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_v}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{F_w}{V}\right)\right], \qquad \ldots$$

$$\xi\,F_u = VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_v}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{G_w}{V}\right)\right], \qquad \ldots$$

qu'on ne ramène pas en général à une équation unique.

Ceci a cependant lieu *si* $\vec{\pi}$, $\mathfrak{G}$ *étant indépendants de l'une des variables* w, U *et* V *n'en dépendent pas non plus.*

En posant $A = \frac{F_v}{W}$, A vérifie l'équation différentielle

$$\xi^2 A = \frac{UV}{W}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial A}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{WV}{U}\frac{\partial A}{\partial w}\right)\right]$$

et l'on aura

$$\xi\,G_u = VW\frac{\partial A}{\partial w}, \qquad \xi\,G_w = UW\frac{\partial A}{\partial u}$$

(une seconde solution de *la même équation* donnerait de même F_u, F_w, G_w).

Cette équation, rapprochée de celle qui régit les ondes transversales dans la même hypothèse :

$$\xi^2\sigma = UVW\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{WV}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\sigma}{\partial w}\right)\right]$$

montre que ces équations ne sont identiques que si W *est indépendant de* u et v (on peut alors prendre $W = 1$), on est dans ce cas si les surfaces $w = \text{const.}$ sont des plans parallèles. Il n'y a donc qu'une seule équation différentielle pour les vibrations à deux dimensions :

$$\xi^2 Z = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial Z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial Z}{\partial w}\right)\right].$$

Si le mouvement vibratoire est symétrique autour d'un axe, on peut prendre pour w l'angle d'un plan méridien passant par cet axe avec un méridien fixe; ρ la distance d'un point à l'axe $\rho = \frac{1}{W}$, on a donc pour les ondes longitudinales

$$\xi^2\sigma = UV\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial u}\left(\rho\frac{U}{V}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial w}\left(\rho\frac{V}{U}\frac{\partial\sigma}{\partial w}\right)\right]$$

et l'équation en A pour les ondes transversales s'en déduit en remplaçant ρ par $\frac{1}{\rho}$.

M. Abraham définit dans les plans $w = \text{const.}$ la position d'un point par ses coordonnées cartésiennes z, ρ; en représentant ce plan d'une manière conforme sur le plan (u, v)

$$z + i\rho = \psi(u + vi)$$

le rapport de deux éléments linéaires correspondants est

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{V} = |\psi'(u + iv)|,$$

celui de deux éléments de surface est

$$\frac{1}{UV} = |\psi'(u + iv)|^2 = h.$$

L'équation qui régit les vibrations à deux dimensions est alors

$$(a) \qquad Z\mathfrak{Z}^2 h = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2},$$

celle des vibrations longitudinales (symétrie autour d'un axe)

$$(b) \qquad \tau\mathfrak{Z}^2 h = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial u}\left(\rho\frac{\partial\tau}{\partial u}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial v}\left(\rho\frac{\partial\tau}{\partial v}\right),$$

d'où l'on déduit celle des vibrations transversales (b') en remplaçant τ par A et ρ par $\frac{1}{\rho}$.

Quand est-il possible de satisfaire à ces équations par le produit d'une fonction de u par une fonction de v ?

Pour (a), il faut $h = \alpha(u) + \beta(v)$; pour (b), (b') il faut en outre

$$\rho = \gamma(u)\,\delta(v).$$

La première condition n'est vérifiée que si $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont des ellipses et des hyperboles homofocales (ou cas limites); dans ce cas, la seconde condition est aussi satisfaite (H. Weber).

L'introduction des coordonnées elliptiques par la formule

$$z = \rho i = f\cos(u + vi)$$

qui donne $h = f^2(\cos^2 ui - \cos^2 vi)$, puis celle de x et y :

$$x = \cos ui, \qquad y = \cos vi$$

conduit l'auteur aux trois formes, où $p = \mathfrak{Z}f$:

$$(a_1) \qquad Z p^2(x^2 - y^2) = \sqrt{1 - x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1 - x^2}\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \sqrt{1 - y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1 - y^2}\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

$$(b_1) \qquad \tau p^2(x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1 - x^2)\frac{\partial\tau}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1 - y^2)\frac{\partial\tau}{\partial y}\right],$$

$$(b'_1) \qquad \mathrm{A}\, p^2(x^2 - y^2) = (1 - x^2)\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2}$$

qui possèdent les solutions particulières (*fonctions normales*),

$$Z_n = B_n(y)\,C_n(x), \qquad z_n = L_n(y)\,M_n(x), \qquad \Lambda = E_n(y)\,H(x),$$

où les facteurs vérifient des équations différentielles linéaires du second ordre, faciles à former : elles possèdent les points singuliers ± 1, et leurs intégrales sont indéterminées à l'infini.

Après avoir fixé les conditions qu'entraîne pour les solutions particulières ainsi obtenues l'uniformité du vecteur d'onde, M. Abraham admet que *tout état vibratoire de période et d'amortissement déterminés se laisse représenter par une somme de fonctions normales*, et calcule les coefficients des divers développements. Il retrouve ainsi, entre autres, des résultats partiels de Mathieu, Heine, Niven.

Enfin, la propriété d'*orthogonalité* des fonctions normales le conduit à une nouvelle expression des solutions des équations aux dérivées partielles par des intégrales définies, l'*intégrante* étant une solution convenable de ces équations. Il en déduit en particulier l'expression asymptotique des intégrales au voisinage du point à l'infini.

Alors qu'on se bornait, jusqu'à présent, à l'étude de corps voisins de la sphère ou du cylindre circulaire, on peut aborder (M. Abraham, *Wied. Ann.*, t. LXVI) l'étude des vibrations d'un *ellipsoïde de révolution très allongé*.

Baur (*L.*). — Sur les racines distinctes d'une équation algébrique et leurs ordres de multiplicité (p. 113-119).

Soient $F(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} = 0$ une équation à coefficients constants, s_i la somme des puissances i de ses racines et $D_1, D_2, \ldots, D_n$ les déterminants symétriques déduits du Tableau

$$[s_{i-j}] \quad \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n-1} \\ s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-2} \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{2-n} & s_{3-n} & s_{4-n} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}$$

en prenant $1, 2, \ldots, n$ éléments de la diagonale principale : par exemple,

$$D_2 \quad \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 \end{vmatrix};$$

M. Baur a montré (*M. A.*, t. L) que si D_i est le dernier terme non nul de la suite $D_1, \ldots, D_n$, l'équation $F(y) = 0$ a i racines distinctes données par l'équation

$$B_i(y) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{i-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_i & y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_i & s_{i+1} & \ldots & s_{2i} & y^i \end{vmatrix} = D_i y^i + \ldots = 0.$$

Le discriminant

$$\Delta B_i = \frac{D_i^{i+1}}{h_1 h_2 \ldots h_i},$$

où les λ sont les ordres de multiplicité de ces racines.

Si l'on se donne la somme

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho = n$$

et le produit

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\rho = p,$$

les entiers positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ sont déterminés *d'une manière unique* par ces deux équations, d'où résulte que l'égalité (1) où

$$\sum_1^\rho \lambda_i = n$$

est une condition *suffisante* pour que $F(y) = 0$ possède des racines d'ordres de multiplicité $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ (quand, bien entendu, $D_{\rho+1} = \ldots = D_n = 0$, $D_\rho \neq 0$).

L'auteur termine en donnant les relations qui lient les D_i aux fonctions considérées par Sylvester dans la même question.

Liebmann (*H.*). — Lignes les plus courtes et les plus droites dans un complexe linéaire (p. 120-126).

Exemple simple où le principe de la moindre action $\left(\delta \int \sqrt{T}\, dt = 0\right)$ ne donne pas les vraies trajectoires (en supposant une condition non holonome).

D'abord, dans le cas où la force est nulle, les trajectoires sont données par le *principe des trajectoires les plus droites* de Hertz (*Geradesten Bahnen*): le principe de la moindre action $\delta \int ds = 0$ donne les lignes *les plus courtes* qui ne coïncident avec les précédentes que dans le cas d'holonomie.

Dans le cas non holonome, les trajectoires dépendent de trois paramètres, les lignes les plus courtes de quatre paramètres (il faut se donner, pour les déterminer, un point, la tangente et le rayon de courbure en ce point).

L'intérêt de l'étude des lignes les plus courtes est d'ordre géométrique : c'est l'extension de la théorie des géodésiques à des équations aux différentielles totales non intégrables. M. Liebmann considère l'équation

$$x\,dy - y\,dx - dz = 0$$

et définit les lignes les plus courtes par les équations

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho^2 d\varphi = \left(\frac{\rho^2 c}{\rho^2 + 1} + a\right) \sqrt{d\rho^2 - \rho^2 d\varphi^2 (1 + \rho^2)}, \qquad z = \int \rho^2 d\varphi.$$

Si l'on pose $\rho^2 = u$, on peut écrire

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \int du \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{(u+1)[u(u-1) - \alpha^2 (u - u_0)^2]}};$$

l'auteur étudie les diverses formes de cette courbe (qui n'a ni rebroussements, ni inflexions) et en déduit les formes des lignes les plus courtes dans l'espace.

Pasch (*M.*). — Sur un invariant de la forme ternaire trilinéaire (p. 128-129).

Hirsch (*A.*). — Sur des relations bilinéaires entre les intégrales hypergéométriques d'ordre supérieur (p. 130-166).

L'auteur reprend les recherches de divers auteurs, Pochammer, Hossenfelder, Goursat, Jordan, etc., sur les intégrales hypergéométriques d'ordre supérieur pour y introduire la théorie des formes et parvenir à des formes *normales* (au sens de F. Klein et E. Waelsch), à signification claire, des équations différentielles de la théorie. Indiquons brièvement les résultats :

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{r+1}$, $(r+2)$ points différents et à distance finie du plan complexe, $s_0, s_1, \ldots, s_{r+1}$ des nombres tels que

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{r+1} = r,$$

$$U = (u - a_0)^{s_0 - 1}(u - a_1)^{s_1 - 1} \ldots (u - a_{r+1})^{s_{r+1} - 1};$$

une intégrale hypergéométrique d'ordre supérieur est l'intégrale curviligne

$$y = \int_{\mathrm{L}} U\, du,$$

prise le long d'un *double contour* (Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III) qui entoure deux des points a_ν.

Si l'on regarde y comme fonction de a_0, qu'on remplacera par x, y vérifie l'équation différentielle d'ordre r

$$(s_0 - 1)_r\, (f, y)_r + (s_0 - 1)_{r-1}\, \varphi, y)_{r-1} = 0,$$

ou

$$(s_0 - 1)_r = \frac{(s_0 - 1)!}{r!\,(s_0 - 1 + r)!}$$

et où $(f, y)_r$, par exemple, représente le $r^{\text{ième}}$ *rejet* (*Ueberschiebung*) de f avec y

$$(f, y)_r = \sum (-1)^\alpha r_\alpha f_\alpha y_{r-\alpha} \quad \text{(notation de Hilbert)};$$

enfin les formes f et φ sont

$$f = \prod_{\lambda=1}^{r+1} (x - a_\lambda), \qquad \varphi = \frac{1}{r} f(x) \sum_{\lambda=1}^{r+1} \frac{1}{x - a_\lambda} \left(\frac{s_0 - r}{r+1} + s_\lambda \right).$$

Cette équation appartient à la classe étudiée par Fuchs : pour $x = a_\lambda$, les racines de son équation déterminante sont

$$\rho = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad r - 1; \quad s_0 + s_\lambda - 1,$$

pour $x = \infty$, elles sont

$$\rho = (1 - s_0), \quad (2 - s_0), \quad \ldots, \quad (r - s_0).$$

Les intégrales hypergéométriques, par l'introduction de variables homogènes selon la méthode de Klein, se présentent comme des covariants transcendants des formes f et φ.

Si l'on part de l'équation différentielle en y choisissant arbitrairement $s_0 - 1$, ordre de y, la forme $f(x)$ d'ordre $r+1$ à racines distinctes et la forme $\varphi(x)$ d'ordre $(r+1)$, on en déduira les s_i et l'on reconnaîtra que l'équation admet, comme solutions, des intégrales hypergéométriques. Supposons que *les parties réelles de* $s_0, s_1, \ldots, s_{r-1}$ *soient des fractions positives inférieures à l'unité*; on peut alors former r intégrales linéairement indépendantes.

Il en existe $(r+1)$

$$y_i = \int_x^{a_i} U\,du,$$

liées par l'unique relation

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1} (\rho_{\lambda+1} - \rho_\lambda) y_\lambda = 0,$$

où

$$\rho_\lambda = e^{i\pi(s_0+s_1+\ldots+s_{r-1})}.$$

M. Hirsch, à l'aide d'un théorème qu'il a donné ailleurs (*Cf.* aussi Pick, *Wiener Berichte*, t. CI), forme l'adjointe de l'équation en y; elle s'écrit

$$(-1)^r(\sigma_0 - 1)_r \{f, \eta_i\}_r = (-1)^{r-1}(\sigma_0 - 1)_{r-1} \{\varphi, \eta_i\}_{r-1} = 0$$

avec $\sigma_0 = r + 1 - s_0$, et possède $(r+1)$ intégrales

$$\eta_i = \int_x^{a_i} V\,dv, \qquad V = (v - x)^{r-2-s_0} \prod_{\lambda=1}^{r+1} (v - a_\lambda)^{-s_\lambda},$$

liées par l'unique relation

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1} \left(\frac{1}{\rho_{\lambda+1}} - \frac{1}{\rho_\lambda}\right) \eta_\lambda = 0.$$

Les fonctions U et V sont *à multiplicateurs* $\left(\rho_\lambda \text{ et } \frac{1}{\rho_\lambda}\right)$ *inverses*.

L'équation en y peut être sa propre adjointe, si $r = 2p$ et, en outre,

$$s_0 = p - \frac{1}{2}, \qquad s_1 = \ldots = s_{r-1} = \frac{1}{2};$$

elle a, dans ce cas, la forme simple $\{f, y\}_{2p} = 0$ et on l'intègre avec les $(2p+1)$ périodes d'une intégrale hyperelliptique de première espèce de genre p

$$y_i = \int_x^{a_i} \frac{(u - x)^{p-\frac{3}{2}}\,du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (i = 1, \ldots, 2p+1)$$

qui sont liées par la relation

$$\sum (-1)^i y_i = 0.$$

On conclut de là l'existence de relations bilinéaires entre les périodes d'une intégrale hyperelliptique. Dans le cas général, si l'on pose

$$Y_{\mu\nu} = \int_{a_0}^{a_1} \prod_{\lambda=0}^{r} (u - a_\lambda)^{s_\lambda - 1} u^\lambda \, du \qquad (\mu = 1, \ldots, r;\ \nu = 0, 1, \ldots),$$

$$H_{\nu\mu} = \int_{a_0}^{a_1} \prod_{\lambda=0}^{r} (v - a_\lambda)^{s_\lambda - 1} v^\lambda \, dv \qquad (\mu = 1, \ldots, r;\ \nu = 0, 1, \ldots)$$

Ces intégrales vérifient les $\frac{r(r-1)}{2}$ relations bilinéaires

$$\sum C_{ij} Y_{\mu\nu} H_{\nu\mu} = 0, \qquad \mu + \nu = (r-1),$$

$$\sum C_{ij} Y_{\mu\nu} H_{\nu\mu} = \frac{\pi \sin \pi s}{s - \mu - r}, \qquad \mu + \nu = (r-1),$$

où les coefficients C_{ij} sont donnés par

$$C_{ii} = \sin \pi s_i \sin \pi (s - s_i),$$

$$C_{ij} = -e^{\pi s_i \sqrt{-1}} \frac{\rho_i}{\rho_j} \sin \pi s_i \sin \pi s_j \qquad (j < i),$$

$$C_{ij} = -e^{\pi s_i \sqrt{-1}} \frac{\rho_i}{\rho_j} \sin \pi s_i \sin \pi s_j \qquad (j > i).$$

L'introduction des intégrales $y_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ dépendantes des premières conduit à une forme plus simple de ces relations bilinéaires.

Soit

$$\Gamma_{\mu\nu} = 0$$

pour

$$(\mu + \nu) = (r-1); \qquad \Gamma_{\mu\nu} = \frac{\pi \sin \pi s}{(s - \mu - r)}$$

pour

$$\mu + \nu = r - 1;$$

si l'on pose

$$\Gamma = |\Gamma_{\mu\nu}| \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots, r-1),$$

$$C = |C_{ij}|, \qquad Y = |Y_{\mu\nu}|, \qquad H = |H_{\nu\mu}|,$$

on aura

$$\Gamma = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \pi^r (\sin \pi s)^r \frac{(s - r - 1)!}{(s - 1)!},$$

$$C = (\sin \pi s)^{r-1} \prod_{j=0}^{r} \sin \pi s_j$$

et

$$Y.H = \frac{\Gamma}{C};$$

M. Hirsch calcule également Y et H par une méthode directe. Il calcule aussi les $\Gamma_{\mu\nu}$, qui sont rationnels en $a_0, a_1, \ldots, a_r$ pour $\mu + \nu = (n-1)$ au moyen d'une méthode employée par Riemann pour établir les relations bilinéaires entre les périodes d'une intégrale abélienne.

Enfin, il retrouve à nouveau les relations bilinéaires entre les Y_α et les H_α par une application du principe d'Abel (échange du paramètre et de l'argument).

Juga (*G.*). — Sur la détermination des constantes d'une surface minima cerclée (p. 166-170).

Un cercle ne peut engendrer une surface minima que s'il reste parallèle à un plan (Enneper) : cette surface est alors définie par

$$x = a(\varphi) + \rho\cos w, \qquad y = b(\varphi) + \rho\sin w, \qquad z = z(\varphi),$$

où l'on a

$$\varphi = \frac{\rho}{\cos\varphi}, \qquad \varphi = am(u, \alpha),$$

$$a = \rho\alpha' u - \frac{\rho}{\alpha}[\operatorname{tang}\varphi\,\Delta\varphi - E_1(\varphi)], \qquad b = 0, \qquad z = \rho\alpha u.$$

Dans ces formules, ρ désigne une constante arbitraire, α le module, α' son complément,

$$E_1(\varphi) = E(u) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi.$$

L'auteur cherche dans quelle mesure on peut écarter deux cercles de rayons donnés de façon que la surface minima cerclée qui les contient existe.

Schwering (*K.*). — Sur la théorie des nombres de Bernoulli (p. 171-173).

On sait qu'on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - B_1\frac{1}{x^2} + B_2\frac{1}{x^4} + \ldots;$$

M. Schwering indique pour le premier membre la nouvelle expression

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1.2}{3(x+1)(x+2)(x+3)} - \ldots - \frac{(h-1)!}{h(x+1)\ldots(x+h)}, \quad \ldots,$$

d'où résultent les propriétés classiques des nombres B_3, B_5, ...

Burnside (*W.*). — Note sur le groupe simple d'ordre 504 (p. 174-176).

Ce groupe est complètement défini par les relations

$$A^2 = 1, \qquad B^2 = 1, \qquad (AB)^7 = 1, \qquad (A^3BA^3A^3B)^3 = 1.$$

Il est formé par les substitutions

$$z = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 0 \pmod 2,$$

où a, b, c, d sont des puissances d'une racine de la congruence irréductible

$$x^4 - x - 1 = 0 \pmod 2$$

et engendré par

$$z' = xz \ (\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad z' = \frac{z + x^2}{x^2 z + 1} \ (\mathrm{B}).$$

Broden (*T.*). — Sur l'intégrale de Dirichlet (p. 177-227).

L'auteur se propose, en reprenant les recherches classiques de Dirichlet, Riemann, Dini, Kronecker sur les conditions de validité de l'équation

$$\lim_{\omega = \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0) \qquad (0 < a < \pi),$$

d'aboutir à des conclusions qui épuisent *dans un certain sens* la question et de retrouver, par une déduction simple, tous les résultats déjà acquis.

Il considère l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{\sin x} dx \qquad (0 < a < 1)$$

et observe qu'on peut se borner à supposer $f(+0) = 0$, la fonction $f(x)$ étant *intégrable* (Riemann). Il admettra même que l'ensemble des points de discontinuité de toute fonction intégrable considérée est *réductible* au sens de Cantor.

a. Soit

$$\mathrm{J}_\alpha = \int_0^{\alpha \omega} f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{\sin x} dx \qquad \text{et} \qquad |f(x)| < g(\alpha);$$

on a

$$\lim_{\omega = \infty} \mathrm{J}_\alpha = 0,$$

lorsque

$$\lim_{\omega = \infty} g(\alpha) \omega \alpha(\omega) = 0.$$

b. Cette conclusion subsiste si

$$\lim_{\omega = \infty} g(\alpha) \log \omega \alpha(\omega) = 0.$$

c. On a encore $\lim \mathrm{J}_\alpha = 0$ dès que $\dfrac{\omega}{\nu(\alpha)}$ ou $\omega \displaystyle\int_{\frac{1}{\omega}}^{\alpha} \frac{dx}{x\nu(x)}$ demeure fini: $x\nu(x)$ est une fonction uniforme et positive qui est continue sauf pour $x = 0$, et qui croît constamment quand x tend vers zéro $[\nu(+0) = \infty]$, les fonctions $x\nu'(x)$, $f(x)$, $\nu(x)$ sont intégrables et la première, au moins, absolument.

Condition principale. — Il est suffisant pour

$$\lim_{\omega = \infty} \int_0^{\alpha} f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{\sin x} dx = 0 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

que la fonction $\omega(\alpha)$ qui satisfait à l'une des conditions (a, b, c) puisse être

2 ud Partie.

choisie telle que la limite, indépendante de ε, de

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \left| \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \frac{f\left(\frac{x+\alpha_i}{\omega}\right)}{x+\alpha_i} - \frac{f\left(\frac{x-\alpha_{i+1}}{\omega}\right)}{x-\alpha_{i+1}} \right\} \right|,$$

ou

$$\alpha(\omega) < \frac{\alpha_1}{\omega} \quad \alpha(\omega) = \frac{\alpha}{\omega}, \quad \frac{\alpha_m}{\omega} < \frac{\alpha_m}{\omega},$$

soit rendue plus petite que toute quantité donnée.

M. Broden déduit de là trois séries de conditions plus particulières, qui comprennent les conditions diverses de Dini et Kronecker, établies ainsi d'une manière uniforme.

Nielsen (*Niels*). — Sur le produit de deux fonctions cylindriques (p. 229-242).

Développement de $J^{(p)}(x)J^{(q)}(x)$; formules de M. Lommel.

Une série de puissances $\sum b_n x^{2n}$ = S qui est une fonction paire de x peut être développée en série

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{p+q} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J^{(p+n)}(x) J^{(q+n)}(x),$$

où p, q désignent deux constantes quelconques (entiers négatifs exclus); le développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de S, les a_n sont donnés par

$$a_n = 2^{q-1}(q-1)!\,(p-1)! \sum_{0}^{n} \frac{(q+p+2m-1)}{(p-m)!} B(q-m-1, p-m-1)\Gamma(q+p-2m-1)\, 2^{2m} b_n.$$

L'auteur déduit de là diverses formules de M. Neumann et de M. Lommel.

Wiman (*A.*). — Sur l'expression des groupes symétriques et alternés de permutations comme groupes de substitutions linéaires d'un nombre minimum de variables (p. 243-270).

A tout groupe fini de substitutions linéaires, M. Klein a fait correspondre un problème (Formenproblem) qui consiste à déterminer les variables transformées en partant des invariants (formes invariantes) du groupe : ce problème comprend la résolution algébrique des équations. Tous les groupes isomorphes conduisent à un même problème qu'on peut formuler avec le nombre minimum de variables : c'est le *problème normal* de Klein.

L'équation du cinquième degré a été résolue par Klein au moyen des formes binaires, invariants du groupe de l'icosaèdre; il a montré aussi que les équations de degrés 6 et 7 peuvent être résolues avec un problème normal à 4 variables : on a donné plus tard un moyen d'exprimer le groupe alterné de 6 lettres avec des substitutions à 4 variables. M. Wiman avait déjà démontré que, pour $n = 7$,

le nombre minimum de variables est $(n-2)$; *il établit ici que le groupe symétrique ou alterné à n variables ($n=7$) ne sont isomorphes à aucun groupe de substitutions de moins de $(n-2)$ variables.*

Si les racines $x_1, \ldots, x_n$ sont liées par $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, on peut les regarder comme coordonnées homogènes *surabondantes* d'un espace à $(n-2)$ dimensions : il n'y a donc aucune réduction possible dans le nombre des variables pour $n=7$.

Horn (*J.*). — Sur une équation différentielle linéaire du second ordre avec un paramètre arbitraire (p. 270-292).

L'auteur applique ici une méthode qui lui a servi antérieurement pour l'étude des intégrales irrégulières des équations linéaires (*Comptes rendus*, 17 janvier 1898) à la construction par approximations successives d'une expression asymptotique d'une intégrale *regardée comme fonction d'un paramètre qui figure dans l'équation différentielle.*

Il a choisi l'équation, qui intervient en Physique mathématique,

$$(\alpha) \qquad \frac{d}{dx}\left(A\frac{dy}{dx}\right) + (k^2 B + C)y = 0,$$

où k^2 est un paramètre arbitraire, qui peut être complexe; A, B, C sont des fonctions réelles de la variable réelle x qui sont continues ainsi que toutes leurs dérivées dans l'intervalle a, x, b; A et B sont positifs dans cet intervalle. Une intégrale de cette équation qui prend pour $x = a$, ainsi que sa dérivée, une valeur indépendante de k^2 est une fonction transcendante *entière* de k^2; on déduit du développement

$$y = \cos k\theta\left(\frac{\theta}{k} - \frac{\theta^2}{k^2} + \ldots\right) + \sin k\theta\left(\frac{\theta}{k} - \frac{\theta^2}{k^2} + \ldots\right)$$

qui vérifie formellement l'équation (α), les propriétés caractéristiques de y, en particulier son allure au voisinage du point essentiel $\frac{1}{k} = 0$, et aussi les zéros et le genre de cette fonction entière.

On sait qu'il existe des solutions de (α), *solutions distinguées*, qui satisfont aux conditions

$$\frac{dy}{dx} - hy = 0 \quad \text{pour} \quad x = a, \qquad \frac{dy}{dx} + Hy = 0 \quad \text{pour} \quad x = b$$

(α). H positifs, pouvant être nuls ou infinis, lorsque k^2 est un zéro d'une certaine fonction transcendante entière $F(k^2)$. Parmi ces zéros (*valeurs distinguées*), il en existe une infinité qui sont réels et positifs; M. Horn montre que cela résulte aussi de l'expression asymptotique des grandes valeurs de k^2 et construit les expressions asymptotiques des solutions distinguées correspondantes.

Kohn (*G.*). — Sur les cubiques gauches qui touchent la développable formée par les tangentes à une autre cubique en quatre, cinq ou six points (p. 292-318).

L'auteur se propose d'établir que la Géométrie du système de deux cubiques gauches est identique à l'étude d'une correspondance (3,3) : il a déjà donné ailleurs (Francfort, 1896) la correspondance (m, n) comme image géométrique des invariants des formes doublement binaires.

Les cubiques gauches qui touchent en quatre (ou cinq) points la développable Δ, formée par les tangentes à une cubique Γ, se partagent en deux classes; celles qui touchent Δ en six points forment un système irréductible : l'auteur définit géométriquement ces systèmes; le dernier le conduit à des résultats particulièrement intéressants.

Sujet du prix de Mathématiques à décerner en 1901, proposé par l'Académie des Sciences de Toulouse (p. 319-320).

Fricke (*R.*). — Sur un groupe simple de 504 opérations (p. 321-339).

Développement d'une représentation concrète du groupe simple (déjà signalé par Mathieu), retrouvé par Cole, qui permet une étude de ses sous-groupes invariants.

Soit

$$\omega = 2\cos\frac{\pi}{7}$$

la plus grande racine de l'équation

$$(1) \qquad \omega^3 - \omega^2 - 2\omega + 1 = 0;$$

le groupe Γ de la fonction *triangulaire* $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ est engendré par les deux substitutions

$$V_0 = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega - 1 & 1 - \sqrt{\omega - 1} \\ 1 - \sqrt{\omega - 1} & 0 - \omega - 1 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

pour lesquelles $V_0^2 = 1$, $V_1^2 = 1$, $(V_0 V_1)^7 = 1$. Il se compose de toutes les substitutions, de déterminant 1,

$$V = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{\omega - 1} & c + d\sqrt{\omega - 1} \\ c - d\sqrt{\omega - 1} & a - b\sqrt{\omega - 1} \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont des entiers du corps cubique (1) qui vérifient les congruences

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega - 1)c + d &\equiv 0, & a(\omega^2 - \omega - 1) + c - d(\omega - 1) &\equiv 0 \\ a - b - d\omega &\equiv 0, & a - b(\omega - 1) + c\omega &\equiv 0 \end{aligned} \pmod{\omega}.$$

Si a, b, c, d sont divisibles par ω, les congruences sont satisfaites identiquement; les substitutions correspondantes forment un sous-groupe Γ_ω non invariant, d'indice 63 dans Γ qui est le groupe d'un heptagone régulier formé d'arcs de cercles se coupant à angles droits. La correspondance des côtés de cet heptagone est définie par 7 substitutions de période 2, dont le produit est 1.

M. Fricke cherche et détient le plus grand sous-groupe Γ_1 de Γ_0 qui est invariant dans Γ : Γ_1 possède dans Γ_0 l'indice 8, donc dans Γ l'indice $8.63 = 504$.

En faisant correspondre à la substitution identique l'ensemble des substitutions de Γ_{-1}, on fait correspondre à Γ un groupe G_{∞}, *complémentaire* de Γ_{-1}. Le groupe Γ_1 se réduit alors à un G *abélien*, dont toutes les substitutions (sauf l'identique) ont la période 2. Le groupe G_{∞} possède 56 sous-groupes cycliques homologues G, dont chacun laisse deux points fixes; 28 groupes G_2 qui contiennent chacun un G_2 avec six points fixes; 63 groupes G_3 dont chacun laisse quatre points fixes : $56 + 63 = 28.5 + 63 = 1 + 2 = 504$. M. Fricke donne aussi tous les sous-groupes non cycliques de G_{∞} : aucun n'est invariant dans G_{∞} qui est *simple*.

Les sous-groupes les plus grands de G_{∞} sont 9 groupes homologues G_3, auxquels correspondent dans Γ, 9 groupes homologues Γ_3; l'auteur les utilise pour construire une équation algébrique de degré 9, définissant u au moyen de J, dont le groupe de *monodromie* est isomorphe à G_{∞}; cette équation a déjà été donnée par M. Goursat (*Acta Soc. Scient. Fennicæ*, t. XV); elle résulte des proportions

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (u^9 - 30u^6 + 45u^3 - 9u)^3 : (u^3 - 9)^3 : 27u^3 \\ &= (u^{12} - 18u^9 + 9u^6 - 6u^3 + 1)^3 : (u^3 - 9)^3 : (u^3 - 9u)^3. \end{aligned}$$

Horn (*J.*). — Sur les équations différentielles linéaires avec un paramètre variable (p. 350-362).

L'auteur reprend pour les étendre ses recherches antérieures (*M. A.*, t. LII) sur l'allure des intégrales d'une équation linéaire du second ordre, qui sont des fonctions entières d'un paramètre k, au voisinage du point essentiel $\frac{1}{k} = 0$.

Il ajoute quelques exemples (fonction de Bessel $J_n(x)$ regardée comme fonction de n, fonction hypergéométrique de Gauss, regardée comme fonction de α, β, γ) où ses expressions asymptotiques sont en relation avec des développements convergents (produits d'exponentielles ou séries dont les termes sont fonction rationnelle du paramètre).

Par exemple

$$J_n \sim e^{(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \alpha \log \frac{\alpha}{1+(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}} \left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots\right),$$

où $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, c'est-à-dire que si l'on pose

$$J_n = e^{(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \alpha \log \frac{\alpha}{1+(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} + \Gamma_\alpha} \left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_\mu}{n^\mu} + \frac{\Gamma_\alpha}{n^\mu}\right),$$

μ étant un entier positif, Γ_α tend uniformément vers zéro quand n croît indéfiniment, son argument restant compris entre $-\pi - \varepsilon$ et $\pi - \varepsilon$. De même,

$$\Gamma(\alpha, z, \nu) = \alpha^{\nu} e^{\alpha z} \int_z^{\infty} e^{-\alpha z} z^{\nu} \, dz = e^{\alpha z} P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = e^{\alpha z} P\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

si α croît indéfiniment, son argument restant compris entre $-\pi$ et π

Maschke (*H.*). — Démonstration d'un théorème sur les groupes de substitutions linéaires (p. 363-368).

Soit A une substitution linéaire définie par

$$z_i' = \sum_1^n a_{ik} z_k \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

si, pour toutes les substitutions A, B, C, ... d'un groupe fini, on a, *i et k étant fixes*,

$$a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = \ldots = 0 \qquad (i \neq k),$$

le groupe est *intransitif*, c'est-à-dire que les n variables se partagent en deux groupes de $n - r$ et r variables qui sont transformées séparément.

Krazer (*A.*). — Formules générales relatives aux fonctions thêta (p. 369-416).

L'auteur reprend, pour les compléter sur divers points, des recherches entreprises avec M. Prym (*Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen*, Leipzig, 1890). Une méthode de transformation des séries, qui s'y trouve appliquée aux fonctions thêta, a une portée plus générale. M. Krazer commence par l'exposer en détail :

Soit la série multiple *absolument convergente*,

$$W = \sum_{m_1, \ldots, m_q}^{\infty, \ldots, \infty} f(m_1 | \ldots | m_q),$$

dont le terme général est une fonction quelconque des indices de sommation $m_1, \ldots, m_q$ et de variables qu'il n'y a pas lieu de préciser et où les indices $m_1, \ldots, m_q$ entiers varient de $-\infty$ à $+\infty$; supposons qu'on remplace les indices m_λ par d'autres n_λ définis par

$$r m_\lambda = \sum_\nu^q \alpha_{\lambda\nu} n_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, q),$$

où r est un entier positif et les $\alpha_{\lambda\nu}$ des entiers pour lesquels $\Delta = |\alpha_{\lambda\nu}| \neq 0$, on aura en posant

$$f(m_1 | \ldots | m_q) = g(n_1 | \ldots | n_q),$$

l'égalité

$$W = \sum_{n_1, \ldots, n_q} g(n_1 | \ldots | n_q),$$

où il s'agit de préciser l'ordre des termes du second membre.

On a

$$n_\nu = \frac{r}{\Delta} \sum \alpha_{\lambda\nu} m_\lambda \qquad (\nu = 1, \ldots, q),$$

$\alpha_{\mu\nu}$ désignant l'adjoint de $a_{\mu\nu}$ dans Δ, et l'on déduit de là, en remplaçant $m_1, \ldots, m_q$ par toutes les permutations complètes de q entiers, tous les groupes $n_1, \ldots, n_q$ à considérer.

Soit ρ_μ, le plus petit reste positif de $m_\mu \pmod{|\Delta|}$, et

$$m_\mu = \Delta m_\mu - \rho_\mu,$$

on aura

$$n_\mu = n_\mu + \frac{n}{\Delta} \sum \alpha_\mu \rho_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, q),$$

où les n_μ sont entiers et satisfont aux congruences

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum a_\mu n_\mu \equiv 0 \pmod{r} \quad (\mu = 1, \ldots, q).$$

Si l'on considère alors la somme

$$\sum_{\rho_1, \ldots, \rho_q}^{0, 1, \ldots, |\Delta|-1} \; \sum_{n_1, \ldots, n_q}^{-\infty, \ldots, +\infty} g\left(n_1 + \frac{\overline{\overline{\rho}}_1}{\Delta} \middle| \cdots \middle| n_q + \frac{\overline{\overline{\rho}}_q}{\Delta}\right),$$

où

$$\overline{\overline{\rho}}_\mu = n \sum \alpha_\mu \rho_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, q),$$

dans laquelle chaque indice varie de 0 à $|\Delta| - 1$ et où les n_μ varient de $-\infty$ à $+\infty$, mais *en satisfaisant aux congruences* (A), M. Krazer établit que chaque terme de W y figure σ fois, σ' désignant le nombre de solutions des congruences

$$r \sum \alpha_{\mu\nu} x_\nu \equiv 0 \pmod{|\Delta|} \quad (\mu = 1, \ldots, q)$$

pour lesquelles les x sont compris dans la suite $0, 1, \ldots, |\Delta| - 1$ (*solutions normales*).

L'introduction du facteur discontinu

$$\mathrm{F} = \frac{1}{r^q} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_q}^{1, \ldots, r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_\mu \sum_\nu a_\mu x_\nu \sigma_\mu}$$

qui est égal à 1 si les n_μ satisfont aux congruences (A) et à zéro dans le cas contraire, permet alors d'écrire, *en laissant les n_μ complètement arbitraires cette fois*,

$$\mathrm{W} = \frac{1}{r^q \sigma} \sum_{\rho_1, \ldots, \rho_q}^{1, \ldots, |\Delta|-1} \; \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_q}^{0, 1, \ldots, r-1} \left[\sum_{n_1, \ldots, n_q}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_\mu \overline{\sigma}_\mu \left(n_\mu + \frac{\overline{\overline{\rho}}_\mu}{\Delta}\right)} g\left(n_1 + \frac{\overline{\overline{\rho}}_1}{\Delta} \middle| \cdots \middle| n_q + \frac{\overline{\overline{\rho}}_q}{\Delta}\right) \right]$$

avec

$$\overline{\sigma}_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} \sigma_\nu.$$

M. Krazer étudie ensuite la détermination de σ : ce nombre est égal au produit $s_1 s_2 \ldots s_l r^l$ où l désigne le rang de la forme bilinéaire $\sum a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$, s_ν le plus grand commun diviseur de r et du λ — diviseur élémentaire e_ν de la forme précédente (H.-S. Smith).

Les deux derniers paragraphes de cet important travail sont consacrés à la recherche des substitutions linéaires d'indices les plus générales, qui transforment un produit de n fonctions thêta de p variables en une somme de tels produits et à la comparaison des formules de M. Krazer avec les formules particulières déjà connues.

Lilienthal (*R.-V.*). — Sur les courbes intégrales les plus courtes d'une équation de Pfaff (p. 417-432).

Une congruence étant donnée par

$$(1) \qquad \frac{dx}{\xi} - \frac{dy}{\eta} - \frac{dz}{\zeta}$$

avec $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, l'auteur considère les courbes intégrales de l'équation

$$(2) \qquad \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0$$

(normales aux précédentes) et, parmi ces dernières, celles qui, passant par deux points P_0, P_1, sont *plus courtes* que les voisines. Elles sont définies par les équations

$$\varepsilon\xi + \frac{1}{P_0}\left(\eta\frac{dz}{ds} - \zeta\frac{dy}{ds}\right) + \frac{1}{P_0}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{R_0}\left(\eta\frac{dz}{ds} - \zeta\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\xi}{h_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où les fonctions R_0, P_0, h_0 satisfont aux deux conditions

$$\frac{1}{R_0} + \varepsilon\xi = 0, \qquad \frac{d\xi}{ds} + \frac{\xi}{P_0} + \frac{1}{h_0} = 0.$$

Si $\varepsilon = 0$, on se trouve dans le cas d'une équation $\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0$ intégrable et l'on a $\frac{1}{R_0} = 0$.

Cette équation $\frac{1}{R_0} = 0$, jointe à (2), définit les *géodésiques du faisceau* (1) dans tous les cas.

Dans le cas général,

$$\frac{1}{R_0}\left(\frac{d\log\xi}{ds} + \frac{1}{P_0}\right) + \frac{\xi}{h_0} + \frac{d\left(\frac{1}{R_0}\right)}{ds} = 0.$$

La fonction h_0, définie par

$$\frac{1}{h_0} = \zeta\frac{d^2x}{ds^2} + \eta\frac{d^2y}{ds^2} + \zeta\frac{d^2z}{ds^2},$$

est ce que M. Lilienthal (*Fondements d'une théorie de la courbure des faisceaux de courbes*) a nommé *courbure normale* relativement au faisceau (1), de même,

$$\frac{1}{R_s} = \sum \left(\eta \frac{dz}{ds} - \zeta \frac{dy}{ds} \right) \frac{d^2x}{ds^2}$$

est la *courbure géodésique* relativement à ce faisceau. L'auteur donne également la signification de $\frac{1}{R_s}$ qui s'annule si (1) représente des droites.

Après avoir établi, par une autre méthode, les équations différentielles des lignes les plus courtes, l'auteur les transforme en un système simultané de forme élégante, à 4 variables, dont il indique quelques conséquences particulières.

Wellstein (*J.*). — Sur la transformation des coupures des surfaces de Riemann (p. 433-439).

Démonstration géométrique, basée sur des considérations d'*Analysis situs*, des relations fondamentales qui lient les coefficients entiers des transformations linéaires que subissent les modules de périodicité, quand on passe d'un système canonique de coupures à un autre.

Wellstein (*J.*). — Sur la théorie de la classe de fonctions $s^1 = \varphi(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n)$ (p. 440-448).

A cette théorie, pour laquelle il renvoie à un travail de M. Osgood (*Diss. Inaug. Erlangen*, 1890), M. Wellstein apporte deux contributions intéressantes : Introduction d'un système de coupures réduit à une forme normale par des considérations de théorie des groupes. Expression des modules de périodicité de l'intégrale de première espèce par trois invariants absolus (les trois *modules du domaine*).

Enriques (*F.*). — Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau de courbes rationnelles (p. 449-456).

Un faisceau de courbes algébriques sur la surface algébrique $f(x, y, z) = 0$ se définit à l'aide de deux fonctions rationnelles

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z)$$

liées par une relation identique $\varphi(X, Y) = 0$ dont le *genre* p est dit *genre du faisceau*. Si $p = 0$ le faisceau est rationnel ou linéaire et x, y, z s'expriment rationnellement à l'aide d'un paramètre ; chaque courbe du faisceau C (correspondant à un système de valeurs X, Y) peut donc être rapportée point par point à une droite, génératrice du cylindre $\varphi(X, Y) = 0$. Il semble, à première vue, que la surface $f = 0$ peut être transformée birationnellement en ce cylindre. Cette conclusion n'est pas légitime parce que la représentation de C sur la droite fait intervenir des *irrationnelles arithmétiques* qui peuvent varier avec C, en dépendant algébriquement de X, Y.

Si l'on a une seule courbe C rationnelle, M. Nœther (*M. A.*, t. III) a démontré qu'on peut la transformer rationnellement en une conique, sans faire intervenir d'irrationnelles arithmétiques : il y aura donc, au plus, pour passer à la

droite qu'une irrationnelle quadratique. Une surface possédant un faisceau de courbes rationnelles se transformera birationnellement en une surface possédant un faisceau de coniques Γ.

Peut-on maintenant s'arranger pour que les irrationnelles arithmétiques qui interviennent dans la représentation de C sur une droite ne varient pas avec x, y ?

M. Nœther a démontré qu'il suffit pour cela de trouver une courbe qui coupe en un seul point chaque courbe C : il a déterminé une telle courbe dans le cas $p = 0$ (faisceau linéaire) et établi aussi que la surface $f(x, y, z) = 0$ est rationnelle. M. Enriques démontre ici, pour $p = 0$, l'existence de la courbe qui coupe en un seul point chaque courbe C : il en résulte donc que : *Toute surface algébrique $f(x, y, z) = 0$ qui contient un faisceau de courbes rationnelles* (unicursales) *peut être transformée birationnellement en une surface réglée* [le cylindre $\varphi(X, Y) = 0$ par exemple] *ayant le genre du faisceau.*

Scorza (*G.*). — Un nouveau théorème sur les quartiques planes générales (p. 457-461).

On sait qu'il existe pour une quartique plane C une infinité de points dont la cubique polaire est équianharmonique, leur lieu est une quartique S *covariante* de C. M. Scorza montre que toute quartique générale peut être regardée comme covariante de 36 autres seulement, qui correspondent à ses 36 systèmes de cubiques hexa tangentes (de deuxième espèce) dont les six points de contact ne sont pas sur une conique.

Osgood (*W.-F.*). — Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables (p. 462-464).

Démonstration du théorème suivant : *Soit* $F(x, y)$ *une fonction uniforme dans le domaine* T : $|x| < R$, $|y| < S$ *et telle que :*

a. Pour tout point x du cercle $|x| = R$, $F(x, y)$ est une fonction analytique de y dans le cercle $|y| = S$, la même propriété ayant lieu à l'égard de la variable y.

b. Dans le domaine T on a $|F(x, y)| < G$, G étant une quantité fixe (on ne sait si cette condition est nécessaire) ; alors $F(x, y)$ *est une fonction analytique des variables* x, y.

Greenhill (*A.-G.*). — La courbe élastique sous une pression normale constante (p. 465-500).

Halphen (*F. elliptiques*, t. II, Chap. V) a donné la discussion mathématique de ce problème, due à Maurice Levy, comme application des fonctions elliptiques. Le sujet est capital pour l'ingénieur : stabilité des tubes de chaudières à haute pression, résistance à la flexion des cuirasses minces d'acier des torpilleurs.

L'auteur résume ici la solution d'Halphen, exercice sur les intégrales elliptiques de troisième espèce, et traite complètement certains cas dans lesquels, les intégrales étant pseudo-elliptiques, on peut calculer numériquement la courbe au moyen des Tables existantes.

Gordan (*P.*). — Fonctions symétriques (p. 501-528).

M. Gordan a poursuivi les recherches entreprises par Mac-Mahon (*American*

Journal, t. II, p. [illegible] et étudie à la fois les sommes s des puissances des racines d'une équation algébrique comme fonction des coefficients a et les a comme fonction des s.

Il déduit de ses résultats l'expression *explicite* du résultant de deux équations, du discriminant d'une seule équation et de diverses résolvantes (sans faire intervenir les déterminants) et aussi, l'expression explicite des coefficients numériques de ces formations.

Par exemple, si l'on pose

$$f(x, a) = \sum a_{\lambda} x^{\lambda} = \prod (x - \xi_{\lambda}) = \sum s_{\lambda} \xi^{\lambda}$$

et si l'on adopte les notations

$$s_{\lambda} = s(\lambda, \ldots, a) = s_{\lambda}(a),$$

on aura

$$\log f(x, a) = \sum \frac{1}{\varrho} s(\varrho a) x^{\varrho} = \sum_{\varrho, \lambda} (-1)^{\lambda} \frac{(h - \lambda)!}{h_1! h_2! \ldots} p_{\lambda}(a) x^{\varrho},$$

où

$$p_{\lambda}(a) = a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots,$$

et

$$\varrho = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots,$$
$$h = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots;$$

d'où l'on conclut

$$s(a) = \sum (-1)^{\lambda} \frac{(h - 1)!}{h_1! h_2! \ldots} p_{\lambda}(a).$$

On a de même

$$a = s_{\lambda}(s) = \sum \frac{(-1)^{\lambda} \ldots}{h_1! h_2! \ldots (\ldots)!} p_{\ldots}(s).$$

M. Gordan en déduit pour le résultant R de $f(x, a)$, $f(x, b)$

$$R = \sum \frac{(-1)^{\ldots}}{h_1! h_2! \ldots (\ldots)!} a_{\ldots}(a, s_{\ldots}, b_{\ldots})^{\ldots} (s_{\ldots}(a, s_{\ldots}, b))^{\ldots} \ldots,$$

la somme s'étendant à tous les produits dont le poids $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots$ est $\leqq mn$, et au de discriminant Δ de $f(x, a)$

$$\Delta = \sum \frac{(-1)^{\ldots}}{h_1! h_2! \ldots (\ldots)!} a_{\ldots} (\ldots s_{\ldots}(a, s_{\ldots}(a, \ldots)) \ldots)^{\ldots} \ldots,$$

la somme étant étendue à tous les produits dont le poids est $\leqq m(m-1)$.

Frameul (J.). — Sur la théorie des séries (p. 528-549). (Lettre adressée à M. H. Weber.)

Il s'agit d'une généralisation de la formule sommatoire (Euler, Mac Laurin), étudiée à ses deux premiers termes.

Soient $z_1, z_2, \ldots$ des nombres non nécessairement $z_1 \geqq z_2 \geqq z_3 \ldots$; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ la

suite croissante formée des α qui sont différents; $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des grandeurs quelconques, complexes ou non. M. Franel pose

$$g(t) = \sum a$$

où i est tel que $\alpha_{i-1} < t$. Cette fonction $g(t)$ est constante pour $\xi_{i-1} < t < \xi_i$; lorsque t dépasse ξ_i, elle s'accroît brusquement de $\sum a_r$ ou r est tel que $\alpha_r = \xi_i$.

Considérons la série $a_0 F(\alpha_0) + a_1 F(\alpha_1) + \ldots$ où $F(x)$ est une fonction bien déterminée de x ayant une dérivée unique $F'(x)$; si l'on pose

$$S_p = \sum a F(\alpha)$$

où

$$\alpha \leqq p,$$

on a

$$S_p = g(p) F(p) - \int_{\alpha_1}^{p} F'(t) g(t)\, dt.$$

C'est la formule de M. Franel; elle ramène la recherche de la convergence ou de la divergence de la série à l'étude de l'intégrale définie pour des valeurs très grandes de p. L'auteur en indique des applications variées, par exemple, quand on connaît l'expression asymptotique de $g(t)$: extensions de théorèmes de Dirichlet ou d'Abel, etc.

Hoyer (*P.*). — Solution algébrique du problème des groupes de substitutions (p. 550-560).

M. Hoyer ramène la détermination de tous les groupes de substitutions de n lettres à la formation effective du plus grand commun diviseur de deux fonctions connues de z (dépendant en outre de $n!$ variables) et à la décomposition de ce plus grand commun diviseur en ses facteurs linéaires (ce qui se fait ici rationnellement).

Dickson (*L.-E.*). — La structure du groupe linéaire et homogène défini par l'invariant $\lambda_1 \xi_1^r + \ldots + \lambda_m \xi_m^r$ (p. 561-581).

Pour $n > 2$, il n'existe pas de groupe continu de substitutions linéaires à m variables laissant invariant

$$\varphi = \lambda_1 \xi_1^r + \ldots + \lambda_m \xi_m^r;$$

pour $r = 2$, on a le groupe orthogonal.

L'auteur considère ici des substitutions dont les coefficients sont des imaginaires de Galois du champ $GF[p^n]$ ou $p > 2$; il a étudié antérieurement (*American Journal*, t. XXI) le cas $r = 3$ et donne les formes réduites et le groupe correspondant. Dans le cas actuel, la structure du groupe dérive de celle du groupe défini dans le champ $GF[p^n]$ par l'invariant $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{p^n-1}$. La décomposi-

tion de ce dernier conduit aux systèmes de *groupes* simples d'ordre $\Omega_{m,p,s}$,

$$\Omega_{m,p,s} = \frac{1}{d}[p^m - (-1)^m][p^m - 1][p^m - (-1)^m][p^m - 1]\ldots[p^m - 1]p,$$

où d est le plus grand commun diviseur de m et $p - 1$. Les seules exceptions sont $m = 3$, $p = 2$; $m = 6$, $p = 2$; $m = 3$, $p = 3$. Pour $m = 2$, les groupes simples ont été obtenus par Moore (Chicago Congress) comme généralisation du groupe modulaire; pour $m = 6$, les ordres les plus bas des groupes simples sont

$$\Omega_{2,3,3} = 504[8], \quad \Omega_{2,3,4} = 5040, \quad \Omega_{2,3,5} = 60[360], \quad \Omega_{2,3,7} = 120000,$$
$$\Omega_{2,3,11} = 660[5280].$$

Ce travail est en relation avec celui de Moore (*M. A.*, t. L); si ξ appartient à $GF[p^m]$, ξ et ξ^{p^s} sont *conjuguées* par rapport à $GF[p]$ et l'invariant considéré s'écrit $\Sigma \xi \bar{\xi}$ (*invariant universel*).

Nielsen (*Niels*). — Sur le développement de zéro en série de fonctions cylindriques (p. 582-587).

On a pour n entier

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin v)\cos nv\, dv,$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin v)\sin(2n+1)v\, dv;$$

M. Nielsen en déduit :

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{J_{m+s}(sx)}{s^2} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{J_{m+s+1}(sx)}{s^2} = 0,$$

pour m entier positif supérieur à n, dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$. Les séries du premier membre sont absolument convergentes et différentiables terme à terme pour $n > 0$; la différentiation finit toujours par donner des séries divergentes.

Lœwy (*A.*). — Sur la caractéristique d'une forme quadratique réelle de déterminant non nul (p. 588-592). (Extrait d'une lettre à M. Klein.)

Soient q le nombre des carrés positifs, $(n - q)$ celui des carrés négatifs; la *caractéristique* de M. Lœwy est le plus petit des deux nombres. M. Lœwy a montré ailleurs (*M. A.*, t. L) que cette caractéristique q' suffit pour obtenir des conclusions précises sur les transformations réelles de la forme elle-même et aussi sur la détermination des diviseurs élémentaires du déterminant d'un

faisceau de formes réelles : il résume ici ses résultats et en indique les conséquences.

Si pour le faisceau $\mu P + \nu Q$ de formes quadratiques réelles, s est la somme des exposants de tous les diviseurs élémentaires *imaginaires* de $|\mu P + \nu Q|$, on a pour toute forme ordinaire du faisceau

$$q - s = \sum E\left(\frac{h}{2}\right),$$

la somme est étendue à tous les exposants h des diviseurs élémentaires *réels*. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ est le plus grand entier compris dans $\frac{h}{2}$. La limite inférieure est réellement atteinte : P étant donnée, on peut trouver Q de façon qu'elle le soit.

Scott (*Charlotte-Angas*). — Preuve du théorème fondamental de Nœther (p. 593-597).

Démonstration basée sur les remarques suivantes : si le théorème est vrai pour une courbe d'ordre N passant par l'intersection de f et de g, il l'est aussi pour les courbes d'ordre inférieur. Si N est assez grand, les conditions imposées par un certain degré de multiplicité aux points communs à f et à g sont indépendantes.

Stäckel (*P.*). — La découverte des surfaces à un seul côté (p. 598-600).

Tome LIII; 1900.

Nœther (*M.*). — Sophus Lie (p. 1-41).

Isenkrahe (*C.*). — Sur une manière d'exprimer tout nombre premier à l'aide d'une formule finie, dépendant des nombres premiers plus petits (p. 41-44).

L'exposant de la plus haute puissance d'un nombre premier a_r contenue dans le nombre entier x est donné par

$$S(r, x) = \left[\frac{x}{a_r}\right] + \left[\frac{x}{a_r^2}\right] + \ldots.$$

Si l'on pose

$$p(r, x) = a_r^{S(r,x)}$$

et

$$P(m, x) = p(1, x)\,p(2, x) \ldots p(m, x),$$

on aura

$$\frac{x!}{P(m, x)} = 1$$

où dans le dénominateur m parcourt les indices $1, 2, \ldots, m$ de tous les nombres

premiers inférieurs à x. En passant au delà de a_{m-1}, nombre premier qui suit a_m, on a donc, pour $x = a_{m-1}$,

$$\frac{x!}{p(m, x)\,p(m-1, x)} = \frac{x!}{P(m, x)\,a_m^{\left[\frac{x}{a_m}\right]}} = 1$$

et si l'on fait $x = a_m$,

$$a_{m-1} = \frac{x!}{P(m, x)} = x.$$

La fonction

$$F(m, x) = \frac{x!}{P(m, x)} = \frac{P(m, x)}{x(x-1)^2} = \left[\frac{(x-1)!}{P(m, x)}\right]$$

est $1 = x$ lorsque $a_m = x = a_{m-1}$ et devient $1 + x + 1 = x$ quand x atteint a_{m+1}. En donnant à x toutes les valeurs à partir de a_m, on découvre donc a_{m+1} quand $F(m, x) = x$.

Klein (*F.*). — Sur l'état de l'édition des Œuvres de Gauss (deuxième Rapport) (p. 45-48).

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité des équations fonctionnelles algébriques et des équations différentielles linéaires (p. 50-80).

Une équation algébrique de la forme

$$p_0(x-\alpha)y^n + p_1(x-\alpha)y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x-\alpha)y + p_n(x-\alpha) = 0,$$

dont les coefficients sont des séries de puissances convergentes, pour lesquelles $p_0(0), \ldots, p_n(0)$ ne s'annulent pas tous, peut toujours par multiplication avec une puissance de $(x-\alpha)$ être mise sous la forme

$$(1) \quad (x-\alpha)^{\rho}P_0(x-\alpha)y^n + (x-\alpha)^{\rho-1}P_1(x-\alpha)y^{n-1} + \ldots + P_n(x-\alpha) = 0,$$

où les P possèdent les mêmes propriétés que les p. Cette équation (1) est *irréductible*, si elle n'a aucune solution commune y avec une équation de même forme et d'ordre inférieur à n. Suivant une méthode employée par Eisenstein pour les équations numériques, l'auteur montre que :

L'équation

$$(x-\alpha)^{\rho}P_0y^n + (x-\alpha)^{\rho-1}P_1y^{n-1} + \ldots + (x-\alpha)^{\rho-n}P_{n-1}y + P_n = 0,$$

où ρ est un entier positif, $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ et $P_0(0), \ldots, P_n(0)$ différents de zéro, est irréductible.

Il en est de même si l'on ajoute une unité à tous les exposants non nuls de $(x-\alpha)$ lorsque n est impair ; quand n est pair, la seule décomposition possible est en un produit de deux polynomes d'ordre $\frac{n}{2}$ en y. M. Kœnigsberger établit, par des méthodes analogues, de nombreux théorèmes relatifs aux équations différentielles linéaires. Bornons-nous à indiquer le dernier.

La condition nécessaire et suffisante de réductibilité de l'équation différentielle

$$(1)\quad \begin{cases} (x-\alpha)^{\nu}P_0 y^{\nu} + (x-\alpha)^{\nu-1}P_1 y^{\nu-1} + \ldots \\ \qquad + (x-\alpha)^{\nu-1}P_{\nu-1} y + (x-\alpha)^{\nu}P_{\nu} y = 0 \end{cases}$$

est donnée par l'identité algébrique en z

$$(x-\alpha)^{\nu}P_0 z^{\nu} + (x-\alpha)^{\nu-1}P_1 z^{\nu-1} + \ldots + (x-\alpha)^{\nu}P_{\nu}$$
$$= ST + \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \ldots + \frac{1}{(n-\nu)!}\frac{\partial^{n-\nu} S}{\partial x^{n-\nu}}\frac{\partial^{n-\nu} T}{\partial z^{n-\nu}},$$

où

$$S = (x-\alpha)^{\nu}Q_0 z^{\nu} + (x-\alpha)^{\nu-1}Q_1 z^{\nu-1} + \ldots + Q_{\nu},$$
$$T = (x-\alpha)^{n-\nu}R_0 z^{n-\nu} + \ldots + R_{n-\nu},$$

et l'équation (1) possède alors toutes les intégrales de

$$(2)\quad (x-\alpha)^{\nu}Q_0 y^{\nu} + (x-\alpha)^{\nu-1}Q_1 y^{\nu-1} + \ldots + Q_{\nu} y = 0.$$

Liebmann (*H.*). — Sur la déformation des surfaces fermées à courbure positive (p. 81-112).

Après avoir rappelé l'énoncé d'Euclide, précisé et démontré par Cauchy, d'après lequel *un polyèdre convexe est entièrement défini par ses faces et leur arrangement*, et celui de Lagrange (reproduit par Minding) suivant lequel *une surface fermée convexe*, analogue à un ellipsoïde, *est indéformable*, l'auteur, qui se propose d'établir ce dernier, remplace la condition de convexité par la possibilité en tout point d'une représentation

$$z = \frac{ax + by}{\lambda} + \ldots,$$

où a et b sont positifs. La surface qui possède cette propriété est dite *ovaloïde*.

Une déformation infinitésimale est définie par

$$x_1 = x + z\xi, \quad y_1 = y + z\eta, \quad z_1 = z + z\zeta,$$

à condition que les fonctions analytiques en x, y désignées par ξ, η, ζ demeurent finies et vérifient

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0.$$

M. Liebmann se propose d'établir qu'*un ovaloïde n'admet aucune déformation infinitésimale sans déchirure*. Cela n'exclura pas la possibilité de l'existence d'une surface fermée du même genre qui corresponde à la première avec conservation de l'élément linéaire. Enfin, le théorème ne sera établi que si la courbure est partout positive : l'auteur fait observer qu'on n'a signalé aucune surface fermée *déformable* qui corresponde à l'octaèdre articulé de Bricard.

Pour la sphère, M. Liebmann démontre qu'*elle est le seul ovaloïde de courbure constante* et qu'*un théorème analogue subsiste dans l'espace à n dimensions*. [Dans le plan, toute courbe fermée convexe peut se déformer et le cercle est la seule courbe à courbure constante; dans un espace E_n, une surface à $(n-1)$ dimensions à courbure positive ne se laisse pas déformer d'une manière continue (Schur).]

La méthode repose sur ce fait que la *surface de déformation* (lieu du point ξ, η, ζ) doit posséder partout une courbure totale négative et cependant demeurer tout entière à distance finie; une étude préliminaire montre au contraire que toute surface à courbure totale négative, pouvant posséder des points isolés de courbure semi-négative, s'étend nécessairement à l'infini.

Sommer (*J.*). — Propriétés focales des multiplicités quadratiques dans un espace à quatre dimensions (p. 113-160).

Il s'agit de l'extension aux multiplicités homofocales

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \frac{t^2}{\delta} = 1$$

des propriétés classiques des coniques ou quadriques homofocales (lignes de courbure, géodésiques, etc.). Cayley, Segre, Klein, O. Staudt se sont déjà occupé de diverses généralisations de ces dernières; les recherches de l'auteur se rattachent plus directement à celles de Staudt (*M. A.*, t. XX). Il donne en particulier l'extension de la construction par fils de J.-C. Maxwell.

Richmond (*H.-W.*). — La figure formée par six points dans l'espace à quatre dimensions (p. 162-176).

Le but initial de l'auteur était d'établir que la figure formée dans un espace R_4 par six points 1, ..., 6, les quinze droites 12, ..., 56 qui les joignent deux à deux, les vingt plans 123, ... et les quinze espaces 1234, ... donne *de façon intuitive* les propriétés de certaines configurations de points, droites et plans longuement étudiées : (*a*) les quinze droites qui joignent deux à deux six points d'une conique (hexagramme de Pascal); (*b*) certains groupes de quinze tangentes doubles d'une quartique plane; (*c*) quinze des nœuds ou des plans singuliers d'une surface de Kummer, etc. Sa conclusion est que ces propriétés sont les conséquences immédiates des axiomes projectifs de l'espace à quatre dimensions.

Horn (*J.*). — Sur la théorie des équations linéaires aux différences (p. 178-192).

M. Poincaré (*Amer. Journal*, t. VII) a commencé pour une équation aux différences

$$Q_0 u_n + Q_1 u_{n+1} + \ldots + Q_k u_{n+k} = 0$$

où les Q sont des polynomes en x, l'étude de $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$. En avant égard à ce que les coefficients des séries de puissances convergentes ou divergentes qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels satisfont à de telles relations de récurrence, l'auteur continue les recherches de M. Poincaré et parvient à une expression asymptotique de u_n par des séries, formées comme les séries normales de Thomé, qui vérifient formellement une équation différentielle.

Si, dans l'équation aux différences

$$(E)\quad y(x+m)+x^{k}P_1 y(x+m-1)+x^{2k}P_2 y(x+m-2)+\ldots+x^{mk}P_m y(x)=0,$$

k désigne un nombre entier (positif, négatif ou nul) et

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a'_\lambda}{x} + \frac{a''_\lambda}{x^2} + \ldots \qquad (\lambda = 1, \ldots, m)$$

une série de puissances convergente ou asymptotique; si les valeurs absolues des racines de $\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$ sont distinctes et différentes de zéro,

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_m| > 0,$$

l'équation (E) possède m solutions linéairement distinctes représentées asymptotiquement par les séries

$$y_\lambda \sim \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\theta_\lambda}\left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \ldots\right)$$

qui vérifient formellement (E).

Timerding (*H.-E.*). — Sur les transformations quadratiques univoques d'un plan (p. 194-219).

A une transformation Cremona du plan

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(x) : \Phi_2(x) : \Phi_3(x)$$

qui fait correspondre à la droite

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0,$$

la courbe

$$(\alpha)\qquad u_1\Phi_1(x) + u_2\Phi_2(x) + u_3\Phi_3(x) = 0,$$

M. Timerding associe le *connexe* de première classe défini par cette dernière relation; il le nomme *connexe de Cremona*. [M. Guccia (*Rendiconti... Palermo*, t. I) a déjà étudié cette association.] L'élimination des x donne une relation

$$\Psi(u, y) = 0$$

qui définit le *connexe inverse* : il est aussi de première classe

$$u_1\psi_1(y) + u_2\psi_2(y) + u_3\psi_3(y) = 0.$$

Après avoir signalé les relations générales entre ces divers éléments, indique en particulier la possibilité de définir simultanément la transformation Cremona et son inverse par la seule équation

$$\Theta(u, v) = 0$$

qui est l'équation tangentielle de la courbe (α), l'auteur étudie en détail le cas

$$\Phi_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

d'une transformation quadratique univoque, qui conduit à un grand nombre de propositions géométriques.

Hurwitz (*A.*). — Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à certaines intégrales définies (p. 220-224).

Lœwy (*A.*). — Sur la théorie des groupes de substitutions linéaires (p. 225-242).

Pour un groupe fini de substitutions linéaires, l'ensemble des équations caractéristiques possède un nombre nécessairement fini de racines. M. Lœwy nomme *groupes du type d'un groupe fini* tous les groupes Γ tels que l'ensemble des équations caractéristiques de chaque substitution du groupe ne possède qu'un nombre fini de racines. Il étudie les rapports de ces groupes avec les groupes finis et avec les groupes quelconques de substitutions linéaires et signale, parmi ses résultats, le théorème suivant : *Tout groupe non fini de substitutions linéaires qui contient une substitution au moins dont l'équation caractéristique a toutes ses racines distinctes, possède aussi au moins une substitution* S *qui n'est pas d'ordre fini*, c'est-à-dire que $S^p \neq S$ quel que soit p.

Les racines des équations caractéristiques pour les substitutions d'un groupe Γ sont nécessairement des racines de l'unité.

La somme diagonale $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, pour chaque substitution d'un groupe Γ, n'est susceptible que d'un nombre limité de valeurs et s'exprime rationnellement à l'aide de racines de l'unité.

A tout groupe Γ non fini qui possède une substitution dont l'équation caractéristique a ses racines distinctes, correspond une forme semi-définie d'Hermite invariante par toutes les substitutions de Γ.

Busche (*E.*). — Contribution au calcul des différences et à la théorie des nombres (p. 243-271).

L'auteur donne d'abord la généralisation d'une identité d'Abel dont Kronecker a fait souvent usage.

Supposons que dans l'intervalle (α, β) de l'axe réel (α exclus, β inclus), figurent les nombres

$$a_{\alpha_a+1} = a_{\alpha_a+2} = \ldots = a_{n_a}; \qquad b_{\alpha_b+1} = b_{\alpha_b+2} = \ldots = b_{n_b}; \qquad c_{\alpha_c+1} = \ldots = c_{n_c}.$$

Soit $a_x(b)$ l'indice (+ ou −) du nombre b qui satisfait aux conditions

$$b_{a_x(b)} = a_x \leqq b_{a_x(b)+1}$$

et $b_y(a)$ l'indice du nombre a pour lequel

$$a_{b_y(a)} \leqq b_y = a_{b_y(a)+1};$$

on a l'identité, où f_a, f_b, f_c sont des fonctions uniformes quelconques,

$$\sum_{x=\nu_a+1}^{n_a} f_b(a_x(b))f_c(a_x(c))\,[f_a(x)-f_a(x-1)]$$
$$+\sum_{y=\nu_b+1}^{n_b} f_a(b_y(a))f_c(b_y(c))\,[f_b(y)-f_b(y-1)]$$
$$+\sum_{z=\nu_c+1}^{n_c} f_a(c_z(a))f_b(c_z(b))\,[f_c(z)-f_c(z-1)]$$
$$=f_a(n_a)f_b(n_b)f_c(n_c)-f_a(\nu_a)f_b(\nu_b)f_c(\nu_c).$$

Pour la brièveté, on a seulement écrit la formule avec trois systèmes de points a, b, c, mais elle s'étend immédiatement.

Une première application de cette formule conduit M. Busche à une généralisation d'une formule relative à $[x]$ sur laquelle Gauss a fondé sa troisième démonstration de la loi de réciprocité; une autre permet de retrouver une formule de Dirichlet. Leur ensemble apporte une contribution importante à l'étude de la fonction $[x]$.

Cazzaniga (*T.*). — Précis d'une théorie élémentaire des déterminants cubiques d'ordre infini (p. 272-288).

L'auteur a étudié (*Annali di Mat.*, 1897-1899) les déterminants quadratiques d'ordre infini; un grand nombre des résultats obtenus peuvent s'étendre aux déterminants cubiques. Il se préoccupe surtout ici des propriétés générales et des critères simples de convergence.

Définitions. Propriétés générales. Règles de convergence. Déterminants mineurs. Développements. Règles de multiplication.

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des suites doublement infinies (p. 290-321).

Développement systématique de la théorie des suites doubles. M. Pringsheim y introduit et utilise les notions de *convergence* (et *divergence*) *uniforme des lignes* (ou des colonnes) qu'il étend sous la dénomination de *limitation* (et *non limitation*) *uniforme des lignes*.

Par exemple, si les lignes convergent, il existe pour tout ε *et chaque ligne* ν un nombre minimum m'_μ pour lequel

$$|a'_\mu - a^\nu| \leq \varepsilon, \qquad \mu \geq m'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

a^ν désignant la limite de la ligne ν : la convergence *des lignes* est uniforme si les m'_ν ont une limite supérieure *finie;* non uniforme dans le cas contraire.

Dans le cas où les lignes ne convergent pas, il existe pour chacune d'elles ν une plus petite limite

$$\underline{\lim}\, a^\nu_\mu = \underline{a}^\nu,$$

et une plus grande limite

$$\overline{\lim}\, a^\nu_\mu = \overline{a}^\nu$$

(Du Bois-Reymond, Cauchy); leur valeur, *quand elle est la même*, est $\overline{\lim}\, a^{\nu}_{\mu}$. Pour chaque ε, on a, si $\nu \geq n$, un nombre minimum m'_{μ} tel que

$$\underline{a}^{\nu} - \varepsilon < a^{\nu}_{\mu} < \overline{a}^{\nu} + \varepsilon, \qquad \mu > m'_{\nu} \qquad (\nu = n, \ldots),$$

les *lignes* sont *uniformément limitées* si les m'_{ν} ont une limite supérieure finie.

Les conditions nécessaires et suffisantes de convergence de la suite a^{ν}_{μ} sont que les lignes (ou les colonnes), à l'exception d'un nombre fini d'entre elles, soient uniformément limitées et que la limite

$$\lim_{\nu = \infty} \overline{\lim_{\mu = \infty}}\, a^{\nu}_{\mu}$$

existe.

London (*F.*). — Sur les suites et les séries doubles (p. 322-370).

Travail indépendant du précédent, consacré à l'étude générale des suites doubles faite en vue de ses applications à la convergence des séries doubles.

Extension des notions de limites supérieure et inférieure d'indétermination (Du Bois-Reymond). Étude de la suite diagonale $a^0_0 a^1_1 \ldots$ et des suites parallèles. Suites horizontales et verticales. Convergence latérale. Applications aux séries doubles : la convergence latérale est une condition nécessaire et suffisante de convergence si les lignes et les colonnes convergent.

Dedekind (*R.*). — Sur le *double-groupe* (Dualgruppe) engendré par trois modules (p. 371-403).

Dans la quatrième édition des *Leçons de Dirichlet sur la Théorie des nombres*, l'auteur a signalé le *double groupe* qui se déduit de trois modules par la formation répétée du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux modules; ce double groupe comprend en général 28 modules. M. Dedekind développe ici les lois de ce double groupe et quelques considérations générales sur les doubles groupes.

Soient $a + b$ le plus grand commun diviseur (ou la somme), $a - b$ le plus petit commun multiple (ou la différence) de deux modules a, b; on a pour l'une et l'autre opération la loi commutative et associative (avec leurs conséquences quand on les applique à un domaine fini). On a en outre les deux lois

$$a + (a - b) = a, \qquad a - (a + b) = a,$$

d'où l'on conclut

$$a + a = a, \qquad a - a = a.$$

Toutes les fois où deux opérations $\pm$ permettent de déduire de deux éléments a, b d'un système G (fini ou infini) deux nouveaux éléments $a + b$ du même système, en suivant les lois précédentes, on dit que G constitue vis-à-vis de ces opérations un double-groupe (Dualgruppe).

L'ensemble des modules est un double-groupe vis-à-vis des opérations p. g. c. d. (a, b) et p. p. c. m. (a, b).

Propriétés générales des doubles-groupes. Le double-groupe D engendré par

trois modules. Le symbole (m, n) dans le double groupe D. Les idéaux. La loi des chaines; sa relation avec celle des modules. Les espèces dans les groupes de modules, finis.

Dehn (*M.*). — Les théorèmes de Legendre sur la somme des angles d'un triangle (p. 404-439).

D. Hilbert (Leipzig, 1899), dans ses recherches sur les fondements de la Géométrie, a fait appel à cinq groupes d'axiomes :

Axiomes de liaison, d'ordre, des parallèles, de congruence et enfin axiome d'Archimède.

Legendre, dans ses essais de démonstration de l'axiome des parallèles, a établi les propositions suivantes :

1° Dans un triangle la somme des angles ne peut dépasser deux droits;

2° S'il existe un triangle où la somme des angles soit deux droits, il en est de même pour tous les triangles.

Pour sa démonstration, Legendre a fait expressément usage de l'axiome d'Archimède, mais on sait qu'on peut construire une Géométrie sans faire appel à l'axiome d'Archimède; les théorèmes de Legendre y sont-ils valables ?

M. Dehn a établi que le second théorème peut se conclure des groupes d'axiomes I, II, IV (le troisième qui comprend l'axiome des parallèles ne devant pas intervenir); la même chose est impossible pour le premier. Il a dû naturellement développer, suivant la méthode de Hilbert, une Géométrie non-legendrienne et résume ses divers résultats dans le Tableau suivant :

Somme Σ des angles d'un triangle.	Nombre de parallèles à une droite, passant par un point.		
	0.	1.	∞.
$\Sigma > 2$ dr.	Géom. elliptique.	Impossibilité	Géom. non-legendrienne.
$\Sigma = 2$ dr.	Impossibilité.	Géom. euclidienne.	Géom. semi-euclidienne.
$\Sigma < 2$ dr.	Impossibilité.	Impossibilité.	Géom. hyperbolique.

Rohn (*K.*). — Quelques théorèmes sur les groupes réguliers de points (p. 440-449).

Il s'agit des systèmes réguliers de points qui représentent les diverses molécules d'un milieu cristallin.

Un groupe illimité de points est dit *régulier*, s'il est possible de fixer pour chacun d'eux un arrangement des points du groupe qui soit le même quand on passe d'un point à un autre.

Il n'y a lieu de considérer ici que des groupes où deux points sont toujours à une distance finie.

Le système des points qui entourent un point P du groupe peut être amené

à coïncider avec celui des points qui entourent P_1 par un déplacement, ou par un déplacement suivi d'une symétrie.

Dans ce dernier cas, les points du groupe se partagent en deux classes qui satisfont à la première condition.

L'ensemble des déplacements (translation suivie d'une rotation : Schraubungen) qui amènent P sur P_1 et font correspondre à chaque point du groupe un autre point du groupe forment un *groupe de déplacements* Γ; on peut amener tout point P à coïncider avec tout point P_1 par un de ces déplacements.

M. Bohn établit alors le *théorème fondamental* d'après lequel *le groupe* Γ *ne peut renfermer que des déplacements pour lesquels les rotations finies sont congrues* (mod 2π) *à*

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \pi.$$

Enfin si A et B désignent deux de ces déplacements, on a toujours une relation de la forme

$$A^{\alpha} B^{\beta} A^{\alpha_1} B^{\beta_1} \ldots = 1.$$

Wendt (*E.*). — Sur la décomposition de $x^m - a$ dans un corps quelconque (p. 450-456).

M. Vahlen (*Acta mathematica*, t. XIX) a établi que, dans le domaine des nombres rationnels, les seuls binomes réductibles se déduisent de $z^m - 1$ et $z - 1$ par la substitution $\left(z, \frac{z^n}{c}\right)$ où c est rationnel; M. Wendt démontre ici que *la condition nécessaire et suffisante pour la réductibilité de $x^m - a$ dans un corps* K *est que a soit le produit de la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre rationnel dans* K *et de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une fonction rationnelle de z dont les coefficients sont des nombres rationnels; z est une racine primitive de $z^n = 1$ et n un diviseur de m.*

Si le corps K ne renferme aucune fonction rationnelle de z à coefficients rationnels, on a seulement deux cas de réductibilité : 1° si a est la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre de K, n divisant m; 2° si m et a ont les formes $m = 4\delta$, $a = 4\gamma^4$, où δ est un nombre entier et γ rationnel dans K,

$$x^{4\delta} - 4\gamma^4 = (x^{2\delta} - 2\gamma x^{\delta} + 2\gamma^2)(x^{2\delta} + 2\gamma x^{\delta} + 2\gamma^2).$$

Si le corps K renferme une fonction rationnelle de z, c'est-à-dire si z vérifie une équation rationnelle de ce corps de degré inférieur à celui de $\varphi(x)$, le binome $x^n - a$ n'est réductible que dans deux cas : 1° si a est la puissance s d'un nombre de K, s étant un diviseur de n; 2° si $n = 2$ et $a = -D^{\frac{n}{2}}$, où D appartient à k.

Vahlen (*Th.*). — Démonstration du théorème de Lindemann sur la fonction exponentielle (p. 457-460).

Cette démonstration, inspirée par celle de M. Hilbert, ne fait appel qu'à des considérations élémentaires et écarte tout symbolisme analogue à celui employé par M. Gordan dans la même question.

Osgood (*W.-F.*). — Deuxième Note sur les fonctions analytiques de plusieurs variables (p. 461-464).

L'auteur éclaircit, sans la résoudre définitivement, une question qu'il a posée dans un travail antérieur (*M. A.*, t. LII).

Christoffel (*E.-B.*). — Sur la définition complète (Vollwerthigkeit) et la continuité des expressions analytiques (p. 465-491).

Soient $((x))$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de variables réelles, f une expression analytique $f(x_1, \ldots, x_n)$ ou $f((x))$ *choisie de façon à permettre une détermination de sa valeur;* M. Christoffel se propose de préciser le choix précédent, c'est-à-dire de fixer les conditions pour que de tout système de valeurs des arguments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on puisse déduire une valeur numérique de f entièrement déterminée.

Une discussion approfondie des notions de continuité, de points singuliers d'une expression analytique, etc., l'amène à conclure que, *si une expression analytique f possède une définition complète, le calcul littéral exécuté sur ses arguments est numériquement valable quelle que soit la valeur de ces arguments*, c'est-à-dire qu'on peut regarder les arguments comme des nombres complets (nombres rationnels).

Fano (*G.*). — Sur les équations différentielles linéaires et homogènes dont les solutions fondamentales sont liées par des relations algébriques (p. 492-500).

Exposition systématique des recherches entreprises par l'auteur, sur le conseil de M. Klein, pour relier par des considérations géométriques les recherches de Fuchs, Schlesinger, Wallenberg à celles sur les variétés algébriques qui admettent un groupe de transformations projectives (Klein, Lie, Laguerre et Halphen) et à celles sur le *groupe de rationalité* de MM. Picard et Vessiot.

Soit à chercher toutes les équations différentielles linéaires d'ordre n dont le groupe de rationalité, regardé comme groupe projectif de l'espace E_{n-1}, transforme en elle-même une variété algébrique. Si cette variété algébrique est définie par

$$f_\lambda(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, k) \tag{1}$$

sans qu'on ait identiquement, pour un système fondamental de solutions de l'équation différentielle,

$$f_\lambda(y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

M. Fano montre qu'on peut, par la résolution d'une équation algébrique à coefficients rationnels connus et par des opérations rationnelles, obtenir des fonctions $\eta_i(x)$ qui vérifient identiquement les relations (1) sous la forme

$$\eta_i = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_i' + \ldots + \alpha_l y_i^{(l)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où les α sont connus. L'équation différentielle, vérifiée par les η_i (qui est en

général d'ordre n), peut être calculée effectivement et, une fois les η_i connus, on en déduira les y_i par des opérations rationnelles. Le cas d'une seule relation algébrique est particulièrement intéressant.

Si l'équation, vérifiée par les η_i, est d'ordre inférieur à n, après sa résolution, il y aura lieu de chercher les solutions fondamentales y qui satisfont à

$$x_0 y + x_1 y' + \ldots + x_l y^{(l)} = 0,$$

c'est-à-dire que les η_i ne donneront que $(n - l)$ solutions fondamentales y.

Après avoir retrouvé les résultats connus sur l'équation du troisième ordre dont les solutions fondamentales vérifient une relation algébrique, M. Fano montre que *toute équation linéaire d'ordre n qui possède comme solution une courbe normale rationnelle d'ordre $(n-1)$ a tous ses invariants de Laguerre nuls et peut être transformée en* $\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0$ *en posant*

$$y = \rho z, \quad x = \rho(\xi).$$

Si l'on suppose qu'il existe entre les solutions $y_1, \ldots, y_n$ d'une équation d'ordre n une relation quadratique homogène (qu'on peut supposer à déterminant non nul), on ne sait pas en conclure de résultats généraux. M. Fano a étudié les cas simples où $n \leq 5$ et où une courbe intégrale appartient à une multiplicité algébrique d'un petit nombre de dimensions (≤ 3).

D'autres parties de son important travail se rapportent aux équations différentielles *d'ordre n* :

a. Dont une courbe intégrale est algébrique [elles s'intègrent algébriquement ou par quadratures (sauf si la courbe intégrale est une courbe normale rationnelle d'ordre $n-1$)];

b. Dont une courbe intégrale se trouve sur une surface algébrique à deux dimensions (M. Fano indique les cas où l'équation ne se ramène pas aux quadratures);

c. Dont une courbe intégrale se trouve sur une variété algébrique à trois dimensions (à part des quadratures et des opérations algébriques, l'intégration se ramène à celle d'équations des ordres suivants : 4; 3 et 4; 2, 2 et 2).

Kluyver (*J.-C.*). — Le théorème de Staudt-Clausen (p. 591-592).

Korn (*A.*). — Sur des solutions du problème de Dirichlet qui peuvent être trouvées par une combinaison des méthodes de Neumann et Schwarz (p. 593-608).

La combinaison des deux méthodes de Neumann et Schwarz permet à l'auteur de former, pour l'espace intérieur à une surface fermée quelconque à courbure continue ω, des solutions du problème de Dirichlet, sous les conditions suivantes imposées aux valeurs f de la fonction cherchée sur ω :

a. Il existe une fonction F, définie dans l'espace compris entre ω et une surface intérieure ω_1 aussi voisine de ω que l'on veut, uniforme et continue dans cet espace ainsi que ses deux dérivées premières et y possédant des dérivées secondes finies, qui prend sur la surface ω les valeurs f.

b. Il existe une fonction potentielle F de l'espace limité par ω et ω qui prend sur ω les valeurs f.

Une proposition analogue a lieu pour l'espace extérieur à ω. M. Korn indique encore une généralisation de la condition (*b*).

Tome LIV, 1901.

Neumann (*C.*). — Sur la méthode de la moyenne arithmétique, en particulier sur les compléments apportés aux recherches correspondantes de Poincaré par les travaux de A. Korn et E.-R. Neumann (p. 1-48).

Nouvel exposé par M. C. Neumann de sa méthode de la moyenne arithmétique où il utilise les idées émises par Poincaré (*Acta mathematica*, t. 20) sous la forme que A. Korn leur a données (*Lehrbuch der Potentieltheorie*, Berlin, 1899), du moins les propositions établies sans l'intervention du principe de Dirichlet, de manière à laisser tomber la condition de *convexité* imposée à la surface fermée τ sur laquelle on fixe les valeurs de la fonction potentielle cherchée.

Stäckel (*P.*). — Friedrich Ludwig Wachter. Contribution à l'Histoire de la Géométrie non euclidienne (p. 50-85).

Stäckel (*P.*). — Sur les trajectoires d'une certaine classe de problèmes de Dynamique (p. 86-90).

Dans divers travaux, M. Stäckel a signalé, depuis 1891, une classe remarquable de problèmes de Dynamique où les équations différentielles du mouvement, à n variables, possèdent au moins n intégrales quadratiques et se laissent complètement intégrer par quadratures. Il montre ici qu'*une trajectoire remplit, en général, d'une façon* DENSE *un espace à n dimensions*.

Soient

$$\varphi_{\alpha\beta}(p_\alpha)\,[(\alpha, \beta = 1, \ldots, n); (\beta \geq \alpha, 1, \ldots, n)]$$

$n(n+1)$ fonctions arbitraires des arguments p_α; formons les déterminants

$$|\varphi_{\alpha\beta}| = \Phi = \sum \varphi_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n),$$

$$\Psi_\beta = \sum \varphi_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} \qquad (\beta = 1, \ldots, n),$$

si, dans un problème de Dynamique, on a, pour la force vive,

$$2T = \sum \frac{\Phi}{\Phi_{\beta\beta}} \left(\frac{dp_\beta}{dt}\right)^2,$$

et pour la fonction des forces,

$$\Pi = \frac{\Psi_\beta}{\Phi},$$

ce problème possède les intégrales quadratiques

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\Phi\Phi_{\alpha\beta}}{(\Phi_{\alpha 1})^2}\left(\frac{dp_\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{\Psi_\beta}{\Phi} = c_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n),$$

où les c_β sont des constantes arbitraires, et les équations du mouvement sont

$$\sum \int \frac{\varphi_{\alpha 1}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}} = t + \tau, \qquad \sum \int \frac{\varphi_{\alpha\beta}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}} = c_\beta \qquad (\beta = 2, 3, \ldots, n),$$

où l'on a posé

$$\psi_\alpha(p_\alpha) = 2\varphi_{\alpha 0} + 2c_1\varphi_{\alpha 1} + \ldots + 2c_n\varphi_{\alpha n}.$$

En général, s'il existe des mouvements possibles, on peut, pour un certain domaine des valeurs $c_1, \ldots, c_n$, poser

$$\psi_\alpha(p_\alpha) = (p_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - p_\alpha)\chi_\alpha(p_\alpha),$$

où a_α, b_α sont réels et constants, de sorte que, pour $a_\alpha \leq p_\alpha \leq b_\alpha$, $\psi_\alpha(p_\alpha)$ garde un signe constant positif. Dans le domaine où les p_α satisfont à ces inégalités, et où Φ ne s'annule pas, les intégrales

$$\sum_\alpha \int_{a_\alpha}^{p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}\, dp_\alpha}{\sqrt{(p_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - p_\alpha)\chi_\alpha(p_\alpha)}} = t_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, n)$$

définissent $p_1, \ldots, p_n$ comme des fonctions uniformes continues et paires de $t_1, \ldots, t_n$ avec les n systèmes de périodes $2\omega_{\alpha 1}, \ldots, 2\omega_{\alpha n}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$

$$\omega_{\alpha\beta} = \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}}.$$

Si ces périodes sont indépendantes, on peut choisir les entiers m_β de façon que chacune des expressions

$$\sum 2m_\alpha\omega_{\alpha\beta} \qquad (\beta = 2, \ldots, n)$$

soit aussi voisine de zéro qu'on le veut.

Minkowski (*H.*). — Sur l'approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels (p. 91-124).

Parmi les divers développements en fraction continue d'un nombre réel a, qui possèdent pour numérateurs ± 1 et pour dénominateurs des nombres entiers positifs, il en est un (celui qui converge le plus rapidement) pour lequel les réduites $\frac{x}{y}$ sont formées avec les couples (x, y) premiers entre eux $(y > 0)$, qui satisfont à la condition

$$|(x - ay)y| < \frac{1}{2}.$$

Le cas $a = n + \frac{1}{2}$ est écarté

M. Minkowski arrive à cette proposition par une étude géométrique (suivant la voie ouverte par Klein) du système de deux formes linéaires $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ à coefficients réels quelconques, où x et y sont des entiers, positifs ou négatifs, indéterminés.

Ricci (*G.*) et *Levi-Civita* (*T.*). — Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications (p. 126-201).

M. Ricci a déjà résumé (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1892, p. 167) l'algorithme qu'il a baptisé *Calcul différentiel absolu* et qui n'est, au fond, qu'un calcul de covariants différentiels pour une forme quadratique de différentielles dite *forme fondamentale*. MM. Ricci et Levi-Civita, dans le très intéressant exposé qu'ils donnent ici, examinent en détail les nombreuses applications qu'ils ont fait l'un et l'autre de la méthode de M. Ricci.

I. *Algorithme du Calcul différentiel absolu.* — Si l'on a, pour un changement de variables des $x_1, \ldots, x_n$ en $y_1, \ldots, y_n$,

$$a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n = b_1 dy_1 + \ldots + b_n dy_n,$$

on a aussi

$$b_i = \sum a_j \frac{dx_j}{dy_i}.$$

le système des a est dit système *covariant* d'ordre 1. Il en est ainsi si les a_i sont les dérivées d'une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Pour un *système covariant d'ordre m*, on a

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_m}^{n} X_{s_1 s_2 \ldots s_m} \frac{dx_{s_1}}{dy_{r_1}} \frac{dx_{s_2}}{dy_{r_2}} \cdots \frac{dx_{s_m}}{dy_{r_m}}.$$

Les éléments $dx_1, \ldots, dx_n$ forment un système *contrevariant* d'ordre 1

$$dy_i = \sum_k \frac{dy_i}{dx_k} dx_k$$

et pour un *système contrevariant d'ordre m*, on a

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_m}^{n} X_{s_1 s_2 \ldots s_m} \frac{dy_{r_1}}{dx_{s_1}} \frac{dy_{r_2}}{dx_{s_2}} \cdots \frac{dy_{r_m}}{dx_{s_m}}$$

Si l'on pose

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{s_1, \ldots, s_p}^{n} \Xi_{s_1 \ldots s_p} X_{r_1 \ldots r_m s_1 \ldots s_p}$$

les $Y_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ forment un système covariant d'ordre m *composé* d'un système covariant d'ordre $m+p$ et d'un système contrevariant d'ordre p. On compose de même un système covariant d'ordre p et un système contrevariant d'ordre $m+p$.

Si l'on choisit une forme quadratique (*forme fondamentale*)

$$\varphi = \sum a_{rs} dx_r dx_s,$$

comme élément linéaire à n dimensions d'une variété V_n, les a_{rs} forment un système covariant d'ordre 2. Si l'on désigne par $a^{(rs)}$ les éléments du système réciproque des a_{rs}, on a les identités

$$a^{(rs)} = \sum a^{(rp)} a^{(sq)} a_{pq},$$

le système contrevariant

$$X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)} = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_m} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_m s_m)} X_{s_1 s_2 \ldots s_m}$$

est dit *réciproque* du système covariant $X_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ par rapport à φ. Christoffel a établi, par le calcul, que si l'on pose

$$\frac{da_{ik}}{dx_l} = \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \sum_p a_{(ip)} \left\{ \begin{matrix} ik \\ p \end{matrix} \right\},$$

les formules

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{dx_{r_{m+1}}} - \sum_l \sum_q \left\{ \begin{matrix} r_l r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}$$

permettent de déduire, de tout système covariant d'ordre m, un système covariant d'ordre $(m+1)$. C'est là ce que M. Ricci appelle *dérivation covariante selon* φ.

On définit la dérivation contrevariante *d'un système contrevariant* en passant au système réciproque, dérivant ce dernier et repassant de nouveau au système réciproque.

Pour qu'un système $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ soit le dérivé covariant d'un système d'ordre m, il faut et il suffit que les éléments

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}} \quad \text{et} \quad X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$$

soient identiques.

II. *Géométrie intrinsèque.* — Les équations $\frac{dx_1}{\lambda_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda_n}$ définissent une congruence de lignes C de V_n : les λ_r sont les coordonnées *contrevariantes* de la congruence et les

$$\lambda_r = \sum a_{rs} \lambda^s$$

en sont les coordonnées *covariantes*, de sorte que

$$\lambda^r = \frac{dx_r}{ds}.$$

Un système de n congruences, deux à deux orthogonales, est dit *ennuple orthogonal* : on le définit par n systèmes contrevariants $\lambda_h^{(r)}$ $(h = 1, \ldots, n)$, satisfaisant aux conditions

$$\sum_r \lambda_h^r \lambda_{kr} = \tau_{hk} \qquad (h, k = 1, \ldots, n),$$

$$\tau_{hk} = 0, \qquad (h \neq k), \qquad \tau_{hh} = 1.$$

Tout système covariant $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ s'écrit alors, d'une seule manière, sous la forme

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_m} C_{h_1 h_2 \ldots h_m} \lambda_{h_1|r_1} \lambda_{h_2|r_2} \ldots \lambda_{h_m|r_m},$$

où les $C_{h_1 h_2 \ldots h_m}$ sont des *invariants*.

Si l'on se déplace le long de la ligne de la congruence $[h]$ d'indice inférieur h, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \lambda_h^r.$$

Pour les lignes coordonnées, les propriétés métriques relatives à la courbure résultent de l'expression des dérivées des $\lambda_{h|r}$. Ces dérivées satisfont à $\frac{n^2(n+1)}{2}$, équations qu'on peut écrire

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, \ldots, n)$$

en posant

$$\gamma_{hkl} = \sum_{r,s} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} \lambda_{h|rs}.$$

On en conclut aussi

$$\lambda_{h|rs} = \sum_{i,j} \gamma_{hij} \lambda_{i|r} \lambda_{j|s},$$

et les γ_{hij} independants en nombre $\frac{n^2(n-1)}{2}$ sont les invariants métriques, liés simplement aux courbures des lignes coordonnées.

Quand on passe aux dérivées intrinsèques du second ordre, on a, pour une fonction quelconque f,

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k} = \sum_i (\gamma_{ikh} - \gamma_{ihk}) \frac{\partial f}{\partial s_i}.$$

Pour qu'une des congruences coordonnées, $[n]$ par exemple, soit *normale*, c'est-à-dire formée des trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, il faut et il suffit qu'on ait les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations

$$\gamma_{nkh} = \gamma_{nhk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On peut alors poser

$$f_r = \mu \lambda_{n|r} = e^{\psi} \lambda_{n|r}$$

et la fonction ψ est déterminée par le système

$$\psi_r = \nu \lambda_{n|r} + \sum_i^{n-1} \gamma_{nin} \lambda_{i|r},$$

ou ν est une fonction indéterminée.

Pour que la famille de surfaces, ayant les lignes $[n]$ comme trajectoires orthogonales, soit *isotherme*, il faudra $\gamma = -\sum_{i}^{n-1} \gamma_{inn}$. Les conditions d'intégrabilité de γ, exprimées avec les invariants, seront alors

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s_h} + \frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \gamma \gamma_{hnn} + \sum_{i}^{n-1} \gamma_{inn} (\gamma_{ihn} + \gamma_{inh}) = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} + \sum_{i}^{n-1} \gamma_{inn} \gamma_{ihk} + \frac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h} + \sum_{i}^{n-1} \gamma_{inn} \gamma_{ikh} \qquad (h, k = 1, \ldots, n-1).$$

Pour que les lignes coordonnées $[n]$ soient *géodésiques* (la variation première de $\int ds$ entre deux points de la ligne est nulle), auquel cas on dira que $[n]$ est une *congruence géodésique*, il faut $\gamma_{inn} = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Si la congruence $[n]$ n'est pas géodésique, en regardant V_n comme contenu dans un espace euclidien S_{n+m}, on peut attribuer à chacune de ses lignes une *courbure géodésique* : on mène par le point P considéré un vecteur de S_{n+m} tangent à V_n, de longueur $\gamma = \sqrt{\sum_{i}^{n-1} (\gamma_{inn})^2}$ et dont la direction soit la tangente à la ligne menée par P, qui appartient à la congruence dont le système coordonné covariant est

$$\gamma_r = \sum_{i}^{n-1} \gamma_{inn} \lambda_{ir}.$$

Les invariants γ_{ikl} ne sont pas indépendants : si l'on pose

$$\gamma_{h,kl} = \frac{\partial \gamma_{ikl}}{\partial s_l} - \frac{\partial \gamma_{ihl}}{\partial s_k} + \sum_{i}^{n} \gamma_{hi} (\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}) + \gamma_{hk} \gamma_{nkl} + \gamma_{hl} \gamma_{nlk},$$

ils doivent vérifier les relations

$$\gamma_{h,kl} = \sum_{q,r,s,t}^{n} \lambda_h^q \lambda_i^r \lambda_k^s \lambda_l^t a_{qrst},$$

où les a_{qrst} sont les $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ symboles de Riemann, attachés à la forme fondamentale. Ces relations sont nécessaires et suffisantes pour que les $\frac{n^2(n-1)}{2}$ fonctions distinctes γ_{ikl} puissent être regardées comme les invariants (*coefficients de rotation*) d'un *ennuple orthogonal* dans la variété V_n de $ds^2 = \sum a_{rs} dx_r dx_s$.

MM. Ricci et Levi-Civita passent alors aux applications de leur calcul; nous nous bornons à en signaler le sujet. Le lecteur pourra ainsi en apprécier la variété et l'intérêt.

Applications analytiques. — Classification des formes quadratiques de différentielles. Invariants absolus. Paramètres différentiels.

Applications géométriques. — Étude des variétés à deux dimensions. Surfaces de l'espace ordinaire. Extension de la théorie des surfaces aux espaces linéaires à n dimensions. Groupes de mouvements dans une variété quelconque. Étude complète des groupes de mouvements d'une variété à trois dimensions. Relations avec les recherches de Lie et de Bianchi.

Applications mécaniques. — Intégrales premières des équations de la Dynamique. Intégrales linéaires, quadratiques : conditions d'existence. Surfaces dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique. Transformation des équations de la Dynamique.

Applications physiques. — Cas de réductibilité à deux variables de l'équation $\Delta u = 0$ (potentiels binaires). Champs vectoriels. Équations en coordonnées générales de l'électrodynamique, de la théorie de la chaleur et de l'élasticité.

Hirsch (*A.*). — Sur les relations bilinéaires entre les périodes des intégrales de faisceaux réciproques de formes (p. 201-322).

Si l'on choisit convenablement les solutions fondamentales de deux équations différentielles linéaires *à coefficients rationnels, adjointes*, les substitutions qu'elles éprouvent, quand la variable tourne autour d'un point singulier, sont contragrédientes. Il en est de même pour deux faisceaux de fonctions *de même espèce* (Art) que ces solutions fondamentales, au sens de Schlesinger (*Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. II, p. 120). On désigne, sous le nom de *faisceaux réciproques*, deux faisceaux qui subissent des substitutions contragrédientes, quand la variable décrit un chemin fermé; lorsqu'il n'existe pas pour les fonctions de points d'indétermination, les faisceaux réciproques ne sont autres que ceux que nous venons de signaler.

Une *période* de l'intégrale d'une fonction multiforme est la valeur d'une de ces intégrales, prise le long d'un contour fermé renfermant des points singuliers de la fonction ou suivant un chemin, qui va d'un de ces points singuliers à un autre.

M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. LXXVI et *Sitzungsberichte*, Berlin, 1892) a étudié les relations bilinéaires entre les périodes des intégrales des solutions fondamentales de certaines équations différentielles linéaires, en partant, comme Weierstrass l'avait fait pour les périodes des intégrales hyperelliptiques, du théorème d'Abel sur l'échange du paramètre et de l'argument. L'importance des résultats obtenus, pour le développement de la théorie de ces intégrales (et des fonctions inverses), a engagé M. Hirsch à les reprendre, en se plaçant au point de vue de la théorie des invariants des formes algébriques et regardant les solutions de l'équation différentielle (1) comme des formes transcendantes homogènes : le point de ramification à l'infini de l'équation différentielle (supposée *régulière* au sens de Fuchs) est remplacé par un paramètre variable, et les périodes des intégrales de ses solutions sont étudiées comme fonctions de ce paramètre; elles vérifient aussi une équation différentielle linéaire (2). *Les périodes des intégrales des solutions de l'équation différentielle adjointe à* (1), *regardées comme fonctions du même paramètre, satisfont à l'équa-*

tion adjointe à (2). On conclut de là l'existence de relations bilinéaires entre les périodes des intégrales de deux faisceaux réciproques.

Le travail de l'auteur est divisé en trois parties : la première a pour but la formation de l'équation différentielle vérifiée par les périodes, et l'établissement des relations bilinéaires qui les lient; la seconde contient l'étude des relations bilinéaires de *seconde espèce*, qui découlent du théorème d'Abel (échange du paramètre et de l'argument); la troisième est consacrée au développement des relations de *première espèce*, obtenues en généralisant la méthode d'intégration le long d'un contour, par laquelle Riemann a établi les relations bilinéaires entre les périodes des intégrales abéliennes, et à la démonstration des inégalités vérifiées par les périodes.

Richmond (*H.*). — Sur les surfaces minima (Rectification) (p. 323-324).

A l'encontre d'une affirmation de S. Lie, la seule surface minima réelle du douzième ordre est définie par les équations

$$x = k(u^3 - 3uv^2 - 3u : (u^2 - v^2)),$$
$$y = k(v^3 - 3vu^2 - 3v : (u^2 - v^2)),$$
$$z = 6ku.$$

Zindler (*K.*). — Sur le nombre des variables essentielles dans un groupe continu à r paramètres (p. 325-328).

Le nombre de variables nécessaires pour représenter tous les types de groupes à r paramètres est au plus $\left(\frac{r-1}{2}\right)^2$ pour r impair, $\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-1\right)$ pour r pair.

Geiser (*C.-F.*) et *Maurer* (*L.*). — Elwin Bruno Christoffel (p. 329-346).

Notice nécrologique. Discours de Windelband. Publications.

Christoffel (*E.-B.*). — Théorie complète des fonctions thêta de Riemann (p. 347-399).

Dans la théorie habituelle, on ne s'occupe que des sommes de Jacobi avec les modules et les arguments de Riemann, sommes qui peuvent être identiquement nulles; ces éléments sont parfois insuffisants pour représenter des expressions dans toute leur région d'existence, par exemple, les fonctions algébriques qui possèdent p infinis du premier ordre donnés et admettent le long des coupures fondamentales des multiplicateurs (racines de l'unité) donnés. M. Christoffel a observé qu'on peut définir des fonctions $\mathfrak{Z}$ générales uniformes et continues sur la surface de Riemann coupée (à connexion simple), en donnant les multiplicateurs relatifs aux coupures fondamentales.

Quand on abandonne leur mode d'expression au moyen des intégrales normales de première espèce $u_1, \ldots, u_p$, on peut encore les représenter par une expression qui garde toujours la même forme. Cependant, il est bon de se

borner aux fonctions de Riemann, quand on veut représenter les fonctions algébriques et leurs intégrales sans introduire d'irrationnalités superflues : les seules nécessaires sont les valeurs des intégrales normales de première espèce et leurs différences (modules de périodicité).

Après une démonstration de la convergence de la série ϑ de Jacobi, formée avec les modules de Riemann, M. Christoffel étudie les fonctions ϑ définies par leurs paramètres : Dans le cas où $\vartheta\|u_\lambda - e_\lambda\|$ est identiquement nul, en vertu du choix des paramètres, il montre qu'on peut former une suite *secondaire*

$$\vartheta_\rho\|u_\lambda - e_\lambda\|$$

qui, sans être identiquement nulle, représente une fonction ϑ avec ces paramètres. Cette suite secondaire n'est pas entièrement déterminée par les paramètres : les zéros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ de la fonction, qui résultent des paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_p$, ne comprennent que ρ points *nécessaires;* c'est un système de points de première espèce, entièrement déterminé par ρ de ses points.

Toute fonction ϑ avec les paramètres $e_1, \ldots, e_p$ est représentée par une suite secondaire.

On peut alors établir que les p sommes

$$u_\lambda(\varepsilon_1) + \ldots + u_\lambda(\varepsilon_p) \qquad (\lambda = 1, \ldots, p)$$

prennent (mod périodes) tout système de valeurs $\nu_1, \ldots, \nu_p$.

L'étude des fonctions ϑ, caractérisées par leurs zéros $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$, et celle des constantes de Riemann $K_1, \ldots, K_p$, faite d'abord pour un domaine hyperelliptique, terminent ce travail, qui constitue un important complément à la théorie classique des fonctions ϑ de Riemann.

Pascal (*E.*). — Fondements d'une théorie des équations aux différentielles totales du second ordre (p. 400-416).

(Traduction allemande par A. Schepp, du Mémoire italien.)

Soit le système

$$d^2x_{n-m+1} - \sum_{h,k} X_{hk1}\, dx_h dx_k = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$d^2x_n - \sum_{h,k} X_{hkm}\, dx_h dx_k = 0,$$

où les X sont des fonctions de toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$; pour qu'il admette une solution représentée par m relations entre les x, c'est-à-dire, soit *complètement intégrable*, il faut et il suffit que l'on ait

$$[jhki] = 0 \qquad \begin{matrix}(j, h, k = 1, \ldots, n),\\ (i = 1, \ldots, m),\end{matrix}$$

où

$$[jhki] = \frac{\partial X_{jki}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_{hki}}{\partial x_j} + \sum_s^m (X_{j,n-m+s} X_{hks} - X_{h,n-m+s} X_{jks}).$$

On a ainsi $\frac{m(n-1)n(n+1)}{3}$ conditions seulement linéairement indépendantes, à cause des identités

$$[jhki] + [jkhi] = [khji].$$

M. Pascal développe aussi, pour les systèmes précédents, une théorie du multiplicateur.

Petrovitch (*M.*). — Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre (p. 417-436).

Étant donnée une équation

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

et le point initial (x_0, y_0) d'une intégrale réelle, on saura toujours former deux autres équations

$$\frac{du}{dx} = F_1(x, u), \qquad \frac{dv}{dx} = F_2(x, v)$$

et fixer un intervalle comprenant x_0, de façon que y y soit déterminé, fini, continu et compris entre les valeurs correspondantes des intégrales u, v qui, pour $x = x_0$, prennent la valeur y_0.

Après avoir établi cette proposition et fixé les cas d'exception, M. Pétrovitch en indique d'intéressantes applications aux équations

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x), \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 + f(x),$$

et à d'autres de forme plus générale; il obtient ainsi des indications sur l'allure des courbes intégrales dans un intervalle fini.

Hensel (*K.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques d'une variable et les intégrales abéliennes (p. 437-497).

M. Hensel développe ici sa théorie des fonctions algébriques d'une variable, qu'il a étendue (*Acta Mathematica*, t. XXIII) aux fonctions de deux variables.

Il admet simplement qu'en tout point $(x = a, y)$ de la courbe $K(x, y) = 0$, ou de la surface de Riemann correspondante, une fonction rationnelle quelconque $f(x, y)$ peut se développer en série de puissances convergente

$$f = (x-a)^{\frac{\rho}{\lambda}}(a_0 + a_1(x-a)^{\frac{1}{\lambda}} + \ldots) = (x-a)^{\frac{\rho}{\lambda}} E(x, a),$$

où $a_0 \neq 0$; le nombre ρ est *l'ordre* de f au point a.

Le problème qui domine toute la théorie est la détermination d'un système de fonctions rationnelles en x et y, linéairement indépendantes, qui possèdent en h points donnés arbitrairement sur la surface $P_1, P_2, \ldots, P_h$ les ordres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$. M. Hensel indique un procédé, constamment applicable, pour

obtenir par un nombre fini de calculs élémentaires un *tel système fondamental.*

A chaque point P, on fait correspondre un diviseur, représenté aussi par P, et l'on dit que la fonction $\xi(x, y)$ possède au point P le diviseur P^{ρ}, si son ordre en ce point est ρ.

Les diviseurs $Q = P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_h^{\lambda_h}$ forment un domaine, qui comprend les éléments du corps K, car, à chaque élément ξ, correspond le diviseur Q_ξ, formé par ses zéros et ses pôles, mais il existe des diviseurs Q, auxquels ne correspond aucun élément ξ. M. Hensel partage les diviseurs en *classes* : la classe *principale* E est formée par les diviseurs Q_ξ; une classe est formée de tous les diviseurs Q, qui s'obtiennent en multipliant l'un d'entre eux par tous les diviseurs de E.

Le problème fondamental consiste *a trouver, dans une classe de diviseurs* R, *un système de multiples linéairement indépendants d'un diviseur* Q.

(Le cas général peut être ramené aisément à celui où R = E.)

Le nombre de ces multiples $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$ ne dépend que des deux classes Q et R : c'est l'invariant le plus important du corps algébrique.

Dans la seconde Partie de son travail, M. Hensel étudie les intégrales abéliennes. Si ξ et η sont deux éléments de K, puisque $\frac{d\eta}{d\xi}$ appartient aussi à K, on peut faire correspondre à toute différentielle $d\omega = \xi\, dx$ un diviseur équivalent W_ω, dont les facteurs premiers déterminent les points non réguliers de l'intégrale : soit ω_0 la constante d'intégration qui correspond au point P, les diviseurs premiers du dénominateur de W_ω donnent les infinis de $\omega - \omega_0$ et leur ordre, ceux du numérateur donnent les zéros.

Aux différentielles $d\omega$, correspondent tous les diviseurs d'une classe W (classe différentielle), qu'on peut étudier comme une classe quelconque. Le problème fondamental est la recherche de toutes les intégrales linéairement indépendantes, qui sont régulières partout, sauf aux points $P_1, P_2, \ldots, P_h$, où elles ont des ordres déterminés. M. Hensel résout algébriquement ce problème : le calcul du nombre $\left\{\frac{W}{Q}\right\}$ donne le théorème de Riemann-Roch. Si l'on prend

$$Q = 1, \quad \frac{1}{P^m}, \quad \frac{1}{PP'},$$

on trouve les intégrales élémentaires de première, deuxième et troisième espèce, d'où l'expression d'une intégrale quelconque à l'aide de celles-là.

Timerding (*H.-E.*). — Sur les 16 points doubles et les 16 plans doubles de la surface de Kummer (p. 498-502).

Wolfskehl (*P.*). — Sur un problème d'Arithmétique élémentaire (p. 503-504).

Quels sont les entiers N, tels que les $\varphi(N)$ nombres *premiers avec* N et inférieurs à N soient tous des nombres premiers ?

Ce sont 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Liebmann (*H.*). — Nouvelle démonstration de l'indéformabilité d'une surface fermée convexe (p. 504-517).

Supposons qu'on considère, dans une forme S de la surface fermée convexe considérée, les droites qui joignent ses divers points $M(x, y, z)$ à un point $P(a, b, c)$ pris à son intérieur. Si l'on imagine chacune d'elles liée invariablement au trièdre formée en M par la normale MN à la surface et les tangentes aux deux courbes $u =$ const., $v =$ const., qui passent en M, dans une déformation de S qui entraîne ces droites, les extrémités P des segments MP viendront se placer sur une suface Σ.

Si l'on envisage seulement une déformation infinitésimale, les variations de a, b, c sont $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$. M. Liebmann considère la surface lieu des points (α, β, γ), qu'il appelle *surface polaire* : elle se réduit à un point lorsque la déformation se réduit à un déplacement et réciproquement. Dans le cas général, elle est *tout entière à distance finie* et *à courbure négative en tout point sans exception* : ces deux propriétés s'excluent l'une l'autre. Une surface fermée convexe n'est donc pas susceptible d'une déformation infinitésimale, qui ne se réduise pas à un simple déplacement.

Cette démonstration remplace celle que M. Liebmann avait donnée (*M. A.*, t. LIII), qui était beaucoup plus compliquée et présentait des points délicats.

Broden (*T.*). — Sur les fonctions qui ont une infinité non dénombrable de points de discontinuité (p. 518-530).

Wellstein (*J.*). — Sur la théorie des corps algébriques (p. 521-540).

L'auteur s'est proposé de développer la théorie d'un corps algébrique K de plusieurs variables, défini par une équation

$$F(y, x_1, \ldots, x_r) = 0, \tag{1}$$

de manière que la fraction y et les variables $x_1, \ldots, x_r$ y jouent le même rôle que des fonctions rationnelles quelconques de $y, x_1, \ldots, x_r$. Si l'on désigne, en effet, par

$$\xi_\varrho(y, x_1, \ldots, x_r) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

r fonctions rationnelles de $y, x_1, \ldots, x_r$ algébriquement indépendantes, en tenant compte de (1), on peut adjoindre, d'une infinité de manières, aux relations

$$\xi_\varrho = \xi_\varrho(y, x_1, \ldots, x_r)$$

une fonction rationnelle

$$\eta = \varphi(y, x_1, \ldots, x_r)$$

de telle sorte que $y, x_1, \ldots, x_r$ s'expriment rationnellement, au moyen de $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r$ et η qui sont liées par une seule relation algébrique

$$\Phi(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_r) = 0 \tag{2}$$

définissant le corps K au même titre que (1).

Heffter (*L.*). — Sur la théorie des résultants (p. 541-544).

Kühne (*H.*). — Sur les strictions (p. 545-552).

La ligne de striction d'une famille de courbes tracées sur une surface est le lieu des points qui sont sur chaque courbe, à la distance minimum des courbes infiniment voisines.

Cette notion peut s'étendre aux familles de surfaces ou aux congruences de courbes; M. Kühne indique comment on peut faire cette extension.

Schönflies (*A.*). — Sur des fonctions dérivables partout oscillantes (p. 552-563).

M. Schönflies est parvenu à caractériser les fonctions continues partout oscillantes, qui possèdent en tout point une dérivée déterminée, fonctions dont MM. Köpcke, Broden, Steinitz avaient donné des exemples.

Dikson (*E.-L.*). — Le groupe alterné de huit lettres et le groupe linéaire quaternaire congruentiel (mod 2) (p. 564-569).

M. Moore a indiqué un groupe abstrait holoédriquement isomorphe au groupe alterné de k lettres; il est engendré par les opérateurs $E_1, \ldots, E_{k-2}$ satisfaisant aux conditions

$$E_i^3 = E_{i+1}^2 = (E_i E_{i+1})^4 = (E_i E_j)^2 = 1 \qquad (i, i+1, j = 1, 2, \ldots, k-2; i+1 < j).$$

M. Dickson donne ici une démonstration élémentaire de ce fait. Il indique ensuite pour G_{168}, deux groupes isomorphes holoédriques dont l'un est formé des substitutions linéaires et homogènes à quatre indices (mod 2).

Landau (*E.*). — Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions de la théorie des nombres (p. 570-591).

Soit $\mu(k)$ la fonction définie par les conditions suivantes : 1° $\mu(1) = 0$; 2° $\mu(k) = 0$, si k possède un diviseur carré; 3° $\mu(k) = (-1)^\omega$, si k est le produit de ω facteurs premiers différents. M. Landau démontre ici rigoureusement qu'on a

$$\lim_{x=\infty} \left(\log x \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} \right) = 0,$$

en utilisant les résultats nouveaux dus à M. de la Vallée-Poussin sur la distribution des nombres premiers. Il indique, en outre, diverses évaluations asymptotiques des deux fonctions

$$g(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k}.$$

Par exemple, si l'on désigne par $OF(x)$ une fonction dont le rapport à $F(x)$ reste compris entre deux limites finies quand x augmente indéfiniment, on a les formules

$$f(x) = -1 + O(e^{c\sqrt{\log\log x}}), \qquad g(x) = O\left(\frac{1}{\log x e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right),$$

dont M. Landau développe quelques conséquences.

Landau (*E.*). — Sur le nombre moyen de décompositions de tous les nombres de 1 à x, en trois facteurs (p. 592-601).

Soit $T(\nu)$ le nombre des décompositions de ν en trois facteurs et

$$\tau(x) = \sum_{\nu=1}^{x} T(\nu).$$

M. Landau établit la formule

$$\tau(x) = \frac{1}{2} x \log^2 x - (3C - 1) x \log x + (3C^2 - 3C + 3C - 1) x + O\left(x^{\frac{2}{3}} \log x\right),$$

qui est d'accord avec un résultat antérieur de M. Franel. Il rappelle ensuite les résultats obtenus par M. Piltz (*Dissertation inaugurale*, Berlin, 1881) pour l'évaluation asymptotique de $\tau_1(x)$, à l'aide de la proposition suivant laquelle on déduit de

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \nu^{-s} = \sum_m \int_1^{\infty} f_m(x) x^{-s} dx,$$

l'égalité asymptotique

$$\sum_{\nu=1}^{x} c_\nu \nu^{-s} \sim \sum_m \int_1^{x} f_m(x) x^{-s} dx.$$

Capelli (*A.*). — Sur la réductibilité de $x^n - A$, dans un champ quelconque de rationalité (p. 602-603).

Réclamation de priorité au sujet des propositions établies par M. Wendt (*M. A.*, t. LIV).

Hansen (*C.*). — Sur la sommation de la série de Lambert (p. 604-607).

M. Hansen démontre la formule

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta'(\nu, q)}{\theta(\nu, q)} \operatorname{tang} \pi\nu \, d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta'(\nu, q^{\frac{1}{2}})}{\theta(\nu, q^{\frac{1}{2}})} \operatorname{tang} \pi\nu \, d\nu$$

à l'aide des expressions (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. II),

$$\frac{\theta'(\nu, q)}{\theta(\nu, q)} = \pi \cot \pi\nu - 4\pi \sum \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu$$

et

$$\frac{\theta'(\nu, q)}{\theta(\nu, q)} = 4\pi \sum (-1)^m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu.$$

Jules DRACH.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXVI; année 1909.

Gundelfinger (*S.*). — Sur les critères qui permettent, en coordonnées projectives générales, de discerner la position d'un point par rapport au tétraèdre de référence (1-16).

Le problème proposé a été résolu pour la première fois par Möbius, dans le cas des coordonnées barycentriques. L'auteur en reprend la solution par un procédé plus simple et l'étend au cas d'un système quelconque de coordonnées projectives.

A. Lemme fondamental. — *Soient, rapportées à un système de coordonnées cartésiennes*

$$A' = a'u + b'v + c'w + 1 = 0, \qquad A'' = a''u + b''v + c''w + 1 = 0,$$

les équations tangentielles de deux points A' *et* A''*; soit*

$$\varkappa' A' + \varkappa'' A'' \equiv (\varkappa' + \varkappa'') A = 0,$$

l'équation tangentielle d'un point A *de la droite* A'A''. Si l'on pose

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa' + \varkappa''} = \lambda', \qquad \frac{\varkappa''}{\varkappa' + \varkappa''} = \lambda'',$$

le point A est entre A' et A'' si $\frac{\lambda'}{\lambda''} > 0$, en dehors du segment A'A'' si $\frac{\lambda'}{\lambda''} < 0$. De plus, le point A est plus près de A' que de A'' si $\lambda' - \lambda'' > 0$.

B. *Critères pour un triangle de référence en coordonnées barycentriques.* — Soient

$$A_i = a_i u + b_i v + c_i w + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les équations tangentielles des trois sommets du triangle de référence,

$$\varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3 \equiv (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3) A = 0,$$

l'équation tangentielle d'un point A quelconque du plan du triangle. Ce point a pour coordonnées barycentriques $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. On pose

$$\lambda_i = \frac{\varkappa_i}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et l'on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

D'après cela, le lemme fondamental permet, d'après les signes de λ_1, λ_2, λ_3, de discerner la position du point A par rapport au triangle $A_1A_2A_3$. Si les λ sont tous positifs, le point est à l'intérieur du triangle. Si un seul des λ, soit λ_i est positif, le point est dans l'angle opposé par le sommet à l'angle A_i.

Si un seul des λ_i, soit λ_1, est négatif, le point est dans la région située à l'intérieur de l'angle A_1, au delà du côté A_2A_3.

C. *Critères pour un tétraèdre de référence.* — En désignant de même par

$$z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3 + z_4A_4 = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3 + z_4A_4 = 0,$$

l'équation tangentielle d'un point A de l'espace, et posant

$$\mu_i = \frac{z}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les signes des μ_i permettent de discerner la position du point A par rapport au tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$.

Si tous les μ sont positifs, le point est à l'intérieur du tétraèdre. Si deux des μ_i soient μ_1 et μ_2 sont positifs, les deux autres étant négatifs, le point A est dans le *comble* correspondant à l'arête A_1A_2. Si un seul des μ est positif, soit μ_1, le point est dans le trièdre opposé par le sommet au trièdre A_1. Si un seul des μ est négatif, soit μ_1, le point est à l'intérieur du trièdre A_1, au delà de la face $A_2A_3A_4$.

D. *Cas général.* — Si l'on a des coordonnées projectives quelconques x_1, x_2, x_3, x_4, on considère les quatre quantités p_1, p_2, p_3, p_4 définies par l'équation

$$p_i = \frac{e_i}{h_i},$$

où h_i est la hauteur du tétraèdre de référence relative au sommet A_i, e_i la distance à la base correspondante du point (1, 1, 1, 1). Alors il n'y a qu'à remplacer dans les énoncés précédents μ_i par $\dfrac{p_i x_i}{\Sigma p_k x_k}$.

E. *Remarques sur la théorie analytico-géométrique des sphères.* — Soient, dans un système de coordonnées rectangulaires,

$$k_i(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2 - r_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les équations de quatre sphères. Si l'on considère une sphère

$$z_1k_1 + z_2k_2 + z_3k_3 + z_4k_4 = 0,$$

les coefficients z_i sont les coordonnées barycentriques de son centre par rapport au tétraèdre formé par les centres des quatre sphères données. Introduisons de plus pour une sphère

$$K = k_{10}(x^2 + y^2 + z^2) + 2k_{11}x + 2k_{12}y + 2k_{13}z + k_{14} = 0,$$

la forme quadratique

$$K.K' = 2k_{10}k_{14} - 2k_{11} - 2k_{12} - 2k_{13} - 2k.$$

Alors la sphère orthogonale aux quatre sphères données a pour équation, en coordonnées barycentriques,

$$z_1^2(k_1, k_1) + 2z_1z_2(k_1, k_2) + \ldots + 2z_3z_4(k_3, k_4) = 0.$$

L'article se termine par la recherche des sphères qui coupent sous le même angle ou sous des angles supplémentaires plusieurs sphères données.

Perron (*Oskar*). — Sur un théorème de M. Poincaré. (17-37).

1. Soit une fonction D_ν définie pour les arguments $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, et satisfaisant à l'équation aux différences

$$D_{\nu+r} - a_1^\nu D_{\nu+r-1} - a_2^\nu D_{\nu+r-2} - \ldots - a_r^\nu D_\nu = 0,$$

dans laquelle les coefficients a_i^ν tendent, pour ν infini, vers des limites a_i. Si les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ de l'équation

$$\rho^r + a_1\rho^{r-1} + a_2\rho^{r-2} + \ldots + a_r = 0$$

ont des modules distincts et si

$$|\rho_1| > |\rho_2| > \ldots > |\rho_r|,$$

M. Poincaré a démontré que le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend, lorsque ν augmente indéfiniment, vers une limite égale à l'une des racines ρ_i (*Amer. Journ. of Mathem.*, t. VII, 1885). *En général*, dit-il, la limite est égale à ρ_1; ce n'est que dans des cas exceptionnels qu'elle est égale à une autre racine.

En réalité, comme M. Poincaré l'a indiqué plus tard, pour *chaque* équation aux différences de la nature indiquée, le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend vers ρ_1 si D_ν est l'intégrale *générale;* ce ne serait que pour des intégrales *particulières* que ce rapport pourrait tendre vers une autre racine. Mais la démonstration de Poincaré n'apprend pas si ce cas se présente effectivement. Il en est cependant ainsi, d'après des recherches de M. Pincherle (*Acta Mathem.*, t. XVI, 1893), si du moins les a_i^ν sont des fonctions rationnelles de ν et si $a_r \neq 0$. L'auteur donne du théorème de M. Poincaré deux démonstrations, l'une qui est celle de M. Poincaré lui-même, un peu modifiée et simplifiée, l'autre un peu plus compliquée, mais qui conduit aux résultats de M. Pincherle, débarrassés des restrictions indiquées plus haut.

2. En posant

$$a_i^\nu = a_i + x_i^\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} x_i^\nu = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

l'auteur introduit, avec M. Poincaré, r nombres $X_1^\nu, X_2^\nu, \ldots, X_r^\nu$ au moyen des équations

$$\begin{aligned} D_\nu &= X_1^\nu + X_2^\nu + \ldots + X_r^\nu, \\ D_{\nu+1} &= \rho_1 X_1^\nu + \rho_2 X_2^\nu + \ldots + \rho_r X_r^\nu, \\ D_{\nu+r-1} &= \rho_1^{r-1} X_1^\nu + \rho_2^{r-1} X_2^\nu + \ldots + \rho_r^{r-1} X_r^\nu. \end{aligned}$$

On a

$$X_i^{\nu+1} = \rho_i X_i^\nu + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{ik}^\nu X_k^\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où les coefficients ε_{ik}^ν tendent vers zéro quand ν augmente indéfiniment.

Si l'on exclut le cas où, à partir d'un certain rang, tous les D_ν sont nuls, pour chaque valeur de ν l'un des X_j^ν est différent de zéro; soit $X_{j_\nu}^{\nu_1}$ le plus grand en module de ces nombres : si plusieurs ont le même plus grand module, on prendra pour j_ν le plus petit indice possible. L'auteur démontre que lorsque ν croît, l'indice j_ν ne peut pas croître; par suite, à partir d'un certain rang, il conserve une valeur constante j.

Cela étant, si k est différent de j, le rapport $\dfrac{X_k^\nu}{X_j^\nu}$ tend vers zéro, d'où résulte facilement la conclusion que le rapport $\dfrac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend vers ρ_j.

Cette démonstration ne prouve nullement que la limite soit *en général* égale à ρ_1. Elle a l'avantage, sur la suivante, de ne pas supposer nécessairement $\rho_1 \neq 0$.

3. L'auteur démontre maintenant le théorème général suivant :

L'équation aux différences admet r intégrales particulières indépendantes $D_\nu^1, D_\nu^2, \ldots, D_\nu^r$ telles que $\dfrac{D_{\nu+1}^i}{D_\nu^i}$ *tende vers ρ_i pour ν infini.*

Ce théorème une fois démontré entraîne comme conséquence immédiate que, si l'on prend l'intégrale

$$D_\nu = c_1 D_\nu^1 + c_{\nu+1} D_\nu^{\nu+1} + \ldots + c_r D_\nu^r \qquad (c_1 \neq 0)$$

le rapport $\dfrac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend vers ρ_1.

Pour démontrer le théorème, l'auteur remarque qu'il est vrai pour $r = 1$, et il le suppose par suite vrai jusqu'à $r - 1$. Il met alors l'équation aux différences sous la forme

$$[D_{\nu+r} - (\rho_1 + \delta_{\nu+r-1}) D_{\nu+r-1}] = (b - \varepsilon_1^\nu)[D_{\nu+r-1} - (\rho_1 + \delta_{\nu+r-2}) D_{\nu+r-2}] + \ldots$$
$$+ (b_{r-1} - \varepsilon_{r-1}^\nu)[D_{\nu+1} - (\rho_1 + \delta_\nu) D_\nu] = 0$$

et il admet, ce qui sera démontré dans le dernier paragraphe, que les ε_i^ν et δ_ν peuvent être choisis de manière à tendre vers zéro pour ν infini. En posant alors

$$(\rho_1 + \delta_\nu) D_\nu - D_{\nu+1} = E_\nu,$$

E_ν satisfait à une équation aux différences d'ordre $r - 1$ pour laquelle les racines ρ sont $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_r$. Cette équation aux différences admet donc $r - 1$ intégrales correspondantes $E_\nu^2, E_\nu^3, \ldots, E_\nu^r$ telles que $\dfrac{E_{\nu+1}^i}{E_\nu^i}$ tende vers ρ_i.

Si l'on pose

$$D_\nu^i = \frac{E_\nu^{(i)}}{\rho_1 + \delta_\nu} \cdot \frac{E_{\nu+1}^{(i)}}{(\rho_1 + \delta_\nu)(\rho_1 + \delta_{\nu+1})} \cdot \frac{E_{\nu+2}^{(i)}}{(\rho_1 + \delta_\nu)(\rho_1 + \delta_{\nu+1})(\rho_1 + \delta_{\nu+2})} \cdots$$
$$D_\nu^1 = (\rho_1 + \delta_\nu)(\rho_1 + \delta_{\nu+1}) \ldots (\rho_1 + \delta_{\nu+r-1}),$$

on obtient r intégrales de l'équation aux différences données et le rapport $\dfrac{D_{\nu+1}^i}{D_\nu^i}$ tend vers ρ_i pour chacune des valeurs $i = 1, 2, \ldots, r$. Le théorème

est donc démontré. Mais l'auteur a été obligé de faire la restriction essentielle que, *pour chaque valeur de* ν, le dernier coefficient $a_r = \varkappa_r^{\nu}$ de l'équation aux différences est différent de zéro.

4. L'auteur démontre la possibilité de choisir les quantités désignées plus haut par ε_i^{ν} et δ_ν, de manière qu'elles tendent vers zéro. Il suffit de faire la démonstration pour les quantités δ_ν assujetties à satisfaire aux équations suivantes en nombre infini

$$0 = \varkappa_1^{\nu} - \delta_{\nu+r-1} + \frac{\varkappa_2^{\nu} + b_1\delta_{\nu+r-2}}{\rho_1 + \delta_{\nu+r-2}} - \frac{\varkappa_3^{\nu} + b_2\delta_{\nu+r-3}}{(\rho_1 + \delta_{\nu+r-2})(\rho_1 + \delta_{\nu+r-3})} + \ldots$$
$$+ \frac{\varkappa_r^{\nu} + b_{r-1}\delta_\nu}{(\rho_1 + \delta_{\nu+r-2})(\rho_1 + \delta_{\nu+r-3})\ldots(\rho_1 + \delta_\nu)},$$

où les b sont déterminés par l'identité

$$\rho^r + a_1\rho^{r-1} + \ldots + a_r \equiv (\rho - \rho_1)(\rho^{r-1} + b_1\rho^{r-2} + \ldots + b_{r-1}).$$

Busche (*E.*). — Sur la théorie de la fonction $[x]$. (39-57).

L'application de la méthode géométrique d'Eisenstein permet d'arriver à des formules nouvelles relatives à la fonction $[x]$, définie comme le nombre entier satisfaisant aux inégalités

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

1. On considère dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires un rectangle ABCD dont les sommets ont pour coordonnées des moitiés de nombres entiers. Le principe de la méthode consiste à compter de plusieurs manières différentes combien, dans chacun des triangles ABC, ACD se trouvent de points à coordonnées entières en excluant ceux qui se trouvent sur le périmètre du rectangle. C'est ainsi, par exemple, que, si le point A a des coordonnées entières, si AB et AD ont des longueurs $\frac{1}{2}g$, $\frac{1}{2}h$, où g et h sont des nombres pairs, on a, en considérant l'un des triangles ABC et ACD, l'égalité

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{1}{2}g-1} \left[\frac{xh}{g}\right] = \sum_{y=1}^{y=\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{yg}{h}\right].$$

2. Cette méthode pourrait être généralisée, soit dans le plan, en prenant un rectangle ABCD quelconque, soit dans l'espace, où l'on aurait par exemple la formule

$$\sum_{x=1}^{a-1} \left[\frac{bx}{a}\right] \cdot \left[\frac{cx}{a}\right] = \sum_{y=1}^{b-1} \sum_{z=1}^{c-1} \mathrm{Min}\left(\left[\frac{ay}{b}\right], \left[\frac{az}{c}\right]\right);$$

dans cette formule a, b, c désignent des entiers, et $\mathrm{Min}(\mu, \nu)$ désigne le plus petit des nombres μ et ν.

3. Dans ce qui suit, nous désignerons par g, h des entiers pairs, par m, n des entiers impairs. Le calcul direct du nombre des points à coordonnées entières

qui se trouvent à l'intérieur du rectangle ABCD et du nombre de ceux qui se trouvent sur la diagonale AC, conduit aux formules suivantes.

Si A a des coordonnées entières et si $AB = \frac{1}{2}g = a$, $AD = \frac{1}{2}h = b$, si enfin $q = \frac{1}{2}\delta$ désigne le plus grand commun diviseur de a et de b, on a

$$\sum_{1}^{h-1}\left[\frac{ax}{b}\right] = \frac{1}{2}(a-1)(b-1) + \frac{q-1}{2}.$$

Si AB et AD ayant les mêmes longueurs, A a une abscisse entière, l'ordonnée étant la moitié d'un nombre impair, on a

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right] + \sum_{1}^{\frac{1}{2}h-1}\left[\frac{gy}{h} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}g\left(\frac{1}{2}h - 1\right) + \frac{\delta}{4}\cdot\frac{1+(-1)^{\frac{h}{\delta}}}{2}.$$

Si AB et AD ayant toujours les mêmes longueurs, les deux coordonnées de A sont les moitiés de nombres impairs, on a

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{(2x-1)h}{2g} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{1}^{\frac{1}{2}h}\left[\frac{(2y-1)g}{2h} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}gh + \frac{\delta}{4}\cdot\frac{1-(-1)^{\frac{gh}{\delta^2}}}{2}.$$

Pour traiter les autres cas, l'auteur introduit la notation suivante :

$$(a\,|\,b) = \sum_{1}^{\left[\frac{b}{2}\right]}\left[\frac{ax}{b}\right], \qquad (a\,|\,1) = (1\,|\,b) = (1\,|\,1) = 0.$$

Le symbole $(a\,|\,b)$ est lié au symbole de Jacobi par les équations

$$\left(\frac{\frac{1}{2}h'}{m'}\right) = (-1)^{(h'|m')}, \qquad \left(\frac{n'}{m'}\right) = (-1)^{(n'|m')},$$

où les fractions qui sont dans les premiers membres, sont supposées irréductibles. Si l'on pose alors $m = \delta m'$, $h = \delta h'$, on a

$$\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{hx}{m}\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}h-1}\left[\frac{my}{h} + \frac{1}{2}\right] = (h'\,|\,m') + h'm'\cdot\frac{\delta^2-1}{8} - \frac{m'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}$$

et de même, en posant $m = \delta m'$, $n = \delta n'$,

$$\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{nx}{m}\right] + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(2y-1)m}{2n} - \frac{1}{2}\right] = (n'\,|\,m') + m'n'\cdot\frac{\delta^2-1}{8} - \frac{m'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}.$$

On peut de ces dernières formules éliminer les quantités $(h' \mid m')$ et $(n' \mid m')$, en leur substituant les congruences suivantes par rapport au module 2 :

$$\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{hx}{m}\right] \equiv \frac{1 - \left(\frac{\frac{1}{2}h'}{m'}\right)}{2} + \frac{m'-1}{2} \cdot \frac{\delta - 1}{2} \pmod 2,$$

$$\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{nx}{m}\right] \equiv \frac{1 - \left(\frac{n'}{m'}\right)}{2} + \frac{\delta^2 - 1}{8} + \frac{m'-1}{2} \cdot \frac{\delta - 1}{2} \pmod 2.$$

L'auteur indique un certain nombre d'autres congruences analogues.

4. La détermination du caractère des résidus biquadratiques pour deux nombres impairs du corps $K(i)$, conduit à considérer des expressions de la forme

$$\Sigma(-1)^{\varepsilon}[f(x)]^2,$$

dont le reste par rapport au module 4 intervient seul. $f(x)$ désigne dans cette formule une fonction réelle linéaire entière de l'argument réel et entier x. On est conduit alors à considérer les mêmes rectangles ABCD, mais en affectant du signe — certains des points à coordonnées entières qui leur sont intérieurs.

Par analogie avec le symbole $(a \mid b)$ on peut introduire ici le symbole $((a \mid b))$ défini, lorsque a et b sont premiers entre eux, par la formule

$$\sum_{1}^{\left[\frac{b}{2}\right]} (-1)^{\varepsilon}\left[\frac{ax}{b}\right]^2 \equiv ((a \mid b)); \qquad ((a \mid 1)) = ((1 \mid b)) = ((1 \mid 1)) \equiv 0,$$

et l'on a

$$((a \mid b)) + ((b \mid a)) \equiv \left[\frac{a}{2}\right]^2 \left[\frac{b}{2}\right]^2 \pmod 4.$$

Le calcul de $((a \mid b))$ est rendu simple par la formule

$$((-a + \mu b \mid b)) \equiv ((a \mid b)) - \left[\frac{b}{2}\right]^2 \pmod 4.$$

5. L'auteur démontre un certain nombre de congruences par rapport au module 4; citons les deux suivantes :

$$\sum_{1}^{m} (-1)^{\varepsilon}\left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right]^2 \equiv -\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{\delta^2 - 1}{4};$$

$$\sum_{1}^{g} (-1)^{\varepsilon}\left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right]^2 \equiv \frac{1 - (-1)^{\frac{gh}{\delta^2}}}{2} \cdot \frac{h}{\delta}.$$

6. Si les entiers g, h, m, n sont liés par la relation

$$gn - hm = \delta\varepsilon = \pm 1,$$

il existe entre les symboles $(g|m)$, $(h|n)$ une relation simple :

$$((g|m)\cdot(h|n)) = \frac{\varepsilon + (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2}\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

De cette congruence on déduit, en posant $g = 2a$, $h = 2b$, la suivante

$$\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \varepsilon^{\frac{m-n}{2}}(-1)^{\frac{m-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}, \qquad an - bm = \varepsilon,$$

qui fournit un moyen simple pour calculer le symbole $\left(\frac{a}{m}\right)$ qui entre dans la loi de réciprocité, en réduisant $\frac{a}{m}$ en fraction continue et se ramenant au calcul, par les réduites successives, de $\varepsilon^{\frac{m-n}{2}}(-1)^{\frac{m-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$.

Rémoundos (*Georges*). — Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement (58-65).

Cette Note se rattache à une Note portant le même titre et publiée par M. Appell dans le Tome CXXXIII du même journal.

Soit un système matériel soumis à des frottements ; on suppose que le potentiel des forces extérieures reste inférieur à une limite fixe L, et l'on pose

$$\Phi = f_1 N_1 \nu_1 + f_2 N_2 \nu_2 + \ldots + f_p N_p \nu_p,$$

où les f sont les coefficients de frottement, les N les valeurs absolues des réactions normales, les ν les valeurs des vitesses de glissement relatives des points matériels au contact dans les divers corps frottants associés deux à deux.

Cela étant si $\varphi(t)$ désigne une fonction qui tend vers zéro ou reste finie lorsque t augmente indéfiniment, mais de manière que l'intégrale $\int \varphi(t)\,dt$ tende vers $-\infty$, il existe une suite indéfinie de valeurs de t (croissant indéfiniment) et satisfaisant à l'inégalité

$$\Phi \leq \varphi(t).$$

Si l'on prend en particulier la fonction $\varphi(t) = \frac{\lambda \log t}{t}$, l'auteur démontre que l'étendue d'un intervalle *exceptionnel* suffisamment éloigné est négligeable par rapport au temps qui s'est écoulé jusqu'au commencement de cet intervalle.

Voronï (*Georges*). — Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *Deuxième Mémoire :* Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Seconde Partie :* Domaines des formes quadratiques correspondant aux différents types de paralléloèdres primitifs (67-181).

La première Partie de cet important Mémoire a paru dans le tome CXXXIV du même journal.

SECTION IV. — *Types différents de paralléloèdres primitifs.*

55. *Sur le nombre des faces à $n-1$ dimensions d'un paralléloèdre primitif.* — Rappelons qu'un paralléloèdre primitif R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ est défini par les inégalités indépendantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}l_{ik}l_{jk} - 2\Sigma\alpha_i l_{ik} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \tau),$$

où chaque système d'entiers

$$\pm(l_{1k}, l_{2k}, \ldots, l_{nk}), \qquad (k = 1, 2, \ldots, \tau),$$

représente le minimum de la forme quadratique dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système $\pm(l_{ik})$ par rapport au module 2. La forme $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ ne possède dans cet ensemble que deux représentations $\pm(l_{ik})$ du minimum.

Le nombre des systèmes $\pm(l_{ik})$ est au plus égal à $2^n - 1$. L'auteur démontre que ce nombre est certainement atteint. Le nombre des faces à $n-1$ dimensions du paralléloèdre R est donc égal à $2(2^n - 1)$.

56-59. *Définition du type de paralléloèdres primitifs.* — Désignons par

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots, (\alpha_{is})$$

les s sommets du paralléloèdre R : chacun d'eux (α_{ik}) appartient à n faces de R et chacune de ces faces est donnée par une équation de la forme

$$\Sigma\Sigma a_{ij}l_{ir}^k l_{jr}^k - 2\Sigma\alpha_i l_{ir}^k = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, s.$$

Chaque sommet est donc caractérisé par n systèmes de nombres entiers

$$(l_{i1}^k), (l_{i2}^k), \ldots, (l_{in}^k), \qquad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

dont le déterminant $\pm\omega_k$ ne s'annule pas. Tous les sommets sont donc caractérisés par un ensemble de s symboles

$$\{l_{ir}^1\}, \{l_{ir}^2\}, \ldots, \{l_{ir}^s\}.$$

Si maintenant les sommets d'un autre paralléloèdre primitif R′ sont caractérisés par les mêmes symboles, on dira que R et R′ appartiennent au même type.

Si l'on envisage maintenant l'ensemble (R) des paralléloèdres congruents à R, chaque sommet de (R) peut être défini à l'aide de $n-1$ équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij}l_{ik}l_{jk} - 2\Sigma\alpha_i l_{ik} = \Lambda, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où les $(n+1)$ systèmes $(l_{i0}), (l_{i1}), \ldots, (l_{in})$ caractérisent $n+1$ paralléloèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par le sommet considéré (si le sommet appartient au paralléloèdre initial R l'un des systèmes (l_{ik}) est formé d'entiers tous nuls et Λ est nul). Tous les sommets congruents au sommet donné sont caractérisés par les $n+1$ systèmes $(l_{i0} + l_i), (l_{i1} + l_i), \ldots, (l_{in} + l_i)$, où l'on

désigne par (l_i) un système de nombres entiers arbitraires. Tout type de parallèloèdres primitifs est alors défini par les systèmes qui caractérisent $\frac{s}{n+1}$ sommets incongruents. Chaque système (l_{ik}) peut d'ailleurs être remplacé par une fonction linéaire à coefficients entiers

$$u_k = l_{1k}x_1 + l_{2k}x_2 + \ldots + l_{nk}x_n.$$

Si $P(\nu)$ est une face à ν dimensions des parallèloèdres de l'ensemble (R), elle est caractérisée par $n+1-\nu$ fonctions linéaires $u_0, u_1, \ldots, u_{n-\nu}$. Si $\tau_{n-\nu}$ désigne le nombre de faces incongruentes à ν dimensions des parallèloèdres primitifs appartenant au type examiné et si S_ν désigne le nombre de faces à ν dimensions d'un parallèloèdre primitif correspondant, on a

$$S_\nu = (n+1-\nu)\,\tau_{n-\nu}.$$

60-62. *Définition de l'ensemble* (L) *de simplexes caractérisant un type de parallèloèdres primitifs.* — On appelle corrélatif au sommet des parallèloèdres de l'ensemble (R) caractérisé par les n systèmes

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}),\ \ldots,\ (l_{in})$$

le simplexe (triangle dans l'espace à deux dimensions, tétraèdre dans l'espace à trois dimensions) ayant les $n+1$ sommets

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}),\ \ldots,\ (l_{in}).$$

L'ensemble (L) des simplexes corrélatifs aux différents sommets de l'ensemble (R) caractérise un type de parallèloèdres primitifs.

Le nombre des faces incongruentes à $n-\nu$ dimensions de l'ensemble (L) est égal à $\tau_{n-\nu}$.

L'ensemble (L) de simplexes remplit uniformément tout l'espace. De plus tout point à coordonnées entières est nécessairement un sommet d'un des simplexes de l'ensemble (R).

63-68. *Propriétés des symboles* S_ν *et* τ_ν. — Considérons les différentes faces incongruentes $P_k(\nu)$ à ν dimensions des simplexes de l'ensemble (L) et désignons par $m_k^{(\nu)}$ le nombre des points, intérieurs à la face $P_k(\nu)$, dont les coordonnées sont des fractions positives ou nulles, inférieures à 1 et ayant m pour dénominateur. Il existe pour chaque face $P_k(\nu)$ un entier positif $\omega_k^{(\nu)}$ et de plus $\omega_k^{(\nu)}$ entiers $a_{hk}^{(\nu)}$ tels que l'on ait

$$m_k^{(\nu)} = \sum_{h=1}^{\omega_k^{(\nu)}} \frac{(m-a_{hk}^{(\nu)})(m+1-a_{hk}^{(\nu)})\ldots(m+\nu-1-a_{hk}^{(\nu)})}{1.2\ldots\nu}.$$

On déduit de là la formule

$$m^n = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=1}^{\sigma_\nu} \sum_{h=1}^{\omega_k^{(\nu)}} \frac{(m-a_{hk}^{(\nu)})(m+1-a_{hk}^{(\nu)})\ldots(m+\nu-1-a_{hk}^{(\nu)})}{1.2\ldots\nu},$$

2e Partie.

qui est une identité par rapport à m. Cette formule conduit en particulier à la suivante

$$\sum_{k=1}^{\sigma_n} \omega_k^{(n)} = n!$$

d'où l'on déduit

$$\sigma_n = n!$$

On a de même

$$\sigma_\nu = \Delta^{(\nu)}(m^n)_{m=1};$$
$$S_\nu = (n-1-\nu)\,\Delta^{(\nu)}(m^n)_{m=1};$$

où $\Delta^{(\nu)}$ désigne la différence $\nu^{\text{ième}}$ de la fonction x^n.

Si σ_n est égal à $n!$ on a également $\sigma_\nu = \Delta^{(\nu)}(m^n)_{m=1}$. C'est ce qui arrive nécessairement pour $n = 2, 3, 4$, mais non nécessairement pour $n = 5$.

Signalons encore les formules remarquables

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sigma_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu S_\nu = 1;$$

cette dernière généralise la formule célèbre d'Euler relative aux polyèdres convexes.

69-72. ***Régulateurs et caractéristiques des arêtes des parallèloèdres primitifs.*** — Soit un simplexe L corrélatif à un sommet (a_ν) et caractérisé par les systèmes

$$(l_{i0}), (l_{i1}), \ldots, (l_{in}).$$

Si $(\alpha_{i\lambda})$ est un sommet adjacent à (α_ν), le simplexe L_i qui lui est corrélatif sera contigu à L par une face P_i à $n-1$ dimensions; L_i se déduira de L en remplaçant un de ses sommets (l_{ik}) par un autre sommet (l'_{ik}). On appellera ***caractéristique*** de la face P_i par rapport au simplexe (L) le système d'entiers premiers entre eux (p_{ik}) défini par les conditions

$$\sum p_{ik} l_{ik} = \delta_i, \qquad \sum p_{ik} l'_{ik} = \delta_i, \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n;\ h \neq k).$$

La caractéristique de P_i par rapport à L_i est $(-p_{ik})$. On a de plus

$$\alpha_i - \alpha_\nu = p_{ik}\varrho_k.$$

Le coefficient ϱ_k est positif et s'appelle le *régulateur* de l'arête $[\alpha_\nu, \alpha_i]$, ou de la face corrélative P_i. Il est le même pour toutes les arêtes congruentes.

On peut déterminer le régulateur, au moyen du seul système des simplexes (L), comme une fonction linéaire des coefficients de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. Si, en effet, on détermine $n+1$ constantes ε_r^k par les conditions

$$l'_{ik} = \sum_{r=0}^{n} \varepsilon_r^k l_{ir}, \qquad \sum_{r=0}^{n} \varepsilon_r^k = 1, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

on a la formule

$$2\varrho_k \sum p_{ik}(l_{ik} - l'_{ik}) = \sum\sum a_{ij} l'_{ik} l_{jk} - \sum_{r=0}^{n} \varepsilon_r^k \sum\sum a_{ij} l_{ir} l_{jr}.$$

L'auteur indique un moyen simple pour faire le calcul.

73-78. *Transformation fondamentale de la forme*

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i - \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i.$$

L'auteur introduit la fonction

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\sum a_{ij} x_i x_j + 2\sum \alpha_i x_i - \sum\sum a_{ij} l_i l_j + 2\sum \alpha_i l_i,$$

qui est définie pour chaque simplexe L. Si l'on définit $n-1$ variables ξ par les conditions

$$x_i = \sum_{r=0}^{n} \xi_r l_{ir}, \qquad \sum_{r=0}^{n} \xi_r = 1,$$

la fonction $F_{(L)}$ est linéaire par rapport aux coefficients a_{ij}, car on a

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\sum a_{ij} x_i x_j + \sum_{r=0}^{n} \xi_r \sum\sum a_{ij} l_{ir} l_{jr}.$$

Si $L^{(0)}$ est le simplexe qui se déduit de (L) par la translation (l_i), on a

$$F_{(L)}(x_1 - l_1, \ldots, x_n - l_n) = F_{(L)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Si enfin L_k est le simplexe contigu à L par la face P_k, on a

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{(L_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 2\rho_k \sum p_{ik}(l_{ik} - x_i),$$

où les notations sont les mêmes que précédemment. Cette formule (*) est susceptible de nombreuses applications.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des entiers quelconques qui ne soient pas les coordonnées d'un sommet du simplexe L, l'auteur démontre la formule importante

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2\sum_{k=1}^{n} h_k \rho_k \quad \text{ou} \quad h_k = 0,$$

dans laquelle $F_{(L)}$ et les ρ_k doivent être regardés comme des fonctions linéaires des coefficients *indéterminés* a_{ij} de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. De là découle le *théorème fondamental*

Supposons que les régulateurs ρ_k ($k = 1, 2, \ldots, \tau$) correspondant aux différentes faces incongruentes à $n-1$ dimensions des simplexes (L) *soient déterminés par les égalités*

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ik}(a_{ij}), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Pour qu'une forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ définisse un ensemble (R) *de*

parallèloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble (L) *de simplexes, il faut et il suffit que les inégalités*

$$\varphi_k = \sum\sum p_{ij}^k a_i > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

aient lieu.

D'ailleurs, chaque forme quadratique satisfaisant à ces inégalités est définie positive.

79-84. *Définition des formes quadratiques à l'aide des régulateurs et des caractéristiques correspondants.* — Soit P une face à $n-1$ dimensions des simplexes de l'ensemble (L); on peut toujours, en la remplaçant au besoin par une face congruente, la supposer caractérisée par les systèmes

$$(0), (l_{i1}), (l_{i2}), \ldots, (l_{i,n-1});$$

l'auteur désigne par ω le plus grand commun diviseur des n déterminants, d'ordre $n-1$, qu'on peut former au moyen des $n-1$ systèmes

$$(l_{i1}), (l_{i2}), \ldots, (l_{i,n-1}).$$

A σ faces incongruentes à $n-1$ dimensions P_k des simplexes (L) on peut ainsi faire correspondre σ entiers positifs ω_k; soit φ_k le régulateur et (p_{ik}) la caractéristique de P_k. Par une analyse arithmétique analogue à celles des n°s 63-68, l'auteur démontre la formule fondamentale

$$\sum\sum a_{ij} x_i x_j = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\sigma} \varphi_k \omega_k (p_{1k} x_1 + p_{2k} x_2 + \ldots + p_{nk} x_n)^2.$$

Dans cette formule, les φ_k doivent être regardés comme des formes linéaires des a_{ij}, et la formule est une identité par rapport aux x_i et aux a_{ij}.

Section V. — *Propriétés de l'ensemble* (Δ) *des formes quadratiques correspondant aux différents types de parallèloèdres primitifs.*

85-86. *Définition du domaine des formes quadratiques correspondant à un type de parallèloèdres primitifs.* — A chaque type de parallèloèdres primitifs admettant un système de régulateurs

$$\varphi_k = \sum\sum p_{ij}^k a_{ij} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

correspond un *domaine* Δ de formes quadratiques défini par les inégalités

$$\varphi_k = \sum\sum p_{ij}^k a_{ij} > 0.$$

Ce domaine est à $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensions : toute forme *intérieure* au domaine donne naissance à un ensemble (R) de parallèloèdres *primitifs* appartenant au type considéré.

Les régulateurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\sigma$ seront dits les régulateurs *indépendants* si tout autre régulateur φ_k est une combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_\sigma$ à coefficients

positifs, sans qu'on puisse trouver parmi les m régulateurs $\rho_1, \rho_2, \rho_m, \ldots$, un moindre nombre jouissant de la même propriété.

87-90. *Propriétés des régulateurs indépendants.* — Soit L un simplexe caractérisé par les systèmes

$$(l_{10}), (l_{20}), \ldots, (l_{n0}),$$

et supposons que parmi les régulateurs $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ de n faces l'un au moins, ρ_0 par exemple, soit indépendant. Soit L_k le simplexe contigu à L par la face opposée au sommet (l_{0k}) et soit, dans L_k, (l'_{0k}) le sommet opposé à cette face. Posons enfin

$$l'_{0k} = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{z}_i^k l_{i0}, \qquad \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{z}_i^k = 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Les propriétés précédemment démontrées des régulateurs montrent que $\mathfrak{z}_k^k$ est négatif. En particulier $\mathfrak{z}_0^0$ est négatif; l'auteur démontre que parmi tous les $\mathfrak{z}_i^0$ il y en a au moins deux positifs; soit

$$\mathfrak{z}_0^0 < 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{z}_p^0 < 0, \quad \mathfrak{z}_{p+1}^0 > 0, \quad \ldots,$$
$$\mathfrak{z}_\mu^0 > 0, \quad \mathfrak{z}_{\mu+1}^0 > 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{z}_n^0 > 0.$$

Si l'on remplace dans le simplexe L les sommets (l_{0k}) $(k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ successivement par le sommet (l'_{i0}), on obtient les simplexes

$$L_0, L_1, \ldots, L_\lambda,$$

qui sont contigus au simplexe L par des faces à $n-1$ dimensions dont les régulateurs sont proportionnels à ρ_0. Les régulateurs des autres faces de L ne sont pas proportionnels à ρ_0. Ces $\lambda - 1$ simplexes, joints au simplexe L, composent un polyèdre convexe K à $n+1$ sommets, possédant $\mu - \lambda$ faces à $n-1$ dimensions et n sommets, et $(\lambda + 2)(n - \mu)$ faces à $n-1$ dimensions et $n-1$ sommets. Ce polyèdre convexe est d'ailleurs contigu à d'autres polyèdres convexes analogues, définis par le régulateur indépendant ρ_0. En appliquant le procédé exposé aux différents simplexes incongruents de l'ensemble (L) qui admettent des faces ayant pour régulateur ρ_0, on déterminera les polyèdres convexes incongruents $K, K_1, \ldots, K_{m-1}$ qui sont composés de groupes correspondants de simplexes appartenant à l'ensemble (L).

91-95. *Reconstruction de l'ensemble* (L) *de simplexes en un autre ensemble* (L') *de simplexes.* — En conservant les notations précédentes, remplaçons dans le simplexe L un sommet (l_{0k}) $(k = \mu + 1, \ldots, n)$ par le sommet (l'_{i0}); on obtient ainsi $n - \mu$ simplexes

$$L_{\mu+1}, \ldots, L_n.$$

Ces nouveaux simplexes composent aussi le polyèdre K; ils n'appartiennent pas à l'ensemble (L). Si l'on fait cette opération pour tous les simplexes de (L), le régulateur ρ_0 étant donné, on obtient un ensemble (L') de simplexes qui remplit uniformément l'espace à n dimensions, et qui peut être

partagé en un nombre fini de classes de simplexes congruents. L'ensemble (L') a en commun avec l'ensemble (L) les simplexes dont aucune des faces n'admet le régulateur ρ_0.

Si un simplexe de (L') n'appartient pas à (L), les régulateurs de ses faces sont de l'une des formes $\delta_k \rho_0$ ou $\rho_k - \delta_k \rho_0$, δ_k désignant un coefficient numérique positif ou négatif, ρ_k un régulateur de l'ensemble (L).

96. *Algorithme pour la recherche des domaines de formes quadratiques qui sont contigués à un domaine donné par les faces à* $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ *dimensions.* — Supposons qu'un domaine Δ de formes quadratiques correspondant à un type de parallèloèdres primitifs caractérisé par un ensemble (L) de simplexes soit défini par les inégalités indépendantes

$$\rho_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Soit ρ un régulateur indépendant; reconstruisons l'ensemble (L) en un autre ensemble (L'), à l'aide du procédé exposé plus haut. Soient $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_\tau$ les régulateurs des faces des simplexes (L'). Le domaine Δ' défini par les inégalités

$$\rho'_1 = 0, \quad \rho'_2 = 0, \quad \ldots, \quad \rho'_\tau = 0,$$

est à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions. Les deux domaines Δ et Δ' sont contigus par la face à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions déterminée par l'équation $\rho = 0$.

97-99. *Ensemble* (Δ) *des domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types de parallèloèdres primitifs.* — L'algorithme précédent permet de déterminer les domaines $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ contigus au domaine Δ par ses faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions, puis de déterminer les domaines contigus aux domaines précédents et ainsi de suite. L'auteur démontre que l'ensemble (Δ) composé de tous les domaines de formes quadratiques qui correspondent aux différents types de parallèloèdres primitifs, partage uniformément l'ensemble de toutes les formes positives. Cet ensemble (Δ) peut être partagé en classes de domaines composées de domaines équivalents. *Le nombre des classes différentes est fini.* L'algorithme exposé permet par suite de déterminer tous les représentants $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_{\mu-1}$ des différentes classes de domaines appartenant à l'ensemble (Δ). Ces μ domaines peuvent servir à la réduction des formes quadratiques positives : une forme sera dite *réduite*, si elle appartient à un de ces domaines.

100-101. *Sur les parallèloèdres imprimitifs correspondant aux formes quadratiques positives.* — Les formes quadratiques positives qui donnent naissance aux parallèloèdres imprimitifs sont celles qui appartiennent à l'une des faces de l'ensemble (Δ). Une telle forme peut être regardée comme la limite d'une suite infinie de formes *intérieures* à un même domaine Δ. Par suite, chaque parallèloèdre imprimitif peut être envisagé comme une limite de parallèloèdres primitifs appartenant tous au même type.

102-104. *Domaine principal de l'ensemble* (Δ). — L'auteur applique la théorie générale à la forme quadratique

$$f = nx_1^2 + nx_2^2 + \ldots + nx_n^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - \ldots - 2x_{n-1}x_n.$$

Cette forme donne naissance à un paralléloèdre primitif R. En posant

$$u_1 = -x_1,\ u_2 = -x_2, \ldots, u_n = -x_n,\ u_0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

ce paralléloèdre R peut être défini par les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1\,n + 2\,u_{h_0} \geq 0, & \\
2\,(n-1) + 2\,(u_{h_0} + u_{h_1}) \geq 0 & (h_0 \leq h_1), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\lambda\,(n-\lambda+1) + 2\,(u_{h_0} + u_{h_1} + \ldots + u_{h_{\lambda-1}}) \geq 0 & (h_0 \leq h_1 \leq \ldots \leq h_{\lambda-1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
1\,n + 2\,(u_{h_0} + u_{h_1} + \ldots + u_{h_{n-1}}) \geq 0 & (h_0 \leq h_1 \leq \ldots \leq h_{n-1}),
\end{array}$$

où

$$h_0 = 0, 1, 2, \ldots, n; \qquad h_1 = 1, 2, \ldots, n; \qquad \ldots; \qquad h_{n-1} = n-1, n.$$

Si l'on remplace les inégalités écrites par des égalités, *mais en supposant que $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ aient des valeurs déterminées*, on obtient un sommet du paralléloèdre qu'on désignera par le symbole

$$(h_0, h_1, \ldots, h_n);$$

en effectuant toutes les permutations possibles des indices 0, 1, 2, ..., n, on obtient $(n+1)!$ sommets du paralléloèdre R. D'après le n° 66, on a

$$S_\nu = (n-1-\nu)\,\Delta^{(n-\nu)}\,(m^n)_{m=1} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Le simplexe correspondant au sommet $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ est caractérisé par les fonctions linéaires

$$u_{h_0}, \qquad u_{h_0} + u_{h_1}, \qquad \ldots, \qquad u_{h_0} + u_{h_1} + \ldots + u_{h_n};$$

les simplexes qu'on en déduit par permutation circulaire des indices $h_0, h_1, \ldots, h_n$ sont congruents au premier.

Deux simplexes qui ne diffèrent que par la transposition des deux premiers indices h_0 et h_1 sont contigus par une face à $n-1$ dimensions, dont on détermine facilement la caractéristique et le régulateur. Si $h_0 = i$ et $h_1 = j$ sont différents de zéro, la caractéristique est $-x_i + x_j$ et le régulateur est

$$\rho_{ij} = -a_{ij}.$$

Si $h_1 = 0$, la caractéristique est $-x_i$ et le régulateur

$$\rho_{i0} = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}.$$

Si $h_0 = 0$, la caractéristique est x_j et le régulateur

$$\rho_{0j} = a_{j1} + a_{j2} + \ldots + a_{jn}.$$

Dans tous les cas, en convenant de poser $x_0 = 0$, la caractéristique est

$$-x_{h_0} + x_{h_1}.$$

Le domaine Δ correspondant au type de paralléloèdres considéré est défini

par les inégalités

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq 0, \qquad -a_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i < j;\ j = 2, 3, \ldots, n).$$

L'auteur l'appelle le domaine *principal;* il l'avait déjà étudié dans un Mémoire précédent (même journal, t. CXXXIII). Toutes les formes du domaine principal sont données par la formule

$$\sum\sum a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \rho_{i0} x_i^2 + \sum\sum_{i<j} \rho_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

105-110. *Domaines de formes quadratiques contigus au domaine principal.* — Toutes les faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions du domaine principal sont équivalentes; d'ailleurs, si $n = 2$ ou 3, l'ensemble (Δ) est composé d'une seule classe de domaines équivalents au domaine principal.

Si $n \geqq 4$, tous les domaines contigus au domaine principal sont équivalents à celui qui est contigu par la face

$$\rho = -a_{12} = 0.$$

En appliquant le procédé exposé plus haut, le système (L') correspondant est formé d'abord des simplexes de l'ensemble (L) représentés par des symboles $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$, dans lesquels les indices 1 et 2 ne sont pas consécutifs (h_0 étant regardé comme consécutif à h_n); ensuite, de nouveaux simplexes n'appartenant pas à (L) et caractérisés par les fonctions

$$[u_1, u_2, u_1 + u_2 + u_{h_2}, \ldots, u_1 + u_2 + \ldots + u_{h_n}],$$
$$[u_1, u_2, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \ldots + u_{h_{n-1}}]$$
$$(h_2, h_3, \ldots, h_n = 0, 3, 4, \ldots, n).$$

Le nombre des simplexes incongruents de l'ensemble (L') est encore égal à $n!$; les parallélodèdres primitifs correspondants ont donc aussi $(n+1)!$ sommets.

L'auteur détermine les caractéristiques et les régulateurs des faces de ce nouvel ensemble (L'); en posant

$$\rho_{12} = 0, \qquad \rho_{11} = \rho_{21} + \rho, \qquad \rho'_{12} = \rho_{12} + \rho, \qquad \rho_{ij} = \rho_{ij}$$
$$(i, j = 0, 3, \ldots, n;\ i < j),$$

on obtient :

	Régulateurs.	Caractéristiques.	Nombres
1°	ρ_{12},	$\pm(x_1 + x_2 - x_i - x_j)$,	$2(n-3)!$
2°	ρ_{i1},	$(x_1 - x_j)$,	$2(n-2)!$
3°	ρ_{i2},	$\pm(x_2 - x_j)$,	$2(n-2)!$
4°	$\rho'_{i1} = \rho_{i2}$,	$-(x_1 - x_j)$,	$(n-1)! - 2(n-2)!$
5°	$\rho_{i2} = \rho'_{i2}$,	$-(x_2 - x_j)$,	$(n-1)! - 2(n-2)!$
6°	ρ_{ij},	$\pm(x_i - x_j)$,	$(n-1)! - 2(n-3)!$
7°	$\rho_{ij} = \rho_{12}$,	$\pm(x_i - x_j)$,	$(n-3)!$

Les formes quadratiques du domaine Δ' sont données par la formule

$$\sum\sum a_{ij}x_ix_j - \sum_i\sum_j \rho_{ij}(x_i - x_j)^2 - \rho_{12}\,\omega \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

où l'on a posé $x_0 = 0$ et

$$\omega = (n \ldots)x_1^2 + (n-2)x_2^2 + \ldots \; [illegible]$$

111. *Paralléloèdres à deux dimensions.* — Les paralléloèdres primitifs sont tous du même type ; ce sont les hexagones de Lejeune-Dirichlet. Les seuls paralléloèdres imprimitifs sont les parallélogrammes. L'hexagone de Lejeune-Dirichlet n'est pas autre chose qu'une projection orthogonale d'un parallélépipède.

112-113. *Paralléloèdres à trois dimensions.* — L'ensemble (Δ) des domaines de formes quadratiques ternaires est composé d'une seule classe de domaines équivalents au domaine principal Δ déterminé par les inégalités

[illegible]

Chaque forme de ce domaine est de la forme

[illegible]

où les coefficients (régulateurs) sont positifs ou nuls.

Il y a un seul type de paralléloèdres primitifs; chacun de ces paralléloèdres possède 24 sommets et 14 faces, dont 8 sont des hexagones de Lejeune-Dirichlet et 6 des parallélogrammes.

Les paralléloèdres imprimitifs se partagent en quatre espèces différentes. Ceux de la première espèce sont des parallélépipèdes. Ceux de la deuxième espèce sont des prismes à base hexagonale. Ceux de la troisième espèce sont des dodécaèdres parallélogrammatiques. Ceux de la quatrième espèce sont des dodécaèdres à 4 faces hexagonales et 8 faces parallélogrammatiques.

114-118. *Paralléloèdres à quatre dimensions.* — Les paralléloèdres primitifs du premier type, correspondant au domaine principal, ont 120 sommets et 30 faces. Ceux du second type ont le même nombre de sommets et de faces; les formes quadratiques du domaine correspondant Δ' sont données par la formule

[illegible]

où

[illegible]

Le domaine Δ' de formes quadratiques qui est contigu à Δ par la face

est ensuite déterminé : chaque forme de ce domaine est donnée par la formule

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \mu_1 \omega + \mu_2 (x_1 - x_3)^2$$
$$+ \mu_3 (x_1 - x_4)^2 + \mu_4 (x_2 - x_4)^2 + \mu_5 (x_2 - x_3)^2 + \mu_6 (x_3 - x_4)^2,$$

où la forme ω est la même que tout à l'heure. Les parallèloèdres correspondants ont le même nombre de sommets et de faces que les premiers. L'auteur indique les caractéristiques et les régulateurs de leurs arêtes.

L'ensemble (Δ) des formes quadratiques quaternaires positives est composé de trois classes différentes qui peuvent être représentées par les domaines Δ, Δ', Δ''. En appelant *réduites* les formes quadratiques qui appartiennent à l'un de ces domaines, on a une nouvelle méthode de réductions qui coïncide, dans le cas des deux premiers domaines, avec celle de M. Charve.

Les caractéristiques des faces des simplexes qui définissent les deux derniers types de parallèloèdres primitifs sont les mêmes et sont représentées par les formes linéaires

$$x_1, \quad -x_2, \quad -x_3, \quad -x_4, \quad -(x_1 - x_2), \quad (x_1 - x_3),$$
$$-(x_2 - x_3), \quad -(x_2 - x_4), \quad -(x_3 - x_4), \quad -(x_1 + x_2 - x_3), \quad -(x_1 + x_2 - x_4),$$
$$(x_1 + x_2 + x_3 - x_4).$$

Ce sont précisément les représentations du minimum de la forme parfaite

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4.$$

Une coïncidence analogue se manifeste pour tous les parallèloèdres primitifs à 2, 3 et 4 dimensions. Il serait intéressant de reconnaître s'il y a là plus qu'un effet du hasard.

Hensel (*K.*). — Sur les corps résolvants d'une équation algébrique (183-209).

1. *Les nombres rationnels et algébriques p-adiques.* — L'auteur rappelle la définition des nombres rationnels p-adiques donnée dans sa *Théorie der algebraischen Zahlen* (Leipzig, 1908). Si p est un nombre naturel premier, l'ensemble des nombres rationnels p-adiques constitue un *corps* dans lequel toutes les règles des opérations élémentaires de l'Algèbre sont vraies ; ce corps est désigné par le symbole $K(p)$.

Étant donnée une équation algébrique entière $f(x) = 0$, à coefficients p-adiques rationnels, irréductible dans le domaine $K(p)$, on peut toujours, et d'une infinité de manières, trouver un nombre algébrique ordinaire α, tel que l'équation donnée admette au moins une racine fonction rationnelle de α à coefficients p-adiques rationnels, c'est-à-dire une racine appartenant au corps $K(p, \alpha)$. Chaque nombre ζ d'un tel corps $K(p, \alpha)$ est racine d'une équation algébrique entière, irréductible à coefficients p-adiques rationnels ; si cette équation est du même degré que celle à laquelle satisfait α, ζ est un nombre *primitif* du corps algébrique $K(p, \alpha)$.

L'auteur se propose de montrer que si l'on considère tous les corps algébriques $K(p, \alpha)$, tels que l'équation $f(x) = 0$ admette une racine appartenant à ce corps, tous ces corps sont en un certain sens *équivalents*.

2. *Les corps algébriques équivalents.* — Deux corps algébriques p-adiques sont dits *équivalents* ou *isomorphes* si l'on peut trouver dans ces deux corps deux nombres primitifs α et α satisfaisant à la *même* équation à coefficients p-adiques rationnels, irréductible dans le domaine $K(p)$. Si deux corps sont équivalents, on fera correspondre à chaque nombre $\beta = \varphi(\alpha)$ du premier corps le nombre $\overline{\beta} = \varphi(\alpha)$ du second corps : ces deux nombres seront dits *équivalents*. Si β, γ, δ, ε, ..., sont des nombres quelconques du premier corps; $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\varepsilon}$, ... les nombres équivalents du second corps, toute équation rationnelle en β, γ, δ, ε, ..., à coefficients p-adiques rationnels, est aussi vérifiée par $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\varepsilon}$, ...

Ce théorème fondamental entraine de nombreuses conséquences. En particulier un nombre π du premier corps n'est un nombre premier que s'il en est de même du nombre premier équivalent $\overline{\pi}$ pour le second corps. Si $n(\pi) = p^f$, on a de même $n(\overline{\pi}) = p^f$, en désignant par le symbole $n(\alpha)$ la norme de α; tout nombre du corps $K(p, \alpha)$ est une combinaison linéaire à coefficients p-adiques rationnels des $ef = \lambda$ nombres

$$1, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_1^{f-1}; \qquad \pi, \quad \pi\theta_1, \quad \ldots, \quad \pi\theta_1^{f-1}; \qquad \ldots;$$
$$\pi^{e-1}, \quad \pi^{e-1}\theta_1, \quad \ldots, \quad \pi^{e-1}\theta_1^{f-1},$$

où θ_1 est une racine primitive de l'équation $x^{p^f-1} - 1 = 0$ et où π satisfait à une équation, irréductible dans le domaine $K(p, \theta_1)$, de la forme

$$\Psi(\pi, \theta_1) = \pi^e + p c_{e-1}(\theta_1)\pi^{e-1} + \ldots + p c_1(\theta_1)\pi + p c_0(\theta_1) = 0.$$

Dans le corps $K(p, \overline{\alpha})$, le nombre $\overline{\theta}_1$ équivalent à θ_1 satisfait à la même équation $x^{p^f-1} - 1 = 0$ et le nombre $\overline{\pi}$ équivalent à π à l'équation

$$\Psi(\overline{\pi}, \overline{\theta}_1) = 0.$$

Si maintenant $f(x) = 0$ est une équation de degré λ à coefficients p-adiques rationnels, irréductible dans le corps $K(p)$ et si elle admet une racine β appartenant au corps $K(p, \alpha)$, ce dernier corps est dit *corps résolvant* de l'équation donnée. Tous les corps résolvants d'une même équation sont équivalents, et tout corps équivalent à un corps résolvant est encore un corps résolvant. Pour que deux corps algébriques soient corps résolvants d'une même équation, il faut et il suffit qu'ils contiennent deux nombres *premiers* équivalents.

On appelle *classe* l'ensemble de tous les corps algébriques équivalents à un même corps. Le nombre des classes de corps équivalents de degré donné λ est *fini*. Si λ n'est pas divisible par p, ce nombre est égal à la somme des plus grands communs diviseurs de e et de $p^f - 1$, étendue à tous les diviseurs e de $\lambda = ef$.

3. *Les corps décomposants appartenant à une équation.* — Un corps algébrique $K(p, \alpha)$ est dit *décomposant* pour une équation $f(x) = 0$, si $f(x)$ peut être décomposée dans ce corps, en un produit de facteurs linéaires. Une équation donnée admet toujours des corps décomposants : il suffit de prendre un corps résolvant $K(p, \alpha)$, de former l'équation irréductible à coefficients rationnels $H(x) = 0$, à laquelle satisfait un nombre primitif du corps de Galois qui contient α; enfin, de déterminer un facteur $h(x)$ à coefficients

p-adiques rationnels, irréductible dans le corps $K(p)$; le corps $K(p, \bar{\gamma})$, où $\bar{\gamma}$ est une racine de $h(x) = 0$, est un corps décomposant. *Deux corps décomposants de plus bas degré sont toujours équivalents.*

L'auteur considère enfin une équation $F(x)$ à coefficients rationnels, irréductible dans le corps $K(1)$ des nombres rationnels ordinaires. Cette équation admet aussi un corps algébrique décomposant $K(p, \bar{\delta})$, qu'on peut former facilement au moyen des facteurs, irréductibles dans le corps $K(p)$, du polynome $F(x)$. Si, par exemple, ces facteurs sont au nombre de trois

$$F(x) = f(x)\, g(x)\, h(x),$$

les n racines de $F(x)$ dans le corps $K(p, \bar{\delta})$ se partagent en trois cycles d'éléments conjugués. Ces racines sont donc données par des développements p-adiques. Deux corps décomposants de plus bas degré sont, ici encore, équivalents, et donnent des développements équivalents pour les racines de $F(x)$.

Ce qui précède permet l'étude arithmétique complète de tous les nombres d'un corps algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre $K(\alpha)$: à chaque nombre premier naturel p correspond, à l'équivalence près, un corps décomposant $K(p, \bar{\delta})$ bien déterminé, à l'intérieur duquel chaque nombre β de $K(\alpha)$ possède n développements bien déterminés, qui se séparent en autant de cycles de développements conjugués qu'il y a, dans $K(p)$, de facteurs irréductibles de l'équation fondamentale de $K(\alpha)$. A chacun de ces cycles, on fait correspondre un diviseur premier $\mathfrak{p}$ de p et l'on dit que β est divisible par $\mathfrak{p}^r$ si le cycle de racines correspondant de β possède l'ordre r. On réalise ainsi la décomposition de tous les nombres d'un corps en leurs facteurs premiers.

Hellinger (*E.*). — Nouvelle méthode pour fonder la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables (210-271).

Le but de ce Mémoire est de démontrer d'une manière directe les résultats fondamentaux obtenus par M. Hilbert dans la théorie des formes quadratiques *bornées* (beschränkte Formen); l'auteur ne s'appuie pas sur les passages à la limite dont se sert M. Hilbert et évite ainsi des considérations difficiles de convergence. Dans le premier Chapitre, il s'occupe du spectre discontinu d'une forme quadratique et se sert d'un procédé analogue à celui dont s'est servi M. Schmidt dans ses recherches sur les équations intégrales à noyau continu. Le second Chapitre est consacré au spectre continu. Enfin, le troisième Chapitre démontre l'existence de l'un ou l'autre de ces spectres, en faisant appel aux théorèmes les plus élémentaires de la théorie des fonctions analytiques.

CHAPITRE I. — *Recherche du spectre discontinu.*

1. *Propriétés fondamentales des formes linéaires et quadratiques d'une infinité de variables.* — Une forme linéaire d'une infinité dénombrable de variables $\Sigma l_p x_p$, une forme bilinéaire de deux séries de telles variables $\Sigma a_{pq} x_p y_q$, sont dites *bornées* si toutes les sommes

$$\sum_{p=1}^{p=n} l_p x_p, \qquad \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{pq} x_p y_q$$

restent, quel que soit n, inférieures en valeur absolue à un nombre fixe pour tous les systèmes de valeurs des x et des y, telles que l'on ait

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1.$$

Pour qu'une forme linéaire $L(x)$ soit bornée, il faut et il suffit que la série $\Sigma|l_p^2|$ soit convergente; elle est alors une fonction proprement continue (*vollstetig*) des variables. Une forme bilinéaire bornée peut, au contraire, n'être pas proprement continue, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas que les accroissements des variables tendent vers zéro pour que l'accroissement de la fonction tende vers zéro.

L'auteur rappelle les différentes *compositions* des formes linéaires ou bilinéaires entre elles; en particulier, si L et M sont deux formes linéaires, A, B deux formes bilinéaires, on pose

$$L(M) = \sum_p l_p m_p; \qquad AL(x) = \sum_{p,q} a_{pq} x_p l_q;$$

$$LA(y) = \sum_{p,q} a_{pq} l_p y_q; \qquad AB = \sum_{p,q} \left\{ \sum_\alpha a_{p\alpha} b_{\alpha q} \right\} x_p y_q.$$

Un système de formes linéaires réelles $L_p(x) = \sum_q l_{pq} x_q$ est dit orthogonal, si (L_p, L_q) est égal à zéro, pour $p \neq q$, à 1 pour $p = q$. Pour chaque système de valeurs des x dont la somme des carrés est convergente, on a

$$\sum_p (L_p(x))^2 = \sum_p x_p^2,$$

d'où l'on peut déduire qu'un système de formes orthogonales comprend au plus une infinité dénombrable de formes; le système est dit *complet* si l'inégalité précédemment écrite se change en égalité.

Tout système complet de formes orthogonales définit une transformation orthogonale de l'espace à une infinité de dimensions. Les procédés de composition indiqués plus haut sont covariants vis-à-vis d'une telle transformation.

2. *Formes propres de la forme quadratique.* — Soit $K(x)$ une forme quadratique réelle, bornée, d'une infinité de variables. Si l'on considère le faisceau de formes $A(x) = K(x) - \lambda E(x)$, où $E(x)$ désigne la forme unité, toutes les valeurs de λ pour lesquelles la forme A présente un caractère invariant vis-à-vis de toutes les transformations orthogonales, seront des invariants orthogonaux de K. Il en est ainsi des valeurs de λ pour lesquelles il existe une forme linéaire bornée $M(x)$, non identiquement nulle, telle que

$$AM(x) = 0.$$

Une telle forme est donnée par un système d'une infinité d'équations homogènes

$$\sum_q a_{pq} x_q = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_q k_{pq} x_q - \lambda x_p = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

on l'appelle *forme propre* de la forme K. Toute forme propre correspond à des valeurs réelles de λ et peut être supposée réelle; on peut même supposer que l'on a $(M, M) = 1$: dans ce cas, la forme propre est dite normale.

Si à une valeur de λ différente de zéro correspond au moins une forme propre L_1 normale, on démontre facilement l'existence d'un nombre fini ou infini de formes propres normales $L_1, L_2, \ldots$, correspondant à la même valeur de λ, orthogonales entre elles et telles que la forme

$$K_0(x) = K(x) - \lambda_1 [L_1(x)]^2 - [L_2(x)]^2 - \ldots$$

n'admette plus de forme propre correspondant à la valeur λ. Toute forme propre $M(x)$ correspondant à la valeur λ est alors représentable sous la forme

$$(M, L_1) L_1(x) + (M, L_2) L_2(x) + \ldots.$$

On dit que $L_1(x), L_2(x), \ldots$ définissent un système complet de formes propres orthogonales. Tout autre système complet s'en déduit par une transformation orthogonale. Ces propriétés s'étendent d'ailleurs au cas de $\lambda = 0$.

Si, maintenant, on considère toutes les valeurs de λ pour lesquelles il existe des formes propres, elles sont dénombrables, et les différentes formes propres qui définissent les systèmes complets correspondants sont orthogonales entre elles. Finalement, il existe un système de formes orthogonales $L_1(x), L_2(x), \ldots$ tel que l'on ait

$$K(x) = \lambda_1 [L_1(x)]^2 + \lambda_2 [L_2(x)]^2 + \ldots + K_0(x),$$

où l'on a

$$KL_\nu(x) = \lambda_\nu L_\nu(x), \qquad K_0 L_\nu(x) = 0,$$

et où $K_0(x)$ est une forme quadratique bornée ne possédant aucune forme propre correspondant à une valeur non nulle de λ.

CHAPITRE II. — *Recherche du spectre continu.*

3. *Formes sans spectre discontinu.* — L'exemple simple, dû à M. Hilbert, de la forme

$$K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots$$

prouve qu'il existe des formes quadratiques sans spectre discontinu, c'est-à-dire sans formes propres. Mais, dans cet exemple, les équations linéaires en nombre infini qui déterminent les formes propres admettent des solutions, fonctions de λ, telles que la somme des carrés des intégrales $\int_0^\lambda x_p(\lambda)\, d\lambda$ soit convergente, sans que la somme des carrés x_p^2 le soit. Malheureusement, on ne peut pas effectuer sur de telles quantités une transformation orthogonale, les variables transformées étant données par des séries divergentes. Aussi est-on conduit à remplacer les équations considérées par les suivantes

$$\sum_{(pq)} k_{pq} \int_0^\lambda \xi_q(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\lambda \lambda \xi_p(\lambda)\, d\lambda,$$

où l'on n'a à se préoccuper que de la congruence de $\sum_p [\xi_p(\lambda)]^2$, en désignant

par $z_i(\lambda)$ l'intégrale $\int_0^{\lambda} z_j(\lambda)\,d\lambda$. Les fonctions $z_p(\lambda)$ seules seront assujetties à la condition d'être continues, et de plus à variation bornée.

4. *Lemmes relatifs à certaines intégrales.* — Une fonction $f(\lambda)$ à variation bornée est caractérisée par la propriété que, quel que soit le partage de l'intervalle (a, b) en n intervalles partiels, la somme

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})|$$

reste inférieure à une limite fixe. L'auteur rappelle la définition de l'expression $\int_a^b |df(\lambda)|$, qui est la variation totale de la fonction dans l'intervalle (a, b). Si $u(\lambda)$ est une fonction finie et continue, on peut définir l'expression

$$\int_a^b u(\lambda)\,df(\lambda);$$

cette expression peut s'intégrer par partie si $u(\lambda)$ est aussi à variation bornée.

L'auteur considère d'autres expressions formées d'une manière analogue. Si $g(\lambda)$, $h(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ sont des fonctions monotones finies et continues; si de plus $f(\lambda)$ et $f_1(\lambda)$ sont deux autres fonctions telles que dans tout intervalle on ait

$$(\Delta f)^2 \leq \Delta g\,\Delta h, \qquad (\Delta f_1)^2 \leq \Delta g\,\Delta h_1,$$

on peut définir les expressions

$$\int_a^b \frac{|df(\lambda)|}{dg(\lambda)}, \qquad \int_a^b \frac{df(\lambda)\,df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}.$$

La première d'entre elles a même un sens, sous la seule condition que la somme

$$\sum \frac{|\Delta f(\lambda)|^2}{\Delta_i g(\lambda)},$$

relative à toute décomposition de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels, ait une limite supérieure finie, et aussi que $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ soient continues.

Soient maintenant $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$, ..., des fonctions continues telles que $\sum_p |z_p(\lambda)|$ converge et représente une fonction finie et continue de λ; alors la forme linéaire bornée

$$P(\lambda; x) = \sum_p z_p(\lambda)\,x_p$$

converge uniformément en λ pour chaque système de valeurs de x, dont la somme des carrés est convergente; elle représente de plus une fonction

continue de λ. Si de plus, $\rho_0(\lambda)$ étant une fonction monotone déterminée, l'intégrale $\int_a^b \frac{[dP(\lambda; x)]^2}{d\rho_0(\lambda)}$ existe et est inférieure à 1 lorsque $\Sigma x_p^2 \leq 1$; si enfin $f(\lambda)$ est une fonction quelconque pour laquelle $\int_a^b \frac{(df)^2}{d\rho_0}$ existe, l'intégrale

$$\int_a^b u(\lambda) \frac{[dP(\lambda; x)]^2}{d\rho_0(\lambda)} - \sum_{p,q} x_p x_q \int_a^b u(\lambda) \frac{d\rho_p(\lambda)\, d\rho_q(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)}$$

représente une forme quadratique bornée.

5. *Propriétés des solutions différentielles.* — L'auteur considère le système d'équations

$$\sum_{(q)} h_{pq} \Delta\rho_q(\lambda) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\, d\rho_p(\lambda) = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

où les inconnues sont les fonctions continues, en nombre infini, $\rho_1(\lambda)$, $\rho_2(\lambda)$, ..., assujetties à la condition que la série $\sum_{(p)} [\rho_p(\lambda)]^2$ converge vers une fonction finie et continue $\rho_0(\lambda)$. Les équations écrites doivent être vérifiées pour chaque intervalle (λ_1, λ_2).

En posant

$$P(\lambda; x) = \sum_p \rho_p(\lambda) x_p,$$

les équations peuvent s'écrire symboliquement

$$K\, dP(\lambda; x) - \lambda\, dP(\lambda, x) = 0,$$

et l'on peut dire que la forme différentielle $dP(\lambda; x)$ est une forme différentielle *propre* correspondant à la valeur λ. L'ensemble des valeurs de λ, pour lesquelles il existe des formes différentielles propres non identiquement nulles, est invariant vis-à-vis des transformations orthogonales. Cet ensemble porte, d'après Hilbert, le nom de *spectre continu* de la forme $K(x)$.

Les lemmes du paragraphe précédent permettent de démontrer la formule fondamentale

$$\sum_p \Delta_1\rho_p \Delta_2\rho_p = (\Delta_1 P, \Delta_2 P) = \Delta(1, 2)\, \rho_0,$$

où $\Delta_1\rho_p$, $\Delta_2\rho_p$ désignent les accroissements de $\rho_p(\lambda)$ dans deux intervalles partiels quelconques Δ_1 et Δ_2 et où $\Delta_{1,2}\rho_0$ désigne l'accroissement de $\rho_0(\lambda)$ dans l'intervalle $\Delta_{(1,2)}$ commun à Δ_1 et Δ_2. Cette propriété peut s'exprimer symboliquement par les formules

$$[dP(\lambda), dP(\mu)] = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ d\rho_0(\lambda), & \text{si } \lambda = \mu; \end{cases}$$

et l'on peut dire que les formes différentielles $dP(\lambda; x)$, correspondant aux différentes valeurs de λ, forment un système orthogonal.

Le spectre continu est nécessairement tout entier à distance finie et compris

entre le maximum et le minimum de $K(x)$: cela résulte facilement de la propriété précédente.

6. *Systèmes de formes différentielles linéaires orthogonales.* — La formule

$$\sum_p (\Delta_1 z_p)^2 = \Delta_2 z_0$$

montre que la fonction ρ_0 (fonction de base) est nécessairement monotone; de plus, le spectre continu est identique à l'ensemble parfait de points, obtenu en enlevant de l'axe des λ les points intérieurs aux intervalles (au plus dénombrables) dans lesquels $z_0(\lambda)$ reste constant; *il a donc la puissance du continu.*

L'intégrale $\int_a^b \frac{[dP(\lambda; x)]^2}{dz_0(\lambda)}$ existe et est une forme quadratique bornée des x_p. Si de plus $f(\lambda)$ et $f_1(\lambda)$ sont deux fonctions quelconques telles que les intégrales $\int_a^b \frac{(df)^2}{dz_0}$, $\int_a^b \frac{(df_1)^2}{dz_0}$ existent, on a la formule d'orthogonalité

$$\int_a^b \frac{df(\lambda)\,df_1(\lambda)}{dz_0(\lambda)} = \sum_p \int_a^b \frac{df(\lambda)\,dz_p(\lambda)}{dz_0(\lambda)} \int_a^b \frac{df_1(\lambda)\,dz_p(\lambda)}{dz_0(\lambda)},$$

ainsi que la représentation en série des $z_p(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \sum_p z_p(\lambda) \int_a^b \frac{df(\lambda)\,dz_p(\lambda)}{dz_0(\lambda)}.$$

Inversement, étant donnée une fonction continue monotone quelconque $\rho_0(\lambda)$, on peut toujours former facilement un système de formes différentielles orthogonales correspondant.

Une forme quadratique $K(x)$ peut admettre plusieurs systèmes de formes différentielles orthogonales; s'il y en a une infinité, c'est une infinité dénombrable et ils sont tous orthogonaux entre eux.

7. *La représentation intégrale de la forme quadratique au moyen du spectre continu.* — On peut toujours déterminer une suite de systèmes de formes différentielles orthogonales telle que l'on ait

$$K(x) = K_0(x) + \int_a^b \lambda \frac{[dP^{(1)}(\lambda; x)]^2}{dz_0^{(1)}(\lambda)} + \int_a^b \lambda \frac{[dP^{(2)}(\lambda; x)]^2}{dz_0^{(2)}(\lambda)} + \ldots,$$

$K_0(x)$ n'ayant plus dans l'intervalle (a, b) aucune forme différentielle propre, les $P^{(\alpha)}$, qui sont en nombre au plus dénombrable, satisfaisant aux relations

$$K\Delta P^{(\alpha)}(\lambda; x) = \int_\Delta \lambda\, dP^{(\alpha)}(\lambda; x),$$

$$K_0 \Delta P^{(\alpha)}(\lambda; x) = 0,$$

$$(\Delta_1 P^{(\alpha)}, \Delta_2 P^{(\beta)}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha \neq \beta, \\ \Delta_{1,2} z_0^{(\alpha)}(\lambda) & \text{pour } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Toute autre forme différentielle propre $d\Pi(\lambda; x)$ peut alors se mettre sous la forme

$$d\Pi(\lambda; x) = \sum_{\alpha} \frac{dP^{\alpha}(\lambda; x)\, d\sigma^{\alpha}(\lambda)}{d\sigma_0^{\alpha}(\lambda)},$$

où les fonctions arbitraires $\sigma^{(\alpha)}(\lambda)$ sont assujetties à la seule condition que la somme $\sum_{\alpha} \int_a^b \frac{(d\sigma^{\alpha})^2}{d\sigma_0^{\alpha}}$ converge.

La forme $K_0(x)$ peut, à son tour, avoir un spectre discontinu, qui est alors identique à celui de $K(x)$:

$$K_0(x) = \sum_{\beta} \lambda_{\beta} [\Pi_{\beta}(x)] \quad R(x).$$

$R(x)$ n'ayant plus, sauf pour $\lambda = 0$, ni spectre continu ni spectre discontinu. Comme une telle forme est nécessairement nulle, ce qui sera montré dans le Chapitre suivant, il en résulte qu'on est arrivé à une représentation canonique de la forme $K(x)$ au moyen de ses spectres.

CHAPITRE III. — *L'existence du spectre.*

8. *La forme inverse de* $K - \nu E$ *considérée comme fonction analytique de* ν. — Pour démontrer que toute forme quadratique bornée n'admettant aucun spectre, sauf $\lambda = 0$, est identiquement nulle, on peut se ramener facilement au cas où aucun spectre n'existe même pour $\lambda = 0$.

Cela étant admis, l'auteur part de la forme $\mathbf{K}(\nu; x)$ inverse de la forme $K - \nu E$, c'est-à-dire satisfaisant à la relation

$$(K - \nu E)\,\mathbf{K}(\nu; x) = K\mathbf{K}(\nu; x) - \nu\mathbf{K}(\nu; x) = E(x).$$

On suppose que ν est un nombre complexe $\lambda - i\mu$. L'auteur démontre l'existence de cette forme $\mathbf{K}$, pour ν imaginaire, par un procédé dû à M. Hilbert. La forme réelle

$$S = (K - \nu E)(K - \bar{\nu} E) = (K - \lambda E)^2 + \mu^2 E$$

jouit de la propriété qu'elle est supérieure ou égale à μ^2 quand $\Sigma x_p^2 = 1$; elle a donc, pour tout point ν en dehors de l'axe réel, un minimum différent de zéro. Si α est un nombre positif inférieur à l'inverse du minimum de S, la série

$$\alpha [E(x) + S_1(x) + S_1(x) + S_1^2(x) + \ldots],$$

où $S_1 = E - \alpha S$, est uniformément convergente dans le domaine $\Sigma x_p^2 = 1$ et représente l'inverse $S^{-1}(x)$ de $S(x)$. Considérée comme une fonction de ν, la série converge uniformément dans un domaine limité par une parallèle à l'axe réel des λ et deux arcs de cercle

$$(M - \lambda)^2 + \mu^2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Si l'on pose

$$\mathbf{K}(\nu; x) = (K - \nu E)\, S^{-1} = (K - \lambda E)\, S^{-1} + i\mu S^{-1},$$

la forme $\mathbf{K}$ est l'inverse de $K - \nu E$; elle est constamment inférieure en module à $\frac{1}{\mu}$ (toujours dans le domaine $\Sigma x_p^2 = 1$).

La forme $\mathbf{K}(\nu; x)$, considérée comme fonction de la variable complexe ν, est une fonction analytique uniforme définie et continue pour toutes les valeurs imaginaires de ν, régulière à l'infini et n'admettant pas de points singuliers en dehors de l'axe réel; en particulier on a, au voisinage de l'infini,

$$\mathbf{K}(\nu; x) = \frac{E(x)}{\nu} - \frac{K(x)}{\nu^2} - \frac{K^2(x)}{\nu^3} \cdots.$$

9. *Étude de la forme inverse sur l'axe réel; le spectre.* — La propriété de la forme $\mathbf{K}(\nu; x)$ d'être l'inverse de la forme $K = \nu E$ entraîne, comme conséquence, la formule

$$K \int_{\nu_0}^{\nu_1} \mathbf{K}(\lambda + i\mu; x)\, d\lambda = \int_{\nu_0}^{\nu_1} (\lambda - i\mu)\, \mathbf{K}(\lambda + i\mu; x)\, d\lambda = (\lambda_0 - \lambda_1)\, E(x),$$

si l'on prend seulement les coefficients de i, on obtient

$$K \int_{\nu_0}^{\nu_1} \mu S^2\, d\lambda = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \lambda\mu S^2\, d\lambda - \mu \int_{\nu_0}^{\nu_1} K - \lambda E S^2\, d\lambda = 0.$$

C'est par le passage à la limite, obtenu en faisant tendre μ vers zéro, que l'auteur arrive à la démonstration de l'existence du spectre. Le dernier terme est inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{\mu}\mu \log \frac{1}{\alpha\mu}$ et tend donc vers zéro. Quant à l'intégrale $\int_{\nu_0}^{\nu_1} \mu S^2\, d\lambda$, elle tend vers la limite $\pi E(x)$, lorsque l'intervalle d'intégration est suffisamment grand; comme, d'autre part, la fonction sous le signe $\int$ est essentiellement positive, l'intégrale a une limite supérieure finie

$$\sigma(\lambda_0) = \sigma(\lambda_1),$$

$\sigma(\lambda; x)$ désignant une fonction monotone de λ; l'intégrale $\int_{\nu_0}^{\nu_1} \mu S^2\, d\lambda$ tend vers cette limite supérieure, quand μ tend vers zéro par une suite convenable de valeurs. Dans ces conditions, on obtient la formule

$$K[\sigma(\lambda_0; x) - \sigma(\lambda_1; x)] = [\lambda\sigma(\lambda; x)]_{\lambda_0}^{\lambda_1} - \int_{\nu_0}^{\nu_1} \sigma(\lambda; x)\, d\lambda = 0.$$

Si, pour $\lambda = \lambda_0$, la fonction $\sigma(\lambda; x)$ fait un saut brusque $\Delta\sigma(x) = \pi\Sigma x_n^2$, on a

$$K\Delta\sigma(x) - \lambda_0 \Delta\sigma(x) = 0,$$

ce qui prouve que $\Delta\sigma(x)$ est une fonction propre correspondant à la valeur λ_0.

Si la fonction $\sigma(\lambda; x)$ ne subit aucun saut, il existe au moins un intervalle (λ_0, λ_1), dans lequel la fonction continue $\sigma(\lambda; x)$ *croît* d'une manière continue, et la formule

$$K[\sigma(\lambda_0; x) - \sigma(\lambda_1; x)] = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \sigma\, d\sigma(\lambda; x) = 0$$

prouve l'existence d'une forme différentielle propre, ce qu'il fallait démontrer.

Hurwitz (A.). — Sur la congruence $ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$ (272-292).

L'auteur démontre le théorème suivant, généralisation d'un théorème démontré par M. Dickson (même journal, t. CXXXV).

Si a, b, c sont des entiers différents de zéro, e un nombre premier impair, la congruence

$$ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p}$$

admet, pour chaque nombre premier p qui dépasse une limite fixe, une solution pour laquelle aucun des trois entiers x, y, z n'est divisible par p.

1. Le théorème étant évident si $p - 1$ est premier avec e, il suffit de considérer le cas où $p - 1$ est de la forme ef.

2. L'auteur introduit le symbole $\varphi(n)$ égal à 1 si n est divisible par p et à 0 si n est premier avec p. Le nombre des solutions de la congruence donnée est alors

$$A = \sum_{x,y,z} \varphi(ax + by + cz),$$

la somme étant étendue à un système complet de restes x, y, z premiers avec p.

3. Soit g une racine primitive de p. Le nombre A peut se mettre sous la forme

$$A = e^2 \sum_{r,s,t} \varphi(g^{r+\alpha} + g^{s+\beta} + g^{t+\gamma}),$$

où les indices r, s, t parcourent un système complet de restes (mod f). On a encore

$$A = (p-1)\, e^2 [\alpha, \beta, \gamma]$$

en posant

$$[\alpha, \beta, \gamma] = \frac{1}{f} \sum_{r,s,t} \varphi(g^{r+\alpha} + g^{s+\beta} + g^{t+\gamma}).$$

L'auteur introduit plus généralement le symbole $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_e]$, dont il va développer les propriétés. On a en particulier

$$[\alpha] = 0, \qquad [\alpha, \beta] = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \equiv \beta \pmod{e}, \\ 0 & \text{si } \alpha \not\equiv \beta \pmod{e}. \end{cases}$$

4. L'une des propriétés les plus importantes du symbole introduit est fournie par la formule

$$\sum_{\rho} [\alpha_1 + \rho, \alpha_2 + \rho, \ldots, \alpha_e + \rho, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_e]$$
$$= (p-1)([\alpha_1, \ldots, \alpha_e][\beta_1, \ldots, \beta_e]) + (f^{e-1} - [\alpha_1, \ldots, \alpha_e])(f^{e-1} - [\beta_1, \ldots, \beta_e]),$$

où la somme du premier membre est étendue aux valeurs $0, 1, \ldots, e-1$ de ρ.

5. L'auteur introduit ensuite la quantité

$$a_{n,m} = \sum_{\rho=0}^{\rho=e-1} [\rho, m - n\rho, 0];$$

on a

$$a_{n,m} = a_{n,m+1},$$
$$a_{n,m} = a_{n,m} + f = [m, 0].$$

Il introduit enfin les sommes

$$s_{n,m} = \sum_{\rho=0}^{\rho=e-1} a_{n,\rho}\, \alpha_{n,\rho+1};$$

en appliquant les formules précédemment trouvées, il obtient

$$s_{n,m} = \begin{cases} (p-4)f, & \text{si } m \equiv 0 \pmod{e}, \\ (p-4)f + p, & \text{si } m \not\equiv 0 \pmod{e}, \end{cases}$$

mais en supposant que n n'est congru ni à 0 ni à 1 (mod e).

De là résulte en particulier la formule remarquable

$$(a_{n,0} - a_{n,1}) + (a_{n,1} - a_{n,m+1}) + \ldots + (a_{n,m-1} - a_{n,m+1}) = 2p,$$

où ni n, ni $n-1$, ni m ne sont divisibles par e.

6. Cette dernière formule conduit immédiatement à l'inégalité

$$\sqrt{p} < a_{n,0} - \frac{a_{n,m+1} - a_{n,m}}{2} < \sqrt{p},$$

d'où une sommation conduit à la suivante

$$p + 1 - (e-1)\sqrt{p} - e\,a_{n,0} < p + 1 + (e-1)\sqrt{p}.$$

7. Une sommation nouvelle permet de passer des $a_{n,0}$ au symbole primitif $[\alpha, \beta, \gamma]$, ce qui conduit finalement à l'inégalité

$$p + 1 - (e-1)(e-2)\sqrt{p} - t_1 e < e\,[\alpha, \beta, \gamma] < p + 1 + (e-1)(e-2)\sqrt{p} + t_1 e,$$

où l'on a posé

$$t_1 = [\beta, \gamma] + [\gamma, \alpha] + [\alpha, \beta] = 0, 1 \text{ ou } 3.$$

Le théorème est ainsi démontré; $\mathcal{A}$ est certainement plus grand que zéro, si le nombre p est supérieur à la racine positive de l'équation

$$p + 1 - (e-1)(e-2)\sqrt{p} - t_1 e = 0.$$

On voit de plus que le rapport $\frac{\mathcal{A}}{p^2}$ tend vers 1 pour p infini.

Wieferich (*Arthur*). — Sur le dernier théorème de Fermat (293-302).

M. Mirimanoff, dans le Tome CXXVIII du même journal (1905, p. 45-68), a démontré que si l'équation de Fermat

$$x^p + y^p + z^p = 0,$$

où l'exposant p est un nombre premier impair, admet une solution pour laquelle x, y, z sont premiers avec p, on a les congruences

$$\xi_i B_{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 3, 5, \ldots, p-2),$$

où l'on désigne par B_i le $i^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli et où l'on a posé

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} t_j^{-i}.$$

L'auteur démontre que ces congruences entraînent nécessairement la congruence simple

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Wieferich (*Arthur*). — Sur la géométrie du triangle (303-305).

L'auteur communique les énoncés de quelques théorèmes qui conduisent à certains points et à certaines droites entre lesquelles existe une relation analogue à celle qui lie les points et les droites de l'hexagone de Pascal.

Thome (*L.-W.*). — Sur les équations différentielles linéaires simultanées (Complément aux Mémoires de l'auteur parus dans les Tomes CXXXI, CXXXIII de ce journal) (306-314).

Lorsque l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes simultanées se ramène à celle d'une seule équation différentielle linéaire et homogène, le déterminant d'un système fondamental de solutions du système peut être mis sous la forme d'un quotient : le numérateur est le déterminant différentiel des intégrales de l'équation différentielle, et le dénominateur est un déterminant connu, composé rationnellement au moyen des coefficients du système et de leurs dérivées.

Si l'intégration du système donné se ramène à l'intégration successive de plusieurs équations différentielles à une fonction inconnue, le déterminant d'un système fondamental de solutions peut être mis sous la forme d'un *produit* d'expressions analogues à celle du cas précédent et se rapportant chacune à une des équations différentielles auxquelles se ramène le système donné.

E. C.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXVII, 1910.

Fejér (*L.*). — Exemples de fonctions continues admettant une série de Fourier divergente (1-5).

Si ν est un nombre entier positif la fonction $\sin(2\nu+1)\frac{x}{2}$ admet dans l'intervalle $(0, \pi)$ un développement en série de cosinus :

$$(1) \qquad \sin(2\nu+1)\frac{x}{2} = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_k\cos kx + \ldots$$

Les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sont tous positifs, les suivants négatifs; les sommes $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$, obtenues en faisant $x = 0$, vont en croissant jusqu'à un maximum s_ν et tendent ensuite vers zéro en décroissant. Le maximum s_ν est supérieur à $\frac{1}{2\pi}\log(2\nu+1)$.

Cela étant, la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n-1}+1)\frac{x}{2}}{n} \qquad (0 < x < \pi)$$

représente dans l'intervalle $(0, \pi)$ une fonction continue; cette fonction continue admet une série de Fourier de cosinus qui est divergente pour $x = 0$. Les coefficients de cette série de cosinus peuvent en effet s'obtenir en remplaçant chaque terme $\sin(2^{n-1}+1)\frac{x}{2}$ par son développement (1) ou $(\nu = 2^{n-1})$, et l'on voit immédiatement que la somme des k premiers coefficients trouvés est toujours positive : en particulier, si $k = 2^{n-1}$, cette somme est supérieure à $\frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\log(2^{n-1}+1) > \frac{n}{16}$. La série de cosinus correspondant à la fonction $\varphi(x)$ est donc divergente pour $x = 0$.

L'auteur déduit de ce qui précède que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n-1}x}{n}$$

jouit de la même propriété.

Perron (*Oskar*). — Sur l'équation aux différences linéaires de Poincaré (6-64).

1. *Introduction.* — *L'équation aux différences à coefficients constants.* — Soit

$$D_{\nu+k} + a_1 D_{\nu+k-1} + a_2 D_{\nu+k-2} + \ldots + a_k D_\nu = 0 \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

une équation aux différences linéaires à coefficients constants, a_r étant différent de zéro. L'intégration de cette équation dépend de la résolution de l'équation caractéristique

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots + a_r = 0.$$

Si les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ de cette équation sont toutes distinctes, l'intégrale générale de l'équation aux différences est

$$D_\nu = C_1 \rho_1^\nu + C_2 \rho_2^\nu + \ldots + C_r \rho_r^\nu;$$

si de plus les valeurs absolues des racines ρ sont toutes différentes, pour chaque intégrale D_ν (autre que $D_\nu = 0$), le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend, pour ν infini, vers une limite qui est l'une des racines ρ_i. Si au contraire deux des racines ρ_i ont la même valeur absolue, ce théorème peut tomber en défaut.

Si l'équation caractéristique a des racines multiples, chaque racine multiple ρ_i d'ordre e_i donne naissance à une intégrale dépendant de e_i constantes arbitraires. Si deux racines différentes quelconques ont des valeurs absolues différentes, le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend encore vers une limite égale à l'une des racines ρ_i; sinon ce rapport peut ne tendre vers aucune limite. Néanmoins on peut toujours regarder l'intégrale générale comme une combinaison linéaire d'intégrales particulières pour lesquelles le rapport tend vers une limite.

2. *L'équation aux différences à coefficients variables.* — Soit

$$D_{\nu+r} + a_1^\nu D_{\nu+r-1} + a_2^\nu D_{\nu+r-2} + \ldots + a_r^\nu D_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

une équation aux différences dont les coefficients $a_1^\nu, \ldots, a_r^\nu$ sont variables et tendent respectivement, pour ν infini, vers des limites $a_1, \ldots, a_r$. M. Poincaré a trouvé que, dans ce cas aussi, le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend, pour chaque intégrale de l'équation aux différences, vers une limite égale à l'une des racines de l'équation *caractéristique*

$$x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r = 0,$$

à condition que les racines distinctes de cette équation aient des valeurs absolues différentes. Dans un article précédent (même *Journal*, t. CXXXVI), l'auteur a démontré le théorème de M. Poincaré dans le cas où l'équation caractéristique n'a que des racines *simples*.

Dans le cas des racines multiples, la démonstration de M. Poincaré est insuffisante : l'auteur montre, sur un exemple, que le théorème peut dans ce cas tomber en défaut. Il considère pour cela l'équation

$$D_{\nu+2} - 2D_{\nu+1} + \left(1 + \frac{a}{\nu+1}\right) D_\nu = 0 \qquad (a > 1),$$

dont l'équation caractéristique admet la racine double $x = 1$. Si l'on pose

$$\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = 1 + \frac{1}{\xi_\nu},$$

ou a

$$\xi_{\nu+1} = \frac{1-\xi_\nu}{1-\dfrac{a\xi_\nu}{\nu+1}}.$$

La quantité ξ_ν prend une infinité de fois des valeurs positives et une infinité de fois des valeurs négatives, comme cela résulte facilement de la formule précédente; par suite, pour une infinité de valeurs de ν, ξ_ν est négatif, tandis que $\xi_{\nu+1}$ est positif; $\xi_{\nu+1}$ est alors inférieur à 1, et par conséquent ξ_n ne peut pas augmenter indéfiniment avec n; $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ ne tend donc pas vers une racine de l'équation caractéristique.

L'exemple de l'équation

$$D_{\nu+2} - \left(1 + \frac{1+\nu}{\nu+1}\right) D_\nu = 0$$

dont l'équation caractéristique a pour racines $+1$ et -1, montre de même que, pour aucune intégrale, le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ ne tend vers une limite, que par suite il est impossible, comme dans le cas des coefficients constants, de regarder l'intégrale générale comme une combinaison linéaire d'intégrales particulières pour chacune desquelles le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tend vers une limite.

Si les racines distinctes de l'équation caractéristique ont des valeurs absolues différentes, le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ peut ne tendre vers aucune limite, mais l'auteur démontre cependant qu'on peut trouver une suite infinie de valeurs de ν tendant vers ∞ telle que $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ tende vers une racine ρ_ν de l'équation caractéristique; une autre suite de valeurs de ν pourrait d'ailleurs conduire à une limite différente de ρ_ν. C'est ainsi qu'en revenant au premier exemple traité, ξ_ν prend une infinité de valeurs comprises entre 1 et 3 (puisque $\xi_{\nu-1}$ est une infinité de fois compris entre 0 et 1); le rapport $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ est donc une infinité de fois compris entre $\frac{4}{3}$ et 1 et l'une de ses limites est un nombre ρ compris entre $\frac{4}{3}$ et 2, c'est-à-dire différent de la racine 1 de l'équation caractéristique.

3. *Le théorème fondamental.* — Le cas où le coefficient $a_\nu^{(\nu)}$ peut s'annuler pour certaines valeurs de ν introduit certaines complications tenant à l'existence d'intégrales singulières s'annulant pour toutes les valeurs de ν qui dépassent une limite fixe, sans être identiquement nulles. L'auteur laisse ce cas de côté. Il énonce alors le théorème fondamental suivant :

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ les valeurs absolues distinctes des racines de l'équation caractéristique et soit e_s le nombre des racines de valeur absolue q_s, chacune étant comptée avec son degré de multiplicité, de manière qu'on ait

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\sigma = r.$$

Alors l'équation aux différences, où l'on suppose $a_r^{(\nu)}$ différent de zéro pour toutes les valeurs de ν, admet un système fondamental d'intégrales se

décomposant en z classes telles que, pour les intégrales de la $\lambda^{ème}$ classe et leurs combinaisons linéaires, on ait

$$\limsup_{\nu=\infty} \left| \sqrt[\nu]{D_\nu} \right| = q_\lambda.$$

Le nombre des intégrales de la $\lambda^{ième}$ classe est égal à e_λ.

Dans le cas où le coefficient $a_\nu^{(\nu)}$ s'annule pour certaines valeurs de ν, on a le théorème suivant :

Pour chaque intégrale qui est différente de zéro pour une infinité de valeurs de son indice, la limite supérieure de $\sqrt[\nu]{|D_\nu|}$ est égale à la valeur absolue d'une racine de l'équation caractéristique; mais on ne peut plus affirmer qu'à chaque valeur absolue q_λ correspondent des intégrales pour lesquelles la limite supérieure de $\sqrt[\nu]{|D_\nu|}$ est égale à q_λ.

La démonstration de ces théorèmes repose sur les lemmes suivants :

Lemme I. — *Si q est un nombre positif quelconque supérieur en valeur absolue aux racines de l'équation caractéristique, on a*

$$|D_\nu| \leq (|D_0| + |D_1| + \ldots + |D_{r-1}|) C q^\nu,$$

où C est une constante indépendante de ν, $D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}$.

Ce lemme entraîne la conséquence que $\frac{D_\nu}{q^\nu}$ tend vers zéro.

Lemme II. — *Si toutes les racines de l'équation caractéristique sont différentes de zéro et si q' est un nombre positif quelconque inférieur en valeur absolue à ces racines, on a, pour chaque intégrale D_ν qui est différente de zéro pour une infinité de valeurs de ν,*

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{|D_\nu|}{q'^\nu} = \infty.$$

Lemme III. — *Si l'on décompose le premier membre de l'équation caractéristique*

$$f(x) = x^r - a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r = 0$$

en deux facteurs

$$f(x) = \varphi(x)\omega(x),$$

où

$$\varphi(x) = x^{r-e} + b_1 x^{r-e-1} + \ldots + b_{r-e},$$

$$\omega(x) = x^e - c_1 x^{e-1} + \ldots + c_e,$$

et où chaque racine de $\varphi(x)$ est inférieure en valeur absolue à chaque racine de $\omega(x)$; alors on peut trouver un entier N jouissant de la propriété suivante : pour chaque valeur de $\nu \geq N$, le premier membre de l'équation aux différences peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
&D_{\nu+r} + c_1^{(\nu-r)} D_{\nu+r-1} + \ldots + c_e^{(\nu-r)} D_{\nu+r-e} \\
&b_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + c_1^{(\nu-r-1)} D_{\nu+r-2} + \ldots + c_e^{(\nu-r-1)} D_{\nu+r-e-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&b_{r-e}^{(\nu)} D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \ldots + c_e^{(\nu)} D_\nu = 0.
\end{aligned}$$

où les $b_i^{(\nu)}$ et les $c_k^{(\nu)}$ tendent respectivement vers b_i et c_k, et où de plus tous les $c_k^{(\nu)}$ sont différents de zéro.

L'auteur remet aux paragraphes suivants la démonstration de ces lemmes. Le théorème fondamental résulte alors immédiatement des deux premiers lemmes lorsque toutes les racines de l'équation caractéristique ont la même valeur absolue.

Dans le cas contraire on peut, d'après le lemme III, obtenir un système de r intégrales indépendantes de l'équation aux différences donnée de la manière suivante : On détermine $r-e$ intégrales indépendantes $E_\nu^1, \ldots, E_\nu^{r-e}$ de l'équation aux différences

$$E_{\nu+e} - b_1^{(\nu)} E_{\nu+e-1} - \ldots - b_e^{(\nu)} E_\nu = 0;$$

puis e intégrales indépendantes $D_\nu^{r-e+1}, \ldots, D_\nu^r$ de l'équation

$$D_{\nu+e} - c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} - \ldots - c_e^{(\nu)} D_\nu = 0;$$

enfin, correspondant à chaque intégrale E_ν^i, une intégrale D_ν^i de l'équation non homogène

$$D_{\nu+e} - c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} - \ldots - c_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu^i.$$

Les $r-e$ intégrales $D_\nu^1, \ldots, D_\nu^{r-e}$ peuvent s'obtenir par des développements en série convergents

$$D_\nu^i = p_1^{(\nu)} E_{\nu-1}^i + p_2^{(\nu)} E_{\nu-2}^i + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, r-e),$$

où $p_\nu^{(\nu)}$ est, pour ν constant, intégrale d'une certaine équation aux différences linéaire d'ordre e dont les racines sont les inverses des racines de $\omega(x)$.

Si τ désigne un nombre positif supérieur en valeur absolue aux racines de $\varphi(x)$ et τ un nombre positif supérieur à τ mais inférieur en valeur absolue aux racines de $\omega(x)$, les $r-e$ intégrales $D_\nu^1, \ldots, D_\nu^{r-e}$ satisfont à l'inégalité

$$D_\nu^{(i)} < K\tau^\nu,$$

où K est une constante indépendante de ν; par suite, la limite supérieure de toute combinaison linéaire de ces $r-e$ intégrales est au plus égale à la plus grande des valeurs absolues des racines de $\varphi(x)$. Au contraire, d'après le lemme II, on a pour chaque intégrale $D_\nu^{(r-e+1)}, \ldots, D_\nu^{(r)}$,

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{|D_\nu|}{\tau^\nu} = \infty$$

et, par suite, pour toute intégrale qui n'est pas une combinaison linéaire de $D_\nu^1, \ldots, D_\nu^{r-e}$, la limite supérieure de $\sqrt[\nu]{D_\nu}$ est au moins égale à la plus petite des valeurs absolues des racines de $\omega(x)$.

Le théorème fondamental se déduit des résultats précédents en décomposant $f(x)$ en τ facteurs dont chacun admet des racines de la même valeur absolue.

1. — *Démonstration des lemmes.*

7. *Applications.* — Soit

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots$$

une série de puissances dont les coefficients satisfont à l'équation aux différences donnée. Le rayon de convergence

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|D_\nu|}}$$

de cette série est donc, si la série est illimitée, l'un des nombres $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \ldots, \frac{1}{q_\sigma}$ ou $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ sont les valeurs absolues des racines de l'équation caractéristique. La série peut se déduire linéairement de r séries particulières et l'on peut partager ces r séries en σ classes telles que la $\lambda^{\text{ème}}$ classe contienne e_λ séries pour lesquelles le rayon de convergence est égal précisément à $\frac{1}{q_\lambda}$. Cela suppose seulement que le terme constant de l'équation aux différences n'est nul pour aucune valeur de ν. Dans le cas général, le rayon de convergence de la série considérée sera $\frac{1}{q}$ si q_1 est le plus grand des nombres q.

Comme autre application, l'auteur démontre le théorème suivant :

Si les coefficients d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre m sont des polynomes et si le coefficient de la plus haute dérivée est de degré s, il y a au moins m — s intégrales linéairement indépendantes qui sont des fonctions entières.

Soit

$$P_0(x)y + P_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + P_m(x)\frac{d^m y}{dx^m} = 0$$

l'équation considérée, et soit r le plus grand des $m+1$ nombres

$$s + m, \quad s_1 + m - 1, \quad s_2 + m - 2, \quad \ldots, \quad s_{m-1} + 1, \quad s_m,$$

où s_ν désigne le degré de $P_\nu(x)$. Si $x = 0$ est un point régulier pour l'équation, c'est-à-dire si $P_m(0) \neq 0$, la série

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

qui donne l'intégrale générale jouit de la propriété que, au moins à partir d'un certain rang, le coefficient D_ν est l'intégrale d'une équation aux différences linéaire dont le terme constant n'est jamais nul et dont l'équation caractéristique est

$$x^r P_m\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Cette équation ayant $r - s$ racines nulles, l'équation aux différences admet $r - s$ intégrales indépendantes pour lesquelles $\sqrt[\nu]{|D_\nu|}$ tend vers zéro, ce qui prouve

l'existence de $r - s$ intégrales indépendantes de l'équation différentielle représentées par des séries convergentes dans tout le plan.

Le cas $r = s$ conduit à un résultat bien connu : la seule fonction entière qui satisfasse à l'équation différentielle se réduit à un polynome.

Weitzenböck (*R.*). — Sur le système d'un complexe linéaire et d'une surface de second ordre (65-82).

1. *Introduction, la symbolique.* — L'auteur rappelle les notations symboliques de Clebsch. Une surface du second ordre R_x^2 est représentée en coordonnées ponctuelles homogènes x_i par

$$a_x^2 = 0,$$

où

$$a_x = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4$$

et où l'on doit poser

$$a_i a'_k + a_k a'_i = a_{ik} + a'_{ik}.$$

Si l'on a, pour des symboles m_i, l'équation

$$m_i m_k = m'_i m_k \quad \text{ou} \quad m'_{ik} = -m'_{ik},$$

les m'_i sont des symboles de complexes. Les coordonnées plückériennes d'une droite sont $p_{ik} = (xy)_{ik}$ ou $p_{ik} = (u'v')_{ik}$ et l'on a

$$p_{12} = p_{12}, \quad p_{13} = p'_{12}, \quad p_{14} = p'_{13}.$$

L'équation d'un complexe linéaire est

$$\pi_m^2 = (\pi_1 m_1 + \pi_2 m_2 + \pi_3 m_3 + \pi_4 m_4)^2 = 2\sum \pi_{ik} m_{ik} = 0$$

où les π_{ik} sont les coordonnées de la droite variable.

2. *Le système des formes.* — Le système complet des formes de l'ensemble d'une surface du second ordre R et d'un complexe linéaire K_m est le suivant :

Invariants. — Les invariants sont :

A $= (a'b'c'd')^2 = a_x^2$: c'est le discriminant de R ;

B $= m_i m_k n_i n_k$: l'équation B = 0 signifie que le complexe K est *harmonique* par rapport à R ;

C $= m_n^2$: l'équation C = 0 signifie que le complexe est spécial.

Covariants. — Les covariants sont :

$R_x^2 = a_x^2$: c'est le premier membre de l'équation ponctuelle de R ;

$T_x^2 = m_x n'_x m_\alpha n_\alpha$: c'est le lieu des points x dont le plan focal par rapport à K touche R.

Contravariants. — Les contravariants sont :

$R_u^2 = (a'b'c'u')^2 = u_\alpha^2$: c'est la surface R en coordonnées tangentielles ;

$\Sigma_u^2 = m_i n_i m_\alpha n_\alpha$: c'est le lieu des plans dont le foyer est sur R

Formes plückériennes. — Ce sont les suivantes :

$K_m = \pi_m^2 - \pi_m^2$: c'est le complexe K ;

$R_{\pi^2} = \pi_a \pi_b \rho_a \rho_b$: c'est la surface R ;

$\Omega = \pi_a \pi_b m_a m_b$: c'est le polaire réciproque de K par rapport à R.

Si la surface R est donnée comme surface de seconde classe $u_\chi^2 = 0$, on a des formes correspondantes qui s'expriment ax moyen des formes fondamentales

$$R_\xi = \pi_\alpha \pi_\beta \rho'_\alpha \rho'_\beta = \frac{3}{2} A R_\xi,$$

$$R_\gamma = (x\alpha\beta\gamma)^2 = \frac{9}{4} A R_\gamma,$$

$$A = (\alpha\beta\gamma\delta)^2 = \frac{9}{4} A,$$

$$B = m_\alpha n_\alpha m_\beta n'_\beta = \frac{3}{2} AB.$$

3. *Le complexe polaire* Ω. — Le complexe Ω est formé des polaires des droites du complexe K_m. Les directrices Γ_1 et Γ_2 de la congruence linéaire déterminée par K_m et Ω sont données par

$$\Gamma = K_m - \lambda_2 \Omega = 0$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation

$$C - 2B\lambda - \frac{AC}{24}\lambda^2 = 0.$$

Dans le cas général Γ_1 coupe R en deux points P_1 et P_2, Γ_2 coupe R en deux points Q_1 et Q_2. Les quatre droites P_1Q_1 appartiennent au complexe K_m et sont des génératrices de R ; ce sont les *génératrices du complexe.*

4. *Les surfaces* T_x^2, S_x^2. — On peut aussi prendre la polaire de R par rapport au complexe K_m. L'enveloppe des plans focaux des différents points de R est la surface $\Sigma_u^2 = 0$ de seconde classe ; le lieu des foyers des plans tangents de R est la surface T_x^2 du second ordre ; c'est la même surface que Σ_u^2 : elle coupe la surface R suivant les quatre génératrices du complexe.

En coordonnées tangentielles on a

$$T_u = \frac{9}{16} AC\, \Sigma_u ;$$

le discriminant de T_x^2 est $\frac{9}{256} A^2 C^2$. Enfin l'équation plückérienne de T_x^2 est

$$T_{\pi^2} = 9(B^2 R_{\pi^2} - 4B\Phi + 4\Psi)$$

où les formes Φ et Ψ peuvent s'exprimer au moyen des formes fondamentales R_{π^2}, K_m et Ω. Enfin on a

$$T_\Delta = 3BR_\Delta^2 - 6a'_\alpha b'_\alpha m_a m_b n_a n_b$$

5. *Les formes* Φ *et* Ψ, *la courbe d'intersection* M. — Les formes Φ et Ψ

introduites dans l'équation plückérienne de T_y^2 sont

$$\Phi = \frac{B}{4} R_{\xi\eta} - \frac{A}{96} K_{\xi\eta} - \frac{1}{4} \Omega,$$

$$\Psi = \frac{AC^2}{16 \cdot 24} R_{\xi\eta}^2 - \frac{AC}{96} K_{\xi\eta} \Omega + \frac{B}{4} \Omega^2.$$

La courbe d'intersection M de $R_{\xi\eta}^2$ et T_y^2 se compose des quatre génératrices du complexe; l'auteur cherche son équation en coordonnées plückériennes; c'est

$$M = 24 \left(R_{\xi\eta}^2 \Psi - \Phi^2 \right).$$

6. *La transformation* P_y *ses points doubles.* — Le pôle par rapport à R du plan focal d'un point y est un point $P_y^{(1)}$ $\alpha_{\eta} \alpha_{\xi\eta} m_y = 0$. On a ainsi une transformation ponctuelle qui fait passer du point y au point $P_y^{(1)}$. Les points doubles de cette transformation sont les points P_y et Q_y.

L'équation ponctuelle des plans tangents à R en ces quatre points peut s'obtenir en cherchant le lieu des points tels que la droite d'intersection de leurs plans focaux par rapport à K_{η} et Ω soit tangente à R; on trouve ainsi

$$V_y = \left(\frac{A^2 C^2}{128} (R_{\eta}^2)^2 - \frac{AB}{4} R_{\eta}^2 T_y^2 - \frac{A}{16} (T_y^2)^2 \right).$$

Des considérations dualistiques conduisent de même à l'équation tangentielle des quatre points P_y et Q_y

$$W_{\eta} = -\frac{A}{16} \left(\frac{C^2}{4} (R_{\eta}^2)^2 - 3BR_{\eta}^2 \Sigma_{\eta}^2 - \frac{3}{8} A (\Sigma_{\eta}^2)^2 \right).$$

7. *Cas particuliers.* — Si le discriminant $B = \frac{1}{24} AC^2$ de la congruence (K_{η}, Ω) s'annule, Γ_1 et Γ_2 coïncident en une génératrice Γ de R qui a pour équation

$$\Gamma + BK_{\eta} - C\Omega = 0;$$

on a dans ce cas

$$M = 6 \left(\Omega - \frac{B}{C} K_{\eta} \right) \left[2BR_{\xi\eta}^2 - \left(\Omega + \frac{3}{C} K_{\eta} \right)^2 \right] = 0.$$

Si le facteur entre crochets est identiquement nul, K_{η} a avec R une famille de génératrices communes.

Un second cas particulier important est celui où R_{η}^2 dégénère en une conique χ, qu'on peut supposer être le cercle imaginaire à l'infini. La directrice de la congruence (K_{η}, Ω) est dans ce cas l'*axe* du complexe.

Meder (*Alfred*). — Étude analytique des points singuliers des courbes gauches (83-144).

Ce Mémoire est un extrait d'un travail paru sous le même titre en russe en 1908. Il a pour but l'étude analytique des points singuliers des courbes gauches; il se sert de la classification de von Staudt qui repose sur la manière

dont se comportent le point, la tangente et le plan osculateur au voisinage du point singulier considéré. Il y a huit cas possibles, chacun étant caractérisé par trois des signes + ou —; le signe + indique qu'on a affaire à un élément (point, tangente, plan osculateur) ordinaire, le signe — à un élément de rebroussement (une tangente de rebroussement étant entendue ici dans le sens de tangente d'inflexion, c'est-à-dire telle que l'indicatrice des tangentes présente un point de rebroussement; de même pour le plan osculateur).

L'auteur suppose qu'au voisinage du point considéré les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe sont des fonctions analytiques réelles d'une variable réelle t.

1. *Les ordres de certaines expressions.* — Si une fonction analytique w de t admet pour $t = t_0$ un zéro d'ordre α, ou un pôle d'ordre β, l'auteur désigne par le symbole

$$\text{Ord.}[w]$$

le nombre α ou $-\beta$; sinon $\text{Ord.}[w] = 0$. Il rappelle les théorèmes classiques sur l'ordre d'un produit, d'un quotient, etc. Enfin il désigne par $\text{Ord.}[u, v, w]$ le plus petit des ordres de u, v, w.

Si x, y, z sont les coordonnées d'un point d'une courbe et si l'on pose

$$A = y'z'' - z'y'', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x'', \quad \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

l'auteur pose

$$\text{Ord.}[x', y', z'] = n, \qquad \text{Ord.}[A, B, C] = m, \qquad \text{Ord.}[\Delta] = p.$$

Si l'on a $n \geq 0$, on a en même temps

$$m = 2n, \qquad p = 3n = m + n.$$

Il existe des théorèmes simples sur les ordres des expressions telles que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C, \qquad \ldots,$$

où α, β, γ sont des constantes. Par exemple si le plan E défini par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

ne passe pas par le point considéré P_0, on a

$$\text{Ord.}[\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta] = 0;$$

si le plan E passe par P_0 mais ne contient pas la tangente en P_0, on a

$$\text{Ord.}[\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta] = n = 1;$$

si le plan E contient la tangente, mais ne se confond pas avec le plan osculateur en P_0, on a

$$\text{Ord.}[\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta] = m = n = 2;$$

si enfin le plan E se confond avec le plan osculateur en P_0, on a

$$\text{Ord.}[\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta] = p = m = 3.$$

2. *Critères pour les huit espèces de points.* — Un point situé à distance finie est un point ordinaire ou de rebroussement, suivant que Ord.$[x, y, z]$ est pair ou impair; sa tangente est une tangente ordinaire ou de rebroussement suivant que Ord.$[A, B, C]$ est pair ou impair; son plan osculateur est ordinaire ou de rebroussement suivant que Ord.$[x, y, z]$ et Ord.$[\Delta]$ sont de même parité ou non.

Un point H_0 à l'infini peut toujours être ramené à distance finie P_0 par une transformation homographique; à H_0 correspondent des quantités ξ', η', ζ', A', B', C', D' analogues à x, y, z, A, B, C, Δ. Soient alors n, m, p les nombres entiers caractéristiques du point P_0. Trois cas peuvent se présenter, suivant que la courbe a en H_0 une tangente asymptotique, ou bien la courbe n'admet pas de tangente asymptotique mais admet un plan osculateur asymptote, ou enfin le plan osculateur est rejeté à l'infini. Suivant ces trois cas on a

Ord.$[\xi', \eta', \zeta']$	$= n - 1$,	$= m - n - 1$,	$p = m - 1$;
Ord.$[A', B', C']$	$= m - 3n - 3$,	$= p - m - 3n - 6$,	$= p - 2m - n - 8$;
Ord.$[D']$	$= p - 4n - 4$,	$= p - 4m - 4n - 8$,	$= 3p - 4m - 12$.

On voit aussi que l'une au moins des trois quantités ξ', η', ζ' devient infinie dans tous les cas; l'une des quantités A', B', C' devient sûrement infinie dans les deux derniers cas; la quantité D' devient sûrement infinie dans le dernier cas.

3. *Arc, angles de contingence et de torsion, courbure, torsion et courbure sphérique.* — Soient s', τ, ω les dérivées par rapport à t de l'arc, de l'angle de contingence et de l'angle de torsion; soient R, T, ρ la courbure, la torsion et la courbure sphérique. Toutes ces quantités sont supposées varier d'une manière continue et, quand elles s'annulent, elles changent de signe ou non suivant que leur ordre est impair ou pair.

Cela étant, suivant les quatre cas possibles où le point P_0 est à distance finie ou bien à l'infini, les formules suivantes :

Ord.$[s']$	$= n$,	$= n - 1$,	$= m - n - 1$,	$= p - m - 1$;
Ord.$[\tau]$	$= m - n$,	$= m - n - 1$,	$= n$,	$= n$;
Ord.$[\omega]$	$= p - 2m - n$,	$= p - 2m - n$,	$= p - m - n - 1$,	$= m - 2n$,
Ord.$[R]$	$= 2m - 3n$,	$= m - 3$,	$= m - 3$,	$= p - m - n - 4$;
Ord.$[T]$	$= -p + 2m$,	$= p - 2m - n - 1$,	$= p - 2n - 3$,	$= p - 2n - 4$;
Ord.$[\rho]$	$= \star$,	$= p - m - n - 4$,	$= p - n - 3$,	$= p - n - 5$.

Dans le cas où le point P_0 est à distance finie, l'ordre de ρ est égal à

$$-p + m - 2n - 1$$

si R est infiniment petit ou infiniment grand, sinon il est égal au plus petit des nombres 0 et $-p + 2m - n + \gamma$, où γ désigne l'ordre de R'.

4. *Projection de la courbe sur un plan et surface développable engendrée par les tangentes de la courbe.* — Si la courbe est projetée sur un plan fixe et si P_0' désigne la projection à distance finie du point P_0 situé aussi à distance finie, quatre cas sont possibles : ou bien le centre de projection n'est pas dans le plan osculateur de P_0; ou bien le centre de projection est dans le plan oscu-

lateur sans être sur la tangente de P_0; ou bien le centre de projection est sur la tangente de P_0 sans coïncider avec P_0; ou bien le centre de projection est P_0. Dans ces quatre cas on a

$$\text{Ord.}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] \quad n, \quad n, \quad m \quad n+1, \quad m-2n;$$

$$\text{Ord.}[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \quad m, \quad p \quad m \quad n+1, \quad p \quad n+2, \quad p-3n.$$

Ces formules permettent de déduire la nature du point singulier P_0 de celle de P_2 et les conclusions ainsi obtenues sont valables si un ou deux des points P', et $\overline{P}_0$ sont à l'infini.

On peut de même considérer une section plane de la développable engendrée par les tangentes de la courbe donnée. Le plan sécant peut, ou bien ne pas passer par P_0; ou bien passer par P_0 sans contenir la tangente en P_0; ou bien contenir la tangente en P_0 sans se confondre avec le plan osculateur; ou bien se confondre avec le plan osculateur. Dans chacun de ces cas les nombres caractéristiques du point de la section plane qui correspond à P_0 sont donnés par les formules

$$\text{Ord.}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] \quad m+2n, \quad m-n+1, \quad n, \quad n;$$

$$\text{Ord.}[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \quad p-3n, \quad p-n+2, \quad p+m-n+1, \quad m.$$

On remarquera l'identité deux à deux des quatre suites de nombres indiqués dans ce paragraphe.

5. *Arête de rebroussement de la surface polaire et trajectoire orthogonale du plan osculateur.* — L'auteur donne un Tableau permettant dans chaque cas de déduire la nature du point singulier P_0 qui décrit l'arête de rebroussement de la surface polaire de la nature du point P_0 correspondant. Signalons en particulier les propriétés suivantes :

Si P_0 et P_2 sont tous les deux à distance finie, et si P_2 n'est pas sur la normale principale à la courbe donnée en P_0, le point P_0 est un point de rebroussement dans le cas et dans le cas seulement où le rayon de la sphère osculatrice en P_0 passe par un extrémum.

Pour que l'arête de rebroussement de la surface polaire ait sa torsion changée de signe il faut et il suffit que des conditions suivantes une seule soit réalisée ou toutes les trois soient réalisées : 1° la valeur absolue du rayon de la sphère osculatrice passe par un extrémum ; 2° la valeur absolue du rayon de courbure passe par un extrémum ; 3° la courbe donnée change le signe de sa torsion.

La torsion de l'arête de rebroussement de la surface polaire en P_0 a le même sens que la torsion de la courbe donnée en P_0 si au point P_0 le rayon de la sphère osculatrice et le rayon de courbure croissent ou décroissent simultanément en valeur absolue; elles ont des sens différents si l'un des rayons croît en valeur absolue pendant que l'autre décroît.

L'auteur énonce des résultats analogues, accompagnés d'un Tableau, pour la trajectoire orthogonale des plans osculateurs de la courbe (Planevolvente). En particulier pour que la tangente à cette trajectoire soit de rebroussement, il faut et il suffit que le plan osculateur de la courbe donnée soit de rebroussement, et inversement.

6. *Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* — Si le point P_0, ainsi que le point correspondant $\overline{P}_0$ de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, est à distance finie, ce dernier est un point de rebroussement dans le cas et dans le cas seulement où des trois conditions suivantes une seule est réalisée ou les trois sont réalisées : 1° Le point $\overline{P}$ est un point de rebroussement ; 2° la valeur absolue de la distance de $\overline{P}$ à la tangente au point correspondant P passe par un extremum en P_0 ; 3° le cosinus de l'angle de la droite rectifiante avec la tangente correspondante à la courbe donnée passe par un extremum.

Pour que l'arête de rebroussement de la surface rectifiante change le signe de sa torsion, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes, ou une seule d'entre elles, soient réalisées : 1° la valeur absolue de la distance de $\overline{P}$ à la tangente en P passe par un extremum ; 2° la valeur absolue du sinus de l'angle de la droite rectifiante avec la tangente en P passe par un extremum ; la courbe donnée change en P_0 le signe de sa torsion.

7. *Développée et développante.* — Supposons que le point P_0 est à distance finie ainsi que le point correspondant P'_0 d'une développée ; soit de plus P'_0 le point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface polaire. Si la tangente en P'_0 ne coïncide pas avec la binormale de P_0, pour que le point P'_0 soit de rebroussement, il faut et il suffit que le point $\overline{P}_0$ dans le cas d'un plan osculateur ordinaire en P_0, passe d'un côté à l'autre de $\overline{\overline{P}}_0$ sur la génératrice de la surface polaire, il faut et il suffit dans le cas d'un plan osculateur de rebroussement, que le point $\overline{P}$ reste du même côté de $\overline{\overline{P}}$.

L'auteur indique des conditions analogues pour que la tangente en P'_0 ou le plan osculateur en P'_0 soit de rebroussement pour que la développée change le signe de sa torsion, pour que la torsion en P'_0 ait le même sens que la torsion en P_0. Enfin il établit deux Tableaux qui permettent, pour la développée et la développante, de déduire la nature du point de cette courbe de la nature du point correspondant de la courbe donnée.

Neuendorff (*R.*). — Sur la théorie des courbes tracées sur une surface et tangentes en chaque point à la polaire de l'un des points cycliques par rapport à l'indicatrice. (145-165).

Il convient d'appeler *cyclopolaires* (Kreispunktpolarkurven) les courbes en question ; elles sont conjuguées des courbes minima de la surface. En désignant par E, F, G les coefficients du ds^2 de la surface, par L, M, N les quantités D, D', D'' de Gauss, l'équation différentielle des courbes cyclopolaires est

$$dv^2(G(EM - FM)) - 2du\,dv\,[GLM - FLN - EM^2 + EMN] - du^2(GM^2 - 2FMN + EN^2) = 0.$$

Si les courbes cyclopolaires sont les courbes coordonnées on a

$$\frac{E}{L} = \frac{G}{N} = \frac{2FM}{LN - M^2} = R_1 R_2,$$

en désignant par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux

L'auteur rappelle les propriétés déja obtenues de ces courbes. Leurs représentations sphériques sont les courbes minima de la sphère; l'angle de deux normales à la surface en deux points infiniment voisins d'une de ces courbes est infiniment petit par rapport à l'arc de la courbe; les rayons de courbure normale de deux courbes cyclopolaires qui passent par un point sont égaux entre eux et à la somme $R_1 + R_2$; ces deux courbes ont des torsions géodésiques égales et de signes contraires.

L'auteur se propose dans cet article de déterminer les surfaces sur lesquelles les courbes cyclopolaires sont équidistantes et celles pour lesquelles elles sont géodésiques.

II. Les deux premières équations fondamentales de la théorie des surfaces prennent, lorsque les courbes cyclopolaires sont prises pour courbes coordonnées, la forme

$$\frac{1}{M}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial \log R_1 - R_2}{\partial u}, \qquad \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial \log R_1 - R_2}{\partial v}.$$

III. Si les courbes cyclopolaires sont équidistantes, on peut supposer

$$E = G = 1.$$

En posant $R_1 - R_2 = \lambda$, on a $L = N = \frac{1}{\lambda}$, avec

$$-\frac{1}{M}\frac{\lambda_v}{\lambda} = \lambda_u, \qquad \frac{1}{M}\frac{\lambda_u}{\lambda} = \lambda_v.$$

On déduit immédiatement de là que λ est constant, c'est-à-dire que la somme des rayons de courbure principaux est constante. Dans ce cas les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes cyclopolaires s'intègrent par des quadratures.

IV. Supposons maintenant la surface rapportée à ses lignes de courbure. La condition que les lignes cyclopolaires soient géodésiques s'exprime par les équations

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{LG\sqrt{G}}{\sqrt{EN - GL}} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\frac{NE\sqrt{E}}{\sqrt{LN - GL}} = 0.$$

Si l'on fait abstraction des sphères, des surfaces développables et des surfaces minima, on déduit de là

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \varphi(u), \qquad \frac{R_2}{R_1 - R_2} = \psi(v).$$

L'une des fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(v)$ doit se réduire à une constante, soit

$$\psi(v) = \frac{1}{a}.$$

On a alors $\sqrt{E} = f(u)$ et en posant

$$\tau = aR_1 + 1$$

on peut tout exprimer en fonction de τ et de v. On a ainsi

$$R_1 = \frac{\tau + 1}{a}, \qquad R_2 = \frac{\tau - 1}{a}, \qquad \sqrt{E} = f(\tau), \qquad \sqrt{G} = g(v)\sqrt{\frac{\tau - 1}{a}}.$$

L'application de la troisième équation fondamentale donne enfin

$$E = \frac{\sigma}{a(\sigma - 1)\left[\alpha(\sigma - 1) - 2a\right]},$$

et l'on peut mettre le ds^2 de la surface sous la forme

$$ds^2 = \frac{\sigma^2}{a(\sigma - 1)\left[\alpha(\sigma - 1) - 2a\right]}\,d\sigma^2 + \frac{\sigma^2 - 1}{a}\,dv^2.$$

Les surfaces cherchées sont donc de révolution.

Si l'on désigne par u, v, z les coordonnées semi-polaires d'un point dans l'espace, on trouve facilement, pour une de ces surfaces de révolution,

$$u = \frac{\sqrt{\sigma - 1}}{\sqrt{ab}} \qquad (b = a - \alpha),$$

$$z = \int \frac{\sigma\,d\sigma}{\sqrt{b}\sqrt{(b - a)\sigma^2 + 2b\sigma - b - a}}.$$

La discussion de la forme de cette surface comporte trois cas :

1° $b = a$. On a dans ce cas la surface dont l'équation est

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3a}\sqrt{1 - \sqrt{1 + a^2u^2}}\left(\sqrt{1 + a^2u^2} - 2\right).$$

L'origine est un point isolé de la surface. Les lignes cyclopolaires sont données par l'équation

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{2 + \sqrt{2\left(\sqrt{1 + a^2u^2} - 1\right)}}{\sqrt{1 + a^2u^2} - 1} + \frac{1}{2}\right] = iv = \text{const.}$$

2° $b = a$. On a un parallèle minimum pour $\sigma = 1$ ou $u = 0$. L'équation de la surface est

$$z = \frac{1}{\sqrt{b(b - a)}}\left[\frac{b}{b - a}\log\frac{1}{a}\left(b - a\right)\sqrt{1 + abu^2}\right.$$
$$\left. - b - (b - a)\sqrt{\left(1 - \sqrt{1 + abu^2}\right)\left(\frac{b - a}{b - a} + \sqrt{1 + abu^2}\right)}\right.$$
$$\left. - \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 + abu^2}\right)\left(\frac{a - b}{a - b} - \sqrt{1 + abu^2}\right)}\right].$$

Dans cette formule b est toujours positif. Il n'y a pas de surface réelle correspondant à $a = 0$. L'origine est encore un point isolé de la surface. L'équation des lignes cyclopolaires est

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{2 + \sqrt{a(b - a)u^2 - 2 + 2\sqrt{1 + abu^2}}}{\sqrt{1 + abu^2} - 1} + \frac{2b - a}{2b}\right] = iv = \text{const.}$$

3° $b = a$. La surface possède un parallèle minimum pour $\sigma = 1$ ou $u = 0$ et un parallèle maximum pour $\sigma = \frac{a + b}{a - b}$ ou $u = \frac{2}{a - b}$. L'équation de la surface

est

$$z = \frac{1}{\sqrt{b+a}} - \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a-b}}\left(\arcsin\frac{(a+b)\sqrt{1+abu^2}-b}{a} - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{(1-\sqrt{1+abu^2})\left[(a+b)+(a-b)\sqrt{1+abu^2}\right]}{a-b}}\Bigg\}.$$

Le rayon vecteur u reste inférieur à $\frac{1}{a-b}$. L'équation des lignes cyclopolaires est la même que plus haut.

Steinitz (*Ernst*). — Théorie algébrique des corps. (167-309).

Cet important Mémoire a pour principal objet d'arriver à une vue d'ensemble sur tous les types possibles de *corps* et sur leurs relations mutuelles. Le mot *corps* doit s'entendre ici d'une manière abstraite comme signifiant un système d'éléments sur lesquels on a défini deux opérations, l'addition et la multiplication, ces opérations étant toutes les deux commutatives et associatives, liées par la loi de distribution, et admettant des opérations inverses d'une manière unique. Dans ce Mémoire, la nature des éléments du corps n'entre nullement en considération, non plus que les distinctions arithmétiques entre nombres entiers et fractionnaires.

L'auteur part de la considération des corps les plus simples et porte son attention sur les méthodes par lesquelles un corps donné est *prolongé* en un autre qui le contient. Il arrive ainsi à la notion de *corps premier* : chaque corps contient un corps premier et un seul, qui est ou bien du type du corps des nombres rationnels (caractéristique o), ou bien du type du système des classes de restes par rapport à un module premier p (caractéristique p). Dans un certain nombre de questions il y a des différences essentielles entre les corps de caractéristique o et ceux de caractéristique p. Quant aux prolongements d'un corps, il y a à distinguer les prolongements *simples* qu'on obtient par l'adjonction d'un seul élément ; les prolongements *algébriques* dont tous les éléments satisfont à une équation algébrique à coefficients appartenant au corps primitif; les prolongements *transcendants*. Parmi les prolongements algébriques les uns sont finis, les autres infinis.

La théorie classique de Galois, relative aux prolongements algébriques finis, ne s'étend pas complètement à tous les corps. Une grande partie de cette théorie repose en effet sur le théorème que toute équation irréductible a ses racines simples. Or, pour certains corps, dont la caractéristique est un nombre premier p, et que l'auteur appelle *incomplets*, ce théorème est faux : ce sont ceux pour lesquels l'extraction des racines $p^{\text{ièmes}}$ n'est pas toujours possible sans adjonction d'éléments nouveaux. L'auteur est arrivé, sur ces corps incomplets, à des propositions très importantes.

Est-il possible de prolonger un corps donné de manière que *toute* fonction rationnelle entière dans ce corps devienne décomposable en un produit de facteurs linéaires? Ce problème est facile à résoudre quand il ne s'agit que de rendre décomposable un nombre *fini* de fonctions rationnelles entières : on peut alors se servir par exemple des systèmes de modules de Kronecker. Le problème général, en restant à ce point de vue, exigerait l'emploi d'un système de modules à une infinité de variables. L'auteur le résout en se servant du théorème de Zermelo d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné; la démonstration du théorème d'après lequel le prolongement minimum n'est

possible essentiellement que d'une manière fait intervenir l'axiome discuté du choix (Auswahl-prinzip).

Enfin l'auteur, en se servant encore du théorème sur les ensembles bien ordonnés, démontre que tout prolongement d'un corps peut être obtenu par un prolongement *purement transcendant* (adjonction d'indéterminées en nombre fini ou infini) suivi d'un prolongement *algébrique*. On a ainsi, en partant d'un corps premier quelconque, le moyen théorique d'arriver au corps le plus général.

I. Principes fondamentaux. — 1. *Systèmes à double composition. Isomorphisme. Corps.* — Un système d'éléments est dit à double composition si l'on a défini sur les éléments de ce système deux opérations, l'*addition* et la *multiplication*. Deux systèmes à double composition sont *isomorphes* ou appartiennent au même *type* si l'on peut établir entre leurs éléments une correspondance univoque telle qu'à la somme et au produit de deux éléments quelconques du premier système correspondant la somme et le produit des éléments correspondants du second système.

Un *corps* ou *domaine de rationalité* est un système à double composition satisfaisant aux 7 conditions suivantes

1° L'addition est associative;
2° L'addition est commutative;
3° La multiplication est associative;
4° La multiplication est commutative;
5° La multiplication est distributive par rapport à l'addition;
6° La soustraction est toujours possible et d'une seule manière;
7° La division est toujours possible et d'une seule manière.

Une seule restriction est à faire relativement à la septième condition; le diviseur ne doit pas être l'élément 0, qui jouit de la propriété que, ajouté à tout élément a, il reproduit cet élément. Le corps contient un élément et un seul 1 (unité), jouissant de la propriété que, multiplié par un élément quelconque, il reproduit cet élément. On a enfin

$$a \cdot 0 = 0,$$

et un produit de facteurs ne peut être 0 que si l'un des facteurs est 0.

Il existe des corps à un nombre *fini* d'éléments : il suffit de considérer comme élément l'ensemble des entiers congrus entre eux par rapport à un module premier p.

2. *Diviseurs, prolongement, adjonction.* — L'auteur définit les corps diviseurs d'un corps donné, les corps prolongements d'un corps donné. Si S est un système quelconque de diviseurs d'un corps donné $\mathfrak{K}$, il existe en $\mathfrak{K}$ des éléments (par exemple 0 et 1) qui appartiennent à tous les corps de S; l'ensemble de ces éléments constitue un corps qui est l'*intersection* du système de corps S.

Si $\mathfrak{O}$ est un système de corps jouissant de la propriété que deux corps quelconques $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{O}$ appartiennent toujours à un corps au moins $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{O}$, il existe un corps déterminé $\mathfrak{K}$ ne faisant pas nécessairement partie de $\mathfrak{O}$ tel que tous les corps du système sont des diviseurs de $\mathfrak{K}$ et qui ne contient pas d'autres éléments que ceux des corps de $\mathfrak{O}$.

Si le corps $\mathfrak{K}$ est contenu dans le corps $\mathfrak{L}$ et si S est un système quelconque

d'éléments de $\mathcal{L}$, l'intersection des corps contenus entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ et qui contiennent tous les éléments de $\mathcal{S}$ est un corps $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ qui est dit résulter de $\mathcal{K}$ par l'*adjonction* des éléments de $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est un système infini, chaque élément du corps $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ appartient à un corps qu'on peut déduire de $\mathcal{K}$ par l'adjonction d'un nombre *fini* d'éléments de $\mathcal{S}$.

3. *Domaines d'intégrité.* — Un domaine d'intégrité est un système à double composition qui satisfait aux conditions 1°-6° du paragraphe 1, qui possède, outre l'élément o, une unité ε et une seule et dans lequel le produit de deux éléments différents de o est différent de o. Tout corps est un domaine d'intégrité, mais la réciproque n'est pas vraie. Si l'on adjoint à un domaine d'intégrité $\mathfrak{I}$ un système d'éléments $\mathcal{S}$, on obtient un nouveau domaine d'intégrité $\mathfrak{I}[\mathcal{S}]$.

On peut toujours prolonger un domaine d'intégrité de manière à obtenir un corps : il suffit d'adjoindre les quotients (formels) des éléments du domaine d'intégrité et de définir d'une manière convenable l'égalité, la somme et le produit de ces nouveaux éléments.

4. *Corps premiers. Caractéristique.* — Un corps est dit *premier* s'il n'admet pas de diviseur. *Tout corps admet comme diviseur un corps premier et un seul.* Tout diviseur du corps admet en effet, outre o, l'unité ε et ses multiples entiers :

$$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad \ldots; \quad o + \varepsilon = -\varepsilon, \quad -2\varepsilon = -3\varepsilon, \quad \ldots$$

et de plus les quotients de ces éléments. Cela étant deux cas sont possibles :

1° Si tous les multiples entiers de ε sont distincts, le corps donné, ainsi que chacun de ses diviseurs, contient un corps isomorphe au corps des nombres rationnels; c'est un corps premier;

2° S'il y a des multiples entiers de ε qui sont nuls et si p est le plus petit nombre naturel pour lequel $p\varepsilon = o$, p est un nombre premier; les éléments o, ε, 2ε, ..., $(p-1)\varepsilon$ forment un corps premier isomorphe au corps des classes de restes (mod p).

Dans le premier cas, le corps $\mathcal{K}$ est dit de caractéristique o; dans le second cas, de caractéristique p. Dans ce dernier cas, l'élément $m\alpha$, où m est un nombre naturel et α un élément du corps, est o si α est o ou si m est un multiple de p.

5. *Prolongements équivalents. Prolongements simples. Éléments algébriques et transcendants. Adjonction d'un élément transcendant. Fonctions entières et rationnelles.* — Deux prolongements $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ d'un corps $\mathcal{K}$ sont dits *équivalents* s'il existe entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ une correspondance isomorphe telle que chaque élément de $\mathcal{K}$ se corresponde à lui-même.

Un prolongement *simple* $\mathcal{L}$ est celui qui résulte de l'adjonction à $\mathcal{K}$ d'un seul élément. Tout élément α de $\mathcal{L}$ pour lequel $\mathcal{K}(\alpha) = \mathcal{L}$ est dit un élément *primitif* de $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathcal{K}$.

L'adjonction à $\mathcal{K}$ d'un élément x conduit au domaine d'intégrité $\mathcal{K}[x]$ dont chaque élément est de la forme

$$c_0 + c_1 x + c_2 x + \ldots + c_n x^n,$$

où les coefficients c sont des éléments quelconques de $\mathcal{K}$. Le corps obtenu en adjoignant les quotients des éléments de $\mathcal{K}[x]$ n'est autre que le corps $\mathcal{K}(x)$.

Si deux éléments $\Sigma a_k x^k$, $\Sigma b_k x^k$ ne peuvent être égaux que lorsque $a_k = b_k$ pour chaque valeur de k, l'élément x est dit *transcendant* par rapport à $\mathfrak{K}$; dans le cas contraire l'élément est dit *algébrique* par rapport à $\mathfrak{K}$. On peut encore dire que l'élément x est transcendant ou algébrique suivant que ses puissances

$$\varepsilon, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots, \quad x^n, \quad \ldots$$

sont *linéairement indépendantes* ou non par rapport à $\mathfrak{K}$.

Tout corps peut être prolongé par l'adjonction d'un élément transcendant x, et tous ces prolongements sont équivalents entre eux. Dans un tel prolongement les éléments ne sont autre chose que les *fonctions rationnelles* de x, à coefficients appartenant à $\mathfrak{K}$. On peut appliquer à ces fonctions rationnelles l'algorithme du plus grand diviseur. Tout élément qui n'appartient pas à $\mathfrak{K}$ est transcendant; les éléments primitifs sont les fonctions rationnelles de degré 1; chaque élément de $\mathfrak{L}$ a un degré indépendant du choix de l'élément primitif adjoint à $\mathfrak{K}$.

On peut adjoindre plusieurs fois de suite un élément transcendant; si chaque élément x_k est transcendant par rapport au corps résultant de l'adjonction des éléments précédents, chaque élément est transcendant par rapport au corps résultant de l'adjonction de tous les autres éléments.

6. *Adjonction d'un élément algébrique.* — L'auteur définit les fonctions entières $f(x)$ *réductibles* et *irréductibles* dans le corps $\mathfrak{K}$, la *congruence* de deux fonctions entières par rapport à un module $\varphi(x)$. Si $\varphi(x)$ est *irréductible*, et si l'on range dans une même *classe* toutes les fonctions entières congrues entre elles, mod $\varphi(x)$, ces classes définissent un *corps* $\mathfrak{L}$, prolongement du corps $\mathfrak{K}$. Si l'on désigne par la lettre j l'élément de ce corps constitué par la classe des fonctions congrues à x, le corps $\mathfrak{L}$ résulte de l'adjonction de j et j est un élément *algébrique* puisqu'il satisfait à l'équation $\varphi(j) = 0$. Si $\varphi(x)$ est de degré n, n est dit le degré de j par rapport à $\mathfrak{K}$. Tout élément de $\mathfrak{K}(j)$ est représentable d'une manière et d'une seule sous la forme

$$c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \ldots + c_{n-1} j^{n-1},$$

où les c sont des éléments de $\mathfrak{K}$. Tout élément de $\mathfrak{K}(j)$ est lui-même *algébrique*; tout système de plus de n éléments est linéairement dépendant par rapport à $\mathfrak{K}$.

II. Prolongements algébriques. — 7. *Notions et théorèmes fondamentaux sur les prolongements algébriques.* — Un corps $\mathfrak{L}$ est dit un *prolongement algébrique* de $\mathfrak{K}$ si chacun de ses éléments est algébrique par rapport à $\mathfrak{K}$. Un corps qui n'admet aucun prolongement algébrique est dit *algébriquement fermé*; dans un tel corps toute fonction entière se décompose en un produit de facteurs linéaires et réciproquement.

Un élément d'un corps $\mathfrak{K}$ est dit *absolument algébrique* s'il est algébrique par rapport au corps premier de $\mathfrak{K}$; un corps dont tous les éléments sont absolument algébriques est dit absolument algébrique.

Un corps $\mathfrak{L}$, prolongement d'un corps $\mathfrak{K}$, est dit *fini* et de degré n par rapport à $\mathfrak{K}$ s'il existe n éléments de $\mathfrak{L}$ linéairement indépendants par rapport à $\mathfrak{K}$ sans qu'il en existe $n+1$, on écrira

$$[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] = n.$$

Un système de n éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{L}$ constitue une *base* du corps $\mathfrak{L}$ par rapport au corps $\mathfrak{K}$.

Si $\mathfrak{L}$ est un prolongement de $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ un prolongement de $\mathfrak{L}$, pour que $\mathfrak{M}$ soit fini par rapport à $\mathfrak{K}$ il faut et il suffit que $\mathfrak{L}$ soit fini par rapport à $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{M}$ fini par rapport à $\mathfrak{L}$, et l'on a

$$|\mathfrak{M} : \mathfrak{K}| = |\mathfrak{L} : \mathfrak{K}| \cdot |\mathfrak{M} : \mathfrak{L}|.$$

Si j est algébrique de degré n par rapport à $\mathfrak{K}$, le corps $\mathfrak{K}(j)$ est de degré n par rapport à $\mathfrak{K}$. Si $\mathfrak{L}$ est un prolongement de $\mathfrak{K}$ fini et de degré n, tout élément de $\mathfrak{L}$ est par rapport à $\mathfrak{K}$ d'un degré qui est diviseur de n : le prolongement $\mathfrak{L}$ est simple s'il admet des éléments de degré n ; chacun de ces éléments est primitif, les autres sont imprimitifs.

Pour qu'un prolongement soit fini il faut et il suffit qu'il puisse l'obtenir par l'adjonction d'un nombre fini d'éléments algébriques.

8. *Décomposition d'une fonction entière quelconque en facteurs linéaires. Corps normaux et fonctions normales.* — L'auteur a déjà montré au paragraphe 6 que toute fonction entière irréductible dans un corps $\mathfrak{K}$ admet, dans un prolongement convenable, au moins une racine. Par une suite finie de tels prolongements, on peut trouver un prolongement strictement suffisant pour que la fonction entière considérée se décompose complètement en facteurs linéaires. Tous les prolongements qui satisfont à cette condition sont équivalents entre eux. De là résulte en particulier qu'on peut parler du nombre des racines simples, doubles, etc., d'une fonction entière d'un corps $\mathfrak{K}$ sans avoir besoin d'indiquer le prolongement de $\mathfrak{K}$ dans lequel ces racines existent.

Un prolongement $\mathfrak{N}$ d'un corps $\mathfrak{K}$ est dit *normal* s'il est algébrique et si de plus toute fonction entière irréductible dans $\mathfrak{K}$ qui admet dans $\mathfrak{N}$ un facteur linéaire est, en $\mathfrak{N}$, complètement décomposable en un produit de facteurs linéaires. Si le corps $\mathfrak{N}$ est normal par rapport à $\mathfrak{K}$, il est aussi normal par rapport à tout corps $\mathfrak{K}_1$ compris entre $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{N}$.

Une fonction entière $f(x)$ d'un corps $\mathfrak{K}$ est dite *normale* dans ce corps si elle est irréductible et si le corps obtenu par l'adjonction *d'une* racine de $f(x)$ est normal. Pour que $f(x)$ soit normale il faut et il suffit que l'adjonction d'une de ses racines la décompose complètement en un produit de facteurs linéaires.

Les prolongements de $\mathfrak{K}$ qui sont strictement suffisants pour décomposer une fonction entière de $\mathfrak{K}$ en un produit de facteurs linéaires appartiennent à la classe des prolongements normaux.

9. *Différentiation.* — L'auteur, en vue de la détermination du nombre des racines multiples d'une fonction entière, définit formellement la dérivée d'une fonction entière et d'une fonction rationnelle.

10. *Les degrés de multiplicité des racines d'une fonction entière. — Si la dérivée d'une fonction rationnelle $f(x)$ est identiquement nulle, cette fonction est une constante si la caractéristique du corps est 0, une fonction rationnelle de x^p, si la caractéristique est un nombre premier p.* Ce théorème est à la base de toutes les théories suivantes, dans lesquelles la caractéristique va jouer un rôle important.

Une première conséquence est la suivante : *Si $f(x)$ possède un facteur linéaire multiple d'ordre r $(r > 1)$, la dérivée $f'(x)$ admet ce facteur au*

moins $r-1$ fois; elle l'admet $r-1$ fois seulement si la caractéristique est 0 *ou si, la caractéristique étant p, r n'est pas un multiple de p, sinon $f(x)$ admet le facteur linéaire au moins r fois.*

Dans le cas de la caractéristique p, une fonction entière de x^p est la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction entière de x, et réciproquement. Plus généralement une fonction entière de x^{p^r} est la puissance $(p^r)^{\text{ème}}$ d'une fonction entière de x. Cela tient au fond à ce que, pour deux éléments quelconques de $\mathfrak{K}$, on a

$$(a+b)^{p^r} = a^{p^r} + b^{p^r}.$$

La théorie des racines égales s'étend alors, avec les modifications suivantes, à un corps quelconque $\mathfrak{K}$. Soit $f(x)$ une fonction entière mise sous la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

où $f_m(x)$ désigne le produit des facteurs linéaires, pris chacun une fois, qui entrent m fois dans $f(x)$. Alors :

1° *Si la caractéristique de $\mathfrak{K}$ est 0, chaque fonction $f_m(x)$ appartient au corps $\mathfrak{K}$ et peut être obtenue rationnellement;*

2° *Si la caractéristique de $\mathfrak{K}$ est égale à p, et si m n'est pas divisible par p, $f_m(x)$ appartient au corps $\mathfrak{K}$ et peut être obtenue rationnellement;*

3° *Si la caractéristique de $\mathfrak{K}$ est égale à p, et si p^r est la plus haute puissance de p contenue dans m, la fonction $[f_m(x)]^{p^r}$ appartient au corps $\mathfrak{K}$ et peut être obtenue rationnellement.*

11. *Corps complets et incomplets.* — Un corps $\mathfrak{K}$ est dit *complet* si toute fonction irréductible dans $\mathfrak{K}$ n'admet (dans un prolongement quelconque de $\mathfrak{K}$) que des racines *simples;* il est dit *incomplet* dans le cas contraire.

Tout corps de caractéristique 0 est évidemment complet; parmi les corps de caractéristique p il y en a qui sont complets et d'autres qui sont incomplets. *Pour qu'un tel corps soit complet il faut et il suffit que tout élément du corps admette dans ce corps une racine $p^{\text{ème}}$* (cette racine $p^{\text{ème}}$, si elle existe, est d'ailleurs unique). L'exemple le plus simple d'un corps complet de caractéristique p est fourni par le corps premier de caractéristique p; car dans ce corps l'extraction de la racine $p^{\text{ème}}$ est toujours possible d'après le théorème de Fermat : $a^p - a = 0$. L'exemple le plus simple d'un corps incomplet est fourni par l'adjonction d'un élément transcendant u au corps précédent; car dans le corps prolongé la équation $x^p - u = 0$ est irréductible et admet une racine multiple d'ordre p (dans un prolongement convenablement choisi).

Parmi les théorèmes de la théorie classique de Galois qui ne s'appliquent pas sans exception à tous les corps, il y en a deux particulièrement importants, le théorème des *éléments primitifs* et le théorème des *corps intermédiaires*. Le premier exprime que tout prolongement fini est simple, le second qu'il n'y a qu'un nombre fini de corps compris entre un corps $\mathfrak{K}$ et un de ses prolongements finis [1]. La réciproque du dernier théorème est cependant vraie sans exception. On peut aussi démontrer, sans avoir à distinguer entre les corps complets et les corps incomplets, le théorème suivant, d'où résulte immédiatement le théorème des éléments primitifs pour les corps complets :

Si le corps $\mathfrak{L}$ résulte de l'adjonction à un corps $\mathfrak{K}$ d'un nombre fini d'élé-

ments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *dont chacun satisfait en* $\mathfrak{K}$ *à une équation n'admettant que des racines simples.* $\mathfrak{L}$ *est un prolongement simple de* $\mathfrak{K}$ *et l'on peut l'obtenir en adjoignant à* $\mathfrak{K}$ *un seul élément racine d'une équation n'admettant que des racines simples.*

L'auteur donne ensuite le théorème suivant qui montre que le théorème des éléments primitifs et le théorème des corps intermédiaires peuvent être tous les deux en défaut :

Si $\mathfrak{K}$ *est un corps de caractéristique* p, *si* $\mathfrak{L}$ *est un prolongement de* $\mathfrak{K}$ *tel que la puissance* p^{m} *de chaque élément de* $\mathfrak{L}$ *soit contenue dans* $\mathfrak{K}$, *mais tel que le degré de* $\mathfrak{L}$ *par rapport à* $\mathfrak{K}$ *soit supérieur à* p, *le corps* $\mathfrak{L}$ *n'est pas un prolongement simple de* $\mathfrak{K}$, *et il y a une infinité de corps entre* $\mathfrak{K}$ *et* $\mathfrak{L}$.

Les conditions de l'énoncé seront réalisées par exemple si l'on prend un corps quelconque $\mathfrak{M}$ de caractéristique p et si, t et u désignant deux éléments transcendants, on prend pour $\mathfrak{K}$ le prolongement $\mathfrak{M}(t^{p}, u^{p})$, pour $\mathfrak{L}$ le prolongement $\mathfrak{M}(t, u)$.

12. *Corps incomplets : plus petit corps complet contenant un corps incomplet et plus grand corps complet contenu dans un corps incomplet. Corps radiciaux.* — Les puissances p^{m} d'un corps $\mathfrak{K}$ de caractéristique p forment un corps $\mathfrak{K}^{p}$: ce corps se confond avec $\mathfrak{K}$ si celui-ci est complet ; sinon c'est un diviseur de $\mathfrak{K}$. Dans tous les cas on obtient une correspondance isomorphique entre $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}^{p}$ en faisant correspondre à chaque élément de $\mathfrak{K}$ sa puissance p^{m}. De là résulte en particulier que si le corps $\mathfrak{K}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments, il est complet.

Si $\mathfrak{K}$ est un corps incomplet, l'adjonction à $\mathfrak{K}$ des racines p^{m} formelles des éléments de $\mathfrak{K}$ définit un prolongement $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ dont tous les éléments sont les racines p^{m} des éléments de $\mathfrak{K}$. On définit de même le corps $\mathfrak{K}^{p^{-2}}$, $\mathfrak{K}^{p^{-3}}$, etc. Le système des corps

$$\mathfrak{K}^{p^{-n}}, \quad \mathfrak{K}^{p^{-(n-1)}}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{K}^{p^{-1}}, \quad \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{K}^{p}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{K}^{p^{n}}, \quad \ldots,$$

illimité dans les deux sens, conduit à un corps $\mathfrak{T}$ formé de tous les éléments appartenant aux corps du système, et un corps $\mathfrak{O}$ intersection des corps du système. Chacun de ces deux corps est complet : $\mathfrak{T}$ est le plus petit corps complet contenant $\mathfrak{K}$, et $\mathfrak{O}$ est le plus grand corps complet contenu dans $\mathfrak{K}$. Tout corps complet contenant $\mathfrak{K}$ admet un diviseur équivalent à $\mathfrak{T}$; tout corps complet contenu dans $\mathfrak{K}$ admet un prolongement équivalent à $\mathfrak{O}$.

Si $\mathfrak{K}$ est un corps quelconque de caractéristique p, tout élément a de $\mathfrak{K}$ détermine une suite

$$a, \quad a^{\frac{1}{p}}, \quad a^{\frac{1}{p^{2}}}, \quad \ldots, \quad a^{\frac{1}{p^{n}}}, \quad \ldots$$

qui peut se prolonger vers la gauche dans le cas où a admet dans $\mathfrak{K}$ une racine p^{m}. La suite peut être périodique et alors elle se prolonge à l'infini dans les deux sens : pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que a soit absolument algébrique : si alors n est le degré de a par rapport au corps premier de $\mathfrak{K}$, la période se compose de n éléments qui sont toutes les racines de l'équation irréductible dans le corps premier à laquelle satisfait a. Il résulte de là en particulier que *tout corps absolument algébrique est complet.*

Si $\mathfrak{L}$ est un prolongement d'un corps $\mathfrak{K}$ de caractéristique p, un élément a

de $\mathfrak{L}$ est dit élément *radical* par rapport à $\mathfrak{K}$ si, pour n suffisamment grand, a^{p^n} appartient à $\mathfrak{K}$. Le plus petit nombre $n = 0$ tel que, a^{p^n} appartienne à $\mathfrak{K}$, s'appelle l'exposant de a par rapport à $\mathfrak{K}$. Le corps $\mathfrak{L}$ est dit corps *radical* par rapport à $\mathfrak{K}$ si tous ses éléments sont radicaux. L'ensemble des éléments de $\mathfrak{L}$ qui appartiennent à l'exposant f forme un corps.

13. *Corps incomplets : prolongements algébriques de première espèce.* — Une fonction irréductible dans un corps $\mathfrak{K}$ est dite de *première espèce* si elle n'admet que des racines simples. Un élément η algébrique par rapport à $\mathfrak{K}$ est dit de *première espèce* si l'équation irréductible en $\mathfrak{K}$ à laquelle il satisfait est de première espèce. Un prolongement algébrique de $\mathfrak{K}$ est dit de *première espèce* si tous ses éléments sont de première espèce. Un corps complet n'admet que des prolongements algébriques de première espèce.

Soit $\mathfrak{K}$ un corps de caractéristique p et soit $g(x)$ une fonction irréductible en $\mathfrak{K}$, il existe un nombre entier non négatif f tel que $g(x)$ soit une fonction rationnelle entière de x^{p^f}, mais non de $x^{p^{f+1}}$. Si alors $g(x)$ est de degré np^f, l'entier n est dit le *degré réduit* de $g(x)$; l'entier f est dit l'*exposant* de la fonction $g(x)$. Les fonctions d'exposant 0 sont les fonctions de première espèce; les fonctions les plus simples d'exposant 1 sont de la forme $x^{p^f} - \alpha$. L'auteur s'occupe dans ce paragraphe des fonctions d'exposant 0. Il démontre à cet égard les deux théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois.

Tout prolongement fini de première espèce est simple.

Entre un corps $\mathfrak{K}$ et un de ses prolongements finis de première espèce $\mathfrak{L}$ il n'existe qu'un nombre fini de corps.

Le second de ces théorèmes résulte de ce que chaque corps $\mathfrak{M}$ compris entre $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ est un prolongement simple de $\mathfrak{K}$ dont un élément primitif est une fonction rationnelle entière $\varphi(j)$ d'un élément primitif j de $\mathfrak{L}$. Si l'équation irréductible $g(x) = 0$ à laquelle satisfait j admet n racines $j, j_1, \ldots, j_{n-1}$, le corps $\mathfrak{L}$ admet un groupe (groupe de Galois), qui laisse invariant chaque élément de $\mathfrak{K}$ qui est formé des n substitutions qui remplacent l'élément $f(j)$ par l'élément $f(j_k)$. Le corps $\mathfrak{M}$ est alors parfaitement déterminé par un sous-groupe de ce groupe, celui qui est formé des substitutions qui laissent invariant l'élément $\varphi(j)$; de plus deux corps qui appartiennent au même sous-groupe sont identiques. Comme le groupe n'admet qu'un nombre fini de sous-groupes, il n'y a qu'un nombre fini de corps tels que $\mathfrak{M}$.

14. *Corps incomplets : prolongements algébriques quelconques, théorème des éléments primitifs et théorème des corps intermédiaires.* — Tout prolongement algébrique $\mathfrak{L}$ d'un corps incomplet $\mathfrak{K}$ peut être obtenu en effectuant d'abord un prolongement de première espèce $\mathfrak{L}_\infty$ et en prenant un corps $\mathfrak{L}$ radical par rapport à $\mathfrak{L}_\infty$. Le corps $\mathfrak{L}_\infty$ est formé de tous les éléments de $\mathfrak{L}$ qui sont de première espèce par rapport à $\mathfrak{K}$. Si $\mathfrak{L}$ est un prolongement *fini*, le plus grand exposant f des éléments de $\mathfrak{L}$ s'appelle l'exposant de $\mathfrak{L}$; le degré n de $\mathfrak{L}_\infty$ s'appelle le *degré réduit* de $\mathfrak{L}$ par rapport à $\mathfrak{K}$. Le degré de $\mathfrak{L}$ est un multiple de np^f, le degré de tout élément de $\mathfrak{L}$ est un diviseur de np^f.

Pour que le prolongement fini de $\mathfrak{L}$ soit simple il faut et il suffit que le degré de $\mathfrak{L}$ soit exactement égal à np^f.

Si $\mathfrak{L}$ est un prolongement algébrique simple de $\mathfrak{K}$, tout corps compris entre $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ est aussi un prolongement algébrique simple de $\mathfrak{K}$; ce

théorème, dans le cas des prolongements *transcendaux* simples du corps des nombres rationnels, n'est autre que le théorème de Lüroth.

L'auteur démontre ensuite une relation remarquable entre le théorème des éléments primitifs et celui des corps intermédiaires :

Pour qu'entre un corps $\mathfrak{K}$ et un de ses prolongements $\mathfrak{L}$ il n'existe qu'un nombre fini de corps, il faut et il suffit que $\mathfrak{L}$ soit un prolongement algébrique simple de $\mathfrak{K}$.

Outre les corps complets il y a une catégorie de corps incomplets pour lesquels le théorème des éléments primitifs et celui des corps intermédiaires sont toujours vrais : elle est formée des corps $\mathfrak{K}$ de caractéristique p pour lesquels $\mathfrak{K}$ est un prolongement fini et de degré p de $\mathfrak{K}^p$. Tout autre corps incomplet admet un prolongement fini mettant les deux théorèmes en défaut.

15. *Corps finis.* — Tout corps fini $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire formé d'un nombre fini d'éléments, a pour caractéristique un nombre premier p. Si $\mathfrak{K}$ est de degré n par rapport à son corps premier, il admet p^n éléments qui sont les racines de l'équation $x^{p^n} - x = 0$; tous les corps pour lesquels p et n ont les mêmes valeurs appartiennent au même type $\mathfrak{C}_{p,n}$.

Si un corps $\mathfrak{K}$ admet un diviseur du type $\mathfrak{C}_{p,n}$ il admet un diviseur et un seul du type $\mathfrak{C}_p^d$, d désignant un diviseur quelconque de n; celui de ses diviseurs du type $\mathfrak{C}_p^n$ est formé de tous les éléments de $\mathfrak{K}$ qui sont absolument algébriques de degré n.

Tout corps fini est simple par rapport à son corps premier et ce corps premier admet par suite des fonctions irréductibles de n'importe quel degré n; le produit de toutes les fonctions irréductibles dont le degré est n ou un diviseur de n est $x^{p^n} - x$.

III. Prolongements algébriques infinis. — 16. *Les corps absolument algébriques dont la caractéristique est un nombre premier.* — L'auteur introduit les symboles

$$\prod_{i=1}^{\infty} q_i^{\alpha_i},$$

où $q_1, q_2, q_3, \ldots$ représentent les nombres premiers naturels $2, 3, 5, \ldots$ ou les exposants α sont des nombres entiers non négatifs ou ∞; il appelle un tel symbole un nombre G. On convient de dire que deux nombres G sont égaux si, quel que soit i, $\alpha_i = \lambda_i$; un nombre Gm est dit divisible par un nombre Gn si les exposants de m sont respectivement supérieurs ou égaux à ceux de n; le quotient de m par n est encore un nombre G dont les exposants sont les différences des exposants de m et de n, en convenant de poser $\infty - \alpha = \infty$. Tout système de nombres G admet un plus grand commun diviseur et un plus petit commun multiple dont on trouve facilement les exposants.

Ces notions étant admises l'auteur démontre le théorème suivant :

Tout corps absolument algébrique de caractéristique p correspond à un nombre G bien déterminé, qu'on appelle son degré; il existe toujours un corps dont le degré est un nombre G donné à l'avance, tous les corps de même degré sont équivalents.

On obtient le degré d'un corps absolument algébrique $\mathfrak{K}$ en considérant le système formé par les degrés des corps finis contenus dans $\mathfrak{K}$: tous les nombres de ce système admettent un plus petit multiple commun qui est un nombre — G et qui est par définition le degré de $\mathfrak{K}$.

Pour démontrer qu'il existe des corps de degré donné quelconque m, l'auteur forme une suite infinie d'entiers tels que chacun soit diviseur du suivant, dans chacun desquels n'entrent que des diviseurs de m et telle que tout diviseur naturel de m entre dans l'un au moins d'entre eux. A chaque nombre r_n de la suite l'auteur fait correspondre un élément j_n racine d'une équation irréductible $\varphi_{r_n}(x)$ de degré r_n et définissant un corps $\mathfrak{K}_n$ prolongement simple du corps premier $\mathfrak{P}_p$ de caractéristique p. On peut faire en sorte que chaque élément j soit une fonction entière du suivant j_{n+1}, de manière que chaque corps $\mathfrak{K}_n$ soit un diviseur du suivant $\mathfrak{K}_{n+1}$. L'ensemble des éléments appartenant à $\mathfrak{P}_p$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc., constitue un corps qui satisfait aux conditions voulues

Si m désigne un nombre G quelconque, tous les corps de degré m appartiennent au même type $\mathfrak{C}_{\infty}$. Si l'on adjoint au corps premier $\mathfrak{P}_p$ un système quelconque d'éléments algébriques, on obtient un corps absolument algébrique $\mathfrak{C}_{\infty}$ dont le degré m est égal au plus petit multiple commun des degrés des éléments du système.

Dans chaque corps $\mathfrak{C}_{\infty}$ il existe des fonctions irréductibles de degré n, sous la seule condition que n ne contienne que des facteurs premiers q dont l'exposant r dans m — Πq^r est fini.

En particulier le corps dont le degré est Πq^{∞} n'admet aucune fonction irréductible : il est algébriquement fermé.

17. *Corps algébriquement fermés.* — Ce qui précède montre que le corps P_p peut être prolongé en un corps algébriquement fermé : soit Ω_p un tel corps. L'auteur s'occupe maintenant de résoudre le même problème en partant d'un corps quelconque $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire de le prolonger en un corps algébriquement fermé. Il montre d'abord que tout prolongement algébriquement fermé de $\mathfrak{K}$ contient un prolongement algébriquement fermé *minimum* qui se distingue de tous les autres en ce qu'il est algébrique. Tout corps $\mathfrak{K}$ algébriquement fermé de caractéristique p admet ainsi un diviseur algébriquement fermé, qui est du type Ω_p : il est formé de tous les éléments absolument algébriques de $\mathfrak{K}$.

Le corps $\mathfrak{P}_0$ des nombres rationnels admet aussi un prolongement algébriquement fermé Ω_0 obtenu par l'adjonction de tous les nombres algébriques ; mais on peut arriver à ce prolongement Ω_0 sans l'intervention des nombres complexes généraux.

18. *Relations entre les systèmes de fonctions entières et les prolongements.* — Avant de démontrer l'existence d'un prolongement algébriquement fermé d'un corps quelconque donné $\mathfrak{K}$, l'auteur introduit de nouvelles notions.

Soient $\mathfrak{L}$ un prolongement d'un corps $\mathfrak{K}$, S un système fermé d'un nombre fini ou infini de fonctions entières. Si le système S est fini il y a toujours un prolongement dans lequel les fonctions se décomposent complètement. Cela étant, une fonction $\varphi(x)$ sera dite *subordonnée* au système *fini* de fonctions S si tout prolongement qui décompose complètement les fonctions du système S décompose aussi complètement $\varphi(x)$: il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que

cela ait lieu pour un prolongement particulier. Une fonction $g(x)$ sera dite subordonnée au système *infini* S si elle est subordonnée à toute partie finie de S.

Deux systèmes de fonctions seront dits *équivalents* si chacun est subordonné à l'autre.

Un système S est dit *complet* si toute fonction subordonnée à S appartient à S. Si S et S′ sont équivalents, tout prolongement $\mathcal{L}$ strictement suffisant pour décomposer complètement les fonctions de S est aussi strictement suffisant pour décomposer complètement celles de S′. Un tel prolongement $\mathfrak{T}$ est normal et toute fonction qui se décompose totalement en $\mathfrak{T}$ est subordonnée à S. L'ensemble S de toutes les fonctions qui se décomposent complètement dans un prolongement $\mathfrak{T}$ est complet et, si $\mathfrak{T}$ est normal, il est strictement suffisant pour décomposer totalement S.

Enfin tout système de fonctions S est équivalent à un système de fonctions normales.

19. *Considérations auxiliaires tirées de la théorie des ensembles.* — On vient de voir qu'à chaque prolongement normal $\mathfrak{T}$ correspond une classe de systèmes de fonctions équivalents pour la décomposition desquelles le prolongement est strictement suffisant. La démonstration de la réciproque exige le recours à la théorie des ensembles.

L'auteur rappelle les notions d'*ensemble ordonné*, de *coupure*, de *type d'ordre*, d'*ensemble bien ordonné*, de *nombres ordinaux* (de première et de deuxième espèce); il rappelle enfin le théorème de l'induction complète et le théorème de Zermelo d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné.

20. *Les premières applications.* — Un système bien ordonné $S = f_0(x)$ de fonctions entières d'un corps $\mathfrak{K}$ est dit *progressif* par rapport à $\mathfrak{K}_0$ si $f_n(x)$ ne se décompose pas complètement dans $\mathfrak{K}_n$ et si aucune des autres fonctions $f_\nu(x)$ n'est subordonnée à l'ensemble des fonctions qui la précèdent [ou au *segment* (Abschnitt) qui lui correspond dans l'ensemble bien ordonné S].

Si S est un système bien ordonné de fonctions entières de $\mathfrak{K}_0$ qui ne se décomposent pas toutes en $\mathfrak{K}_0$, le système S contient un système partiel *progressif* S′ équivalent à S.

Si $\mathfrak{L}$ est un prolongement quelconque de $\mathfrak{K}_0$, $S = (a_\nu)$ un système bien ordonné d'éléments de $\mathfrak{L}_1$ ce système est dit *progressif* si a_0 n'appartient pas à $\mathfrak{K}_0$ et si aucun des éléments a_ν n'appartient au corps obtenu par l'adjonction des éléments qui le précèdent. Tout système bien ordonné S d'éléments de $\mathfrak{L}$, tel que tous ces éléments n'appartiennent pas tous à $\mathfrak{K}_0$ peut être remplacé par un système partiel S′ *progressif* tel que l'adjonction des éléments de S′ produise le même corps que l'adjonction des éléments de S. Tout prolongement d'un corps peut être obtenu par l'adjonction d'un système *progressif* d'éléments.

On peut faire en sorte que les éléments d'un corps soient bien ordonnés, le premier élément étant o, le second ε. Si deux corps bien ordonnés appartiennent au même type d'ordre, il existe entre leurs éléments une correspondance univoque : si cette correspondance est isomorphique, les deux corps bien ordonnés seront dits *isomorphiquement semblables*.

Dans un corps bien ordonné on peut ordonner l'ensemble des fonctions entières, en convenant, étant données deux fonctions entières

$$g(x) = c_{\beta_0} + c_{\beta_1}x + c_{\beta_2}x^2 + \ldots$$
$$h(x) = c_{\alpha_0} + c_{\alpha_1}x + c_{\alpha_2}x^2 + \ldots$$

de dire que $g(x)$ est *antérieure* à $h(x)$ si h étant le plus petit indice pour lequel $g_h \neq 0$, on a $g_h \neq 0$. L'ensemble des fonctions entières se trouve ainsi *bien ordonné*.

Soient $\mathfrak{K}_1$ un prolongement algébrique simple d'un corps bien ordonné $\mathfrak{K}_0$, j un élément primitif de $\mathfrak{K}_1$. On obtiendra une *bonne ordination primitive* de $\mathfrak{K}_1$ en convenant de regarder l'élément $g(j)$ comme antérieur à l'élément $h(j)$ si, dans le corps $\mathfrak{K}_0$, la fonction $g(x)$ est antérieure à la fonction $h(x)$. Dans une telle ordination, les éléments de $\mathfrak{K}_0$ sont placés les premiers et j est le premier élément qui suit ceux de $\mathfrak{K}_0$. L'élément j est dit *élément principal* de la bonne ordination primitive.

Soit $\mathfrak{L}$ un prolongement algébrique quelconque d'un corps bien ordonné $\mathfrak{K}_0$. On dit que $\mathfrak{L}$ est *bien ordonné régulièrement* par rapport à $\mathfrak{K}_0$ si $\mathfrak{L}$ est bien ordonné de manière à satisfaire aux conditions suivantes : Le corps $\mathfrak{K}_0$ ainsi que le corps qui résulte de $\mathfrak{K}_0$ par l'adjonction d'un segment (Abschnitt) de $\mathfrak{L}$, doit être aussi un segment de $\mathfrak{L}$ (ou $\mathfrak{L}$); appelons *segments fondamentaux* les segments de $\mathfrak{L}$ ainsi obtenus; appelons *élément fondamental* correspondant l'élément immédiatement suivant; le corps résultant de l'adjonction, à un segment fondamental, de l'élément fondamental correspondant, doit avoir par rapport au segment fondamental, une bonne ordination primitive.

Si le corps $\mathfrak{L}$ est ordonné régulièrement par rapport à $\mathfrak{K}_0$, les éléments fondamentaux j_ν forment un système progressif dont l'adjonction au corps $\mathfrak{K}_0$ donne le corps $\mathfrak{L}$.

L'ordination régulière d'un corps $\mathfrak{L}$ est complètement déterminée par la bonne ordination du corps $\mathfrak{K}_0$ et le système bien ordonné $\mathfrak{J} = \{j_\nu\}$ de ses éléments fondamentaux. On peut se donner arbitrairement un système progressif $\{j_\nu\}$ d'éléments de $\mathfrak{L}$: il existe une ordination régulière de $\mathfrak{L}$ pour laquelle les éléments fondamentaux forment le système $\{j_\nu\}$.

De là résulte enfin que *tout prolongement algébrique d'un corps bien ordonné peut être ordonné régulièrement.*

21. *Le théorème fondamental des prolongements algébriques.* — Soit $\mathfrak{N}$ un prolongement algébrique du corps bien ordonné $\mathfrak{K}_0$, lui-même bien ordonné régulièrement par rapport à $\mathfrak{K}_0$. Soient $\mathfrak{J} = \{j_\nu\}$ le système des éléments fondamentaux, $\mathfrak{K}_\nu$ le *segment* de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{J}_\nu$ le *segment* de $\mathfrak{J}$ déterminé par j_ν. L'élément j_ν est racine d'une fonction irréductible $f_\nu(x)$ de $\mathfrak{K}_\nu$, ainsi que d'une fonction irréductible $z_\nu(x)$ du corps $\mathfrak{K}$: la fonction $z_\nu(x)$ est un facteur de $f_\nu(x)$. On arrive ainsi à deux systèmes de fonctions $F = \{f_\nu(x)\}$ et $\Phi = \{z_\nu(x)\}$. Les premières s'appellent *fonctions fondamentales*, les dernières *facteurs fondamentaux de la bonne ordination régulière*. Les *segments* de F et Φ seront désignés par F et Φ.

Si toutes les fonctions fondamentales sont normales le corps $\mathfrak{N}$ est lui-même normal et il est strictement suffisant pour décomposer complètement les fonctions $f_\nu(x)$. Le système F est progressif.

Dans ce corps $\mathfrak{K}_0$ on peut bien ordonner les fonctions entières; si de tous les facteurs de $f_\nu(x)$, irréductibles dans $\mathfrak{K}$, la fonction $z_\nu(x)$ est la première, on dira que l'ordination de $\mathfrak{N}$ est *normale*.

Si $\mathfrak{N}$ est un prolongement normal de $\mathfrak{K}_0$, si chaque élément j_ν du système $\mathfrak{J} = \{j_\nu\}$ est racine d'une fonction normale $f_\nu(x)$ de $\mathfrak{K}_0$ et si le système de fonctions $F = \{f_\nu(x)\}$ est progressif, on peut d'une manière et d'une seule ordonner $\mathfrak{N}$ normalement par rapport à $\mathfrak{K}_0$ de manière

que F *soit le système des fonctions fondamentales et* S *le système des éléments fondamentaux.*

Si l'on considère deux prolongements normaux et normalement ordonnés du corps bien ordonné $\mathfrak{K}_0$ *et s'il leur appartient le même système de fonctions fondamentales, ces deux prolongements sont isomorphiquement semblables.*

Si $\mathfrak{K}_0$ *est un corps bien ordonné,* $F = f_\nu(x)$ *un système progressif de fonctions normales de* $\mathfrak{K}_0$, *il existe des prolongements normaux et normalement ordonnés de* $\mathfrak{K}_0$ *avec le système fondamental* F.

De ces théorèmes résulte enfin le théorème fondamental :

Si $\mathfrak{K}_0$ *est un corps quelconque,* S *un système quelconque de fonctions entières en* $\mathfrak{K}_0$, *il existe un prolongement de* $\mathfrak{K}_0$ *strictement suffisant pour décomposer en facteurs linéaires toutes les fonctions du système* S. *Tous les prolongements qui satisfont à cette condition sont équivalents entre eux.*

La deuxième Partie de ce théorème est démontrée par l'auteur à l'aide de *l'axiome du choix* (Auswahlprinzip).

Comme cas particulier on voit que *tout corps admet un prolongement algébrique algébriquement fermé et, à l'équivalence près, un seul.*

IV. Prolongements transcendants. — 22. *Prolongements transcendants. Dépendance algébrique entre les éléments d'un prolongement.* — Un prolongement transcendant est celui qui n'est pas algébrique. Si S est un système d'éléments d'un prolongement $\mathfrak{L}$ d'un corps donné $\mathfrak{K}$, a un élément de $\mathfrak{L}$, l'élément a sera dit *algébriquement dépendant* de S, si a est algébrique par rapport au corps $\mathfrak{K}(S)$; le système S′ est dit *algébriquement dépendant* de S si chaque élément de S′ dépend algébriquement de S. Les systèmes S et S′ sont dits *équivalents* si chacun dépend algébriquement de l'autre.

Un système d'éléments S est dit *réductible* s'il est équivalent à une de ses parties ou s'il est formé d'un seul élément algébrique; dans le cas contraire il est dit *irréductible*. Chaque partie d'un système irréductible est irréductible; chaque système réductible contient un système réductible *fini*.

Le prolongement $\mathfrak{L}$ est dit *purement transcendant* s'il résulte de l'adjonction d'un système *irréductible* d'éléments. Deux prolongements purement transcendants fournis par deux systèmes irréductibles de même *puissance* sont équivalents.

Si un système irréductible $\mathfrak{X}'$ dépend algébriquement d'un système irréductible fini $\mathfrak{X}$, il ne peut pas contenir plus d'éléments que lui : s'ils ont le même nombre d'éléments, ils sont équivalents.

23. *Le degré de transcendance et la classification des corps.* — Dans ce paragraphe l'auteur fait de nouveau appel au théorème sur les ensembles bien ordonnés. Il montre d'abord que tout système S dont les éléments ne sont pas tous algébriques est équivalent à un système partiel irréductible. De là résulte le théorème fondamental :

Tout prolongement transcendant d'un corps peut être obtenu par un prolongement purement transcendant suivi d'un prolongement algébrique.

Le prolongement purement transcendant est possible d'une infinité de manières; mais *de quelque manière qu'on procède, on arrive à des pro-*

longements purement transcendants équivalents entre eux et ayant la même puissance (nombre cardinal).

Ce nombre cardinal s'appelle le *degré de transcendance de* $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathcal{K}$. Le degré de transcendance d'un prolongement algébrique est 0.

Un prolongement qui résulte de deux prolongements successifs de degrés de transcendance s et t, a le degré de transcendance $s+t$.

Le *degré de transcendance absolu* d'un corps $\mathcal{K}$ est le degré de transcendance de $\mathcal{K}$ par rapport à son corps premier. On peut ranger dans une même *classe* $K_{c,t}$ tous les corps qui ont la même caractéristique c et le même degré de transcendance absolu t. Dans la classe $K_{c,t}$ il y a deux types remarquables : le type $\mathcal{R}_{c,t}$ obtenu par un prolongement *purement* transcendant, de degré de transcendance t, du corps premier $\mathcal{P}_c$: ensuite le type $\mathcal{A}_{c,t}$ obtenu en prolongeant algébriquement $\mathcal{R}_{c,t}$ en un corps algébriquement fermé. *Le type* $\mathcal{A}_{c,t}$ *est le seul type algébriquement fermé de la classe* $\mathcal{R}_{c,t}$.

21. *Remarques complémentaires diverses.* — On peut considérer la *puissance* (Mächtigkeit) d'un corps regardé comme un ensemble d'éléments. Un corps dont le degré de transcendance absolu t est infini a pour puissance t; si le degré de transcendance absolu est fini, le corps est formé d'une infinité dénombrable d'éléments ou est fini. Tous les corps algébriquement fermés de la puissance du continu et de caractéristique 0 sont par suite isomorphes : par exemple le corps des nombres complexes, le corps des fonctions algébriques d'une ou de plusieurs variables, etc.

L'auteur a démontré (n° 14) que si $\mathcal{K}(x)$ est un prolongement algébrique simple de $\mathcal{K}$, tout corps compris entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}(x)$ est aussi un prolongement simple de $\mathcal{K}$. Le théorème de Luroth revient à dire que le théorème précédent est aussi vrai des prolongements *transcendants*. L'auteur en donne une démonstration *rationnelle* qui s'étend à tous les corps possibles, complets ou incomplets.

La démonstration donnée par l'auteur de l'existence d'un prolongement algébriquement fermé d'un corps donné repose sur le théorème d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné ; mais la recherche de ce prolongement peut, dans certains cas, être faite indépendamment de la notion d'ensemble bien ordonné. L'auteur donne, comme exemple, le corps des nombres réels ou complexes et le corps des nombres p-adiques de M. Hensel. Dans ce dernier cas, il suffit, pour obtenir un prolongement algébriquement fermé, de décomposer complètement les fonctions *entières et à coefficients entiers* qui sont *dénombrables*; on peut par suite, suivant un procédé régulier, effectuer une infinité dénombrable de prolongements successifs simples.

Un corps absolument algébrique n'est isomorphe à aucune de ses parties. Deux diviseurs d'un corps absolument algébrique, dont l'un est une partie de l'autre, ne peuvent pas être isomorphes. Si t est infini et si l'on considère un corps $\mathcal{A}_{c,t}$, l'adjonction d'un élément transcendant x donne un corps $\mathcal{A}_{c,t}(x)$ qui n'étant pas algébriquement fermé, *n'est pas isomorphe à* $\mathcal{A}_{c,t}$; mais on peut prolonger $\mathcal{A}_{c,t}(x)$ en un corps algébriquement fermé *qui est de nouveau isomorphe à* $\mathcal{A}_{c,t}$.

Jung (*Henrich-W.-E.*). — Sur le plus petit cercle qui enferme une figure plane (310-333).

Étant donnés n points dans un plan, le plus petit cercle qui contient ces

3 points à son intérieur est le cercle circonscrit au triangle qu'ils forment, si ce triangle est acutangle; c'est le cercle décrit sur le plus grand côté comme diamètre, si le triangle est obtusangle. Si l'on a n points au lieu de 3, on résout le problème pour trois des n points et l'on prend le plus grand des cercles obtenus.

Soient n points dans un plan, tels que la plus grande distance de deux d'entre eux soit égale à 1; on dit qu'on a un système de points de diamètre 1. Le plus petit cercle dans lequel on peut placer un système quelconque de points de diamètre 1 est le cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Frobenius (*G.*). — Sur le théorème de Fermat (314-316).

L'équation

$$x^p + y^p + z^p = 0,$$

où p est un nombre premier impair, ne peut admettre de solutions entières x, y, z non divisibles par p que si les 6 rapports $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{y}$ satisfont à certaines congruences établies par M. Mirimanoff. De ces congruences M. Wieferich a déduit la suivante

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

L'auteur donne une démonstration simple de cette congruence.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXIII (1).

Fredholm (*I.*) [H 9 *a*, H 10 *f*, T 2 *a*]. — Sur les équations de l'équilibre d'un corps élastique (1-42).

$$\int f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u \qquad (1)$$

où f est une forme définie, étant une équation aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants d'ordre pair (et à termes tous de même ordre de différentiation), on en recherche les intégrales homogènes de degré -1, susceptibles de jouer le même rôle que $\frac{1}{r}$ joue vis-à-vis de l'équation de Laplace.

I. — 1. *Les solutions homogènes du degré* -1 *des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* — On part de l'intégrale particulière évidente

$$u = \frac{1}{\xi x_1 - \eta x_2 - x_3} \qquad (2)$$

(1) *Voir* Bulletin II 1907, t. XXXI, p. 54.

ξ, η étant deux constantes arbitraires liées par la relation

$$(3) \qquad f(\xi, \eta, 1) = 0.$$

Cette quantité vérifiant l'équation (1) quels que soient ξ, η, dans la condition (3), il en sera de même si, considérant ξ comme variable, on l'intègre après l'avoir multipliée par $d\xi$ et par un polynome en η, $\psi(\xi, \eta)$ (et divisée comme il est classique, par $\frac{\partial f}{\partial \eta_0}$).

L'expression ainsi obtenue peut être transformée de diverses manières : d'abord en groupant ensemble les termes qui correspondent à une même valeur de ξ (η étant, au contraire, remplacé successivement par les n racines de l'équation (3)]; la somme de ces termes donne

$$\frac{\psi(\xi, \eta_0)}{x_0 f(\xi, \eta_0)},$$

η_0 étant donné en fonction de ξ par $\xi x_1 + \eta_0 x_2 - x_3 = 0$.

On intègre le long d'un contour fermé C ne renfermant pas de point singulier de ψ : on constate (à l'aide du théorème fondamental de Cauchy-Kowalevski) qu'on peut représenter sous cette forme toute intégrale homogène de degré -1.

De plus, on peut représenter la quadrature en termes finis par une somme de résidus : on trouve la formule

$$u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\psi(\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'')(k_1 \xi_1'' + k_2 \xi_2'' + k_3 \xi_3'')}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_1''}, & \frac{\partial f}{\partial \xi_2''}, & \frac{\partial f}{\partial \xi_3''} \end{vmatrix}},$$

dans laquelle ξ_1'', ξ_2'', ξ_3'' désignent successivement une quelconque des n solutions communes aux équations

$$(4) \qquad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

pendant que k_1, k_2, k_3 sont des arbitraires introduites pour la symétrie et qui s'éliminent d'elles-mêmes du résultat.

L'intégrale ainsi formée, considérée comme fonction de x, ne peut avoir de singularité que lorsque l'une des racines ξ qui correspondent aux solutions du système (4) traverse le contour C (et même, en tenant compte de la déformabilité de celui-ci, que lorsqu'une racine intérieure à C vient coïncider avec une racine extérieure). De plus, elle ne change pas par le changement simultané de x_1, x_2, x_3 ou $-x_1, -x_2, -x_3$.

2. *Le cas où $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une forme définie.* — Dans ce cas, on peut, ce qui est l'objet fondamental du travail actuel, s'arranger pour que l'intégrale u définie dans le n° précédent n'ait aucun point singulier réel, l'origine exceptée. Il suffit d'intégrer le long des valeurs réelles des ξ, en prenant pour ψ un poly-

nome de degré $n-3$ par rapport à ces lettres. On a donc ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ solutions vérifiant la solution demandée.

3. *Application à un système d'équations différentielles.* — Soit le système de trois équations du second ordre aux trois inconnues u_1, u_2, u.

$$(5)\qquad \sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\mu\lambda} u_\lambda = 0,$$

les $\Delta\lambda\mu$ désignant des symboles d'opération de la forme

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$$

où les parenthèses $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ désignent autant de coefficients constants. Chacun des u est alors solution d'une même équation du *sixième* ordre

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0,$$

où f est le déterminant

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}$$

(les différentiations étant remplacées par les produits correspondants des ξ).

On cherche les solutions telles que *chacun d'eux* soit régulier en tout point réel autre que l'origine. On en trouve *trois* [1] (au lieu de quinze, nombre de solutions indiquées au n° précédent pour $n=6$) : on les obtient en composant les polynomes φ avec les mineurs du déterminant (6).

Soit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ une telle solution, c'est-à-dire une combinaison linéaire quelconque des trois précédentes.

On écrit les solutions analogues pour le système adjoint (lequel se déduit du premier en intervertissant, dans chaque Δ, les indices λ et μ).

II. La méthode de Green. — 1. *Démonstration d'un théorème fondamental* — Formule correspondante à celle de Green pour l'équation de Laplace; cette formule représente ici le théorème de Betti.

2. *Application de la méthode de Green aux systèmes*

$$\Sigma \Delta_{\lambda\mu} u_\mu = U_\lambda, \quad \Sigma \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = V_\mu.$$

Dans la formule ainsi obtenue, on prend pour les v les valeurs

$$\zeta_\mu (x_1 - x_1'', x_2 - x_2'', x_3 - x_3'),$$

où x_1'', x_2'', x_3'' sont des nombres déterminés et $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ une solution du type défini précédemment.

---

[1] On démontre plus tard que ce sont les seules.

Il faut alors comme dans le calcul analogue de la théorie du potentiel, compléter la formule, si le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ est intérieur au volume d'intégration, par un terme de la forme

$$(7) \qquad L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0,$$

où les L sont des constantes et les u_λ les valeurs des u_λ en A. C'est ce terme qui est exprimé par une intégrale double dont l'élément est formé avec les valeurs frontières des u et celles de certaines combinaisons T, de leurs dérivées premières et des cosinus directeurs du plan tangent. Dans le cas des équations de l'élasticité, les T sont les composantes de l'effort superficiel.

Si A était extérieur au volume d'intégration, il n'y aurait pas de termes de la forme (7).

3. *Calcul des coefficients* L *et* M. — Les coefficients L qui figurent dans l'expression (7) sont des intégrales étendues à une certaine surface sphérique ω ou à n'importe quelle autre surface pouvant se ramener à ω par déformation continue sans traverser le point singulier. Pour calculer, on remplace la sphère par un cylindre indéfini ayant ses générations parallèles à l'axe des x_1, par exemple.

On obtient de même les coefficients analogues M relatifs au système adjoint.

III. Applications. — 1. *Application à la théorie de l'équilibre d'un corps solide-élastique.* — Les équations de l'équilibre d'un corps élastique primitivement homogène (quoique non isotrope) s'obtiennent en considérant les six variables auxiliaires

$$\delta_{\lambda\lambda} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\lambda}, \quad \delta_{\mu\lambda} = \delta_{\lambda\mu} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\lambda} \quad (\lambda \neq \mu)$$

et une forme quadratique définie f [1] (à coefficients constants) formée avec ces six variables. Les six dérivées $\frac{\partial f}{\partial \delta}$ représentent les six composantes de l'effort. Les équations d'équilibre sont alors de la forme (5), les $\Delta_{\lambda\mu}$ forment ici un tableau symétrique : ce sont, lorsqu'on remplace les symboles de différentiation par les ξ correspondants, les coefficients d'une forme quadratique qu'on obtiendrait en remplaçant dans la forme f, $\delta_{\lambda\lambda}$ par $x_\lambda \xi_\lambda$ et $\delta_{\lambda\mu}$ par $x_\lambda \xi_\mu - x_\mu \xi_\lambda$, puis ordonnant par rapport aux x.

Il en résulte aisément que le déterminant de ces Δ — le déterminant (6) — est une forme définie par rapport aux ξ.

2. *Développement en série.* — L'application du théorème de Betti donne, pour une solution de l'équation, des développements en série composés avec des puissances des x et de dérivées de fonctions β.

On démontre ainsi, en particulier, que les solutions β sont les seules qui soient homogènes de degré -1 et, en même temps, régulières en dehors de l'origine.

3. *Des propriétés des intégrales dans les formules fondamentales.* — Discontinuités de ces intégrales analogues aux discontinuités classiques pour les potentiels superficiels et les potentiels spatiaux.

---

[1] Cette fonction f ne correspond pas à celle qui a été désignée sous ce nom dans ce qui précède.

Les intégrales triples qui, dans la théorie actuelle, correspondent aux potentiels spatiaux, donnent la déformation d'un milieu élastique illimité, quand ce milieu n'est soumis qu'à des forces agissant sur les éléments de volume intérieurs à une certaine surface et qu'on suppose que la déformation à l'infini est nulle.

Il en résulte que les fonctions ξ elles mêmes représentent les composantes de la déformation produite dans un milieu élastique illimité par une force unique appliquée en un point déterminé (du moment que cette déformation est toujours supposée nulle à l'infini).

4. *Usage de fonctions compensatrices.* — Calcul analogue à celui qui résout le problème de Dirichlet à l'aide de la fonction de Green. Cette analogie est complète si les données du problème élastique sont les déplacements à la surface. Si l'on a donné, au contraire, les pressions superficielles, il y a une complication analogue à celle qui se présente dans la résolution (par la fonction de Neumann) du problème hydrodynamique.

Mittag-Leffler (*G.*) [D 3, 4]. — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène (première Note) (43-62).

Étant donné un développement de Taylor

$$(1) \qquad F(a) + (x-a)F'(a) + \ldots \frac{(x-a)^p}{p!} F^{(p)}(a) + \ldots$$

à cercle de convergence déterminé r, C, F_{a}, F'_{a}, ..., étant des nombres donnés, on se propose de former, pour la fonction définie par l'*élément* (1) (au sens de Weierstrass), une expression qu'on puisse former *a priori* connaissant a et les coefficients $F^{(\mu)}_{a}$, et qui, d'autre part, converge en dehors de C.

On introduit, tout d'abord, le concept géométrique de l'*étoile*. Chaque point singulier de la branche de fonction considérée est, à cet effet, joint au point origine a par un vecteur et l'on pratique dans le plan une coupure suivant le *prolongement* de ce vecteur, depuis le point singulier jusqu'à l'infini. L'étoile relative au point a et à la fonction considérée, et l'on désigne par la lettre A, la figure formée en excluant du plan toutes les coupures ainsi tracées. On pourrait, d'ailleurs, remplacer les rayons vecteurs rectilignes par des courbes définies d'une manière convenable.

Cela posé, on démontre le théorème suivant :

La fonction définie par l'élément (1) *peut toujours être représentée par une série ayant pour termes des polynomes entiers en x :*

$$G_{\alpha}(x) = \Sigma c_{\nu}^{(\mu)} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

les coefficients $c_{\nu}^{(\mu)}$ *étant choisis* a priori *indépendamment de a et de l'élément* (α).

Cette série est convergente pour chaque point de l'étoile A *et uniformément convergente pour chaque domaine intérieur* (au sens strict) *à* A.

Le problème du prolongement analytique de la série de Taylor est ainsi résolu d'une manière aussi générale que possible.

Pour démontrer ce théorème, on apprend d'abord à déduire de toute étoile E (de centre a), une suite d'étoiles E_n telles que chacune soit intérieure aux suivantes et toutes intérieures à E. E_n sera formée par l'ensemble des rayons vecteurs issus de a et de longueur (variable avec la direction) $n\rho$, où ρ est choisi de manière que tout cercle de rayons ayant son centre en un point du segment de longueur $(n-1)\rho$ pris sur le même vecteur, soit compris entièrement à l'intérieur de E.

On considère aussi les n étoiles E_q^H $(q=1, 2, \ldots, n)$ *adjointes* à E_n. Ce sont celles qu'on déduit de E_n en remplaçant ρ par $\alpha^q \rho$ $(\alpha^n = 1)$. α est une quantité indépendante de x de a et des coefficients du développement, mais qui peut dépendre de n.

Cela posé, on part de la notion classique de prolongement analytique. On trace une chaîne de cercles ayant pour centres successifs les points

$$\xi_q = a + q\frac{x-a}{n} \qquad (q=1, 2, \ldots, n)$$

dont chacun comprend le centre du suivant. Dans chacun d'eux, la fonction a un développement (suivant les puissances de $x-\xi_q$) analogue à (1) dont les coefficients se calculent à l'aide du développement qui le précède.

On limite, d'autre part, ces développements, le dernier (celui qui procède suivant les puissances de $x-\xi_{n-1}$) au terme de rang m_1, le précédent au terme de rang $m_2, \ldots$; $m_1, m_2, \ldots$ étant des entiers qu'on détermine en fonction de n et du nombre α qui a servi à former les étoiles E_q^H, à l'une desquelles on suppose que le point x est intérieur.

La limitation des développements intermédiaires entraîne évidemment une série d'erreurs, qui s'accumulent dans le calcul de la valeur de la fonction en x. Mais si $m_1, m_2, \ldots$ ont été choisis d'une façon convenable et si l'on a pris, de même, pour α, une fonction convenable de n, on constate que l'erreur totale a une limite supérieure qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut, en prenant n suffisamment grand.

Autrement dit, la fonction est représentée en x (et, par conséquent, dans toute une étoile E) d'une manière aussi approchée qu'on le veut par un polynome $G_n(x)$ formé de la manière qui vient d'être indiquée.

Ce résultat est visiblement équivalent à celui qu'il fallait établir.

Kœnigsberger (*L.*) [R 6 *b*]. — Sur les principes de la Mécanique (Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler, traduit de l'allemand par L. Laugel) (63-80).

« L'établissement de la loi de Weber sur l'action entre points matériels électrisés avait exigé l'introduction de forces qui dépendent, non seulement de la situation des points, mais encore de leurs vitesses et de leurs accélérations, et Kirchhoff, Hertz et autres ont, à maintes reprises, admis la possibilité de forces définies par des fonctions des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque prises par rapport au temps. C'est précisément la loi de Weber qui, dans l'étude du potentiel cinétique, défini par l'expression $H = T - U$, où T désigne la force vive de la matière pondérable et U la fonction des forces (ces mots pris dans leur sens habituel en Mécanique) a conduit G. Neumann à soulever la question de savoir comment doit être formé U au moyen des coordonnées et

de leurs dérivées premières, quand on admet que le principe de Hamilton reste valable. Une méthode de nature essentiellement différente et d'une portée très grande en principe est celle, introduite en Mécanique par Helmholtz, du traitement du potentiel cinétique, méthode qui... fournit la fonction fondamentale qui a été l'origine de la théorie des mouvements cachés établis par Helmholtz et reprise par Hertz ».

L'auteur généralise la théorie de G. Neumann en l'étendant à des potentiels cinétiques qui contiennent des dérivées d'ordre quelconque.

Il expose successivement, relativement à de tels potentiels, après les premières transformations de calcul, les équations de Lagrange sous leurs deux formes (l'une correspondant au cas où l'on écrit les équations de liaison entre les coordonnées, l'autre à celui où l'on exprime celles-ci en fonction de paramètres indépendants); il obtient l'équation qui correspond au théorème des forces vives, celle qui correspond au principe de la moindre contrainte de Gauss, et même deux formules desquelles dérivent les principes des aires et du mouvement du centre de gravité. Il généralise également les théorèmes donnés par Helmholtz dans son travail *Die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung*.

Il détermine ensuite, pour le cas où il n'entre que des dérivées premières, toutes les formes du potentiel cinétique pour lesquelles existent des coordonnées *cycliques* analogues à celles qui donnent les mouvements cachés des théories de Helmholtz et Hertz. De ce nombre est un problème remarquablement simple relatif au mouvement de trois points.

Il étend enfin à sa forme généralisée du potentiel cinétique les équations canoniques et l'équation aux dérivées partielles de Hamilton

Kœnigsberger (*L.*) [R 5, 6]. — Sur les principes de la Mécanique (Extrait d'une seconde lettre adressée à M. Mittag-Leffler (81-85).

Si un potentiel généralisé dépend de la distance r d'un point mobile à un point fixe ainsi que des dérivées de cette distance par rapport au temps, il vérifie, si on le considère comme fonction des coordonnées cartésiennes et de leurs dérivées, une équation aux dérivées partielles qui rappelle par sa forme celle de Laplace.

Généralisation à des intégrales portant sur des expressions de cette espèce de l'équation de Poisson (théorie du potentiel).

Petersen (*J.*) [D 4 *b*]. — Quelques remarques sur les fonctions entières (85-90).

Formule

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\log R}{dr}\, r\,d\theta = n$$

donnant le nombre n des zéros d'une fonction entière situés à l'intérieur d'une circonférence donnée de rayon r ayant pour centre l'origine.

Formule

$$\log\frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{R}{R_0}\,d\theta$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les modules des zéros en question, laquelle avait été antérieurement obtenue par M. Jensen.

Démonstration nouvelle de la limitation de la croissance d'une fonction entière ou fonction de celle de ses zéros, en considérant d'abord le cas d'un genre nul et étendant ensuite au cas d'un genre fini quelconque.

Formule analogue donnant la somme des puissances semblables des inverses des nombres α.

Vahlen (*K.-Th.*) [A 3 *b*]. — Sur les systèmes fondamentaux de fonctions symétriques (91-120).

I. Les fonctions symétriques des n racines $x_1, \ldots, x_n$ d'une équation algébrique peuvent s'exprimer en fonction rationnelle des coefficients $a_1, \ldots, a_n$. Mais ces derniers peuvent aussi s'exprimer en fonction rationnelle (et même entière) des n premières sommes $s_1, \ldots, s_n$ des puissances des racines.

L'auteur déduit tout d'abord cette proposition classique de l'identité

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \prod_k (1 - x_k z) = e^{-S_1 z + \frac{S_2 z^2}{1} - \frac{S_3 z^3}{2} \cdots}$$

Il l'énonce ainsi : *les sommes $s_1, s_2, \ldots, s_n$ forment un système fondamental pour les fonctions symétriques des racines.*

II. A l'aide de la formule d'addition des tangentes hyperboliques, et d'un développement en fraction continue qu'il en déduit pour la fonction

$$(1) \qquad \operatorname{tangh}\left(s_1 z + \frac{s_3 z^3}{3} + \frac{s_5 z^5}{5} + \ldots\right),$$

l'auteur démontre ce théorème (déjà obtenu par Borchhardt) que *les n premières sommes $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ d'indice impair forment aussi un système fondamental*, en fonction duquel les coefficients peuvent encore s'exprimer sous forme rationnelle (quoique, cette fois, non entière), de sorte qu'il en est de même de toutes les autres fonctions rationnelles symétriques des racines.

En particulier, s_{2n-1} est une fonction rationnelle $\frac{Q_n}{P_n}$ de $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$. En désignant par R_{n+1} le polynome $P_n s_{2n-1} - Q_n$ (où l'on a supposé la fraction $\frac{Q_n}{P_n}$ réduite à sa plus simple expression), on constate que l'expression des coefficients a et le développement en fonction continue de l'expression (1) se déduisent aisément de ces quantités R_n.

III. On généralise les considérations précédentes en introduisant $\nu - 1$ fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$ analogues à l'arc tang, et définies par la relation

$$z\varphi_1(z) + z\varphi_2(z) + \ldots + z^{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(z) = \log \frac{1 - z^\nu}{\sqrt[\nu]{1 - z^\nu}}$$

où z désigne successivement chacune des racines $\nu^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On arrive ainsi à montrer que *les sommes de puissances semblables à exposants non divisibles par un entier donné ν sont aussi telles que les n premières d'entre elles forment un système fondamental.* On forme, dans ces

nouvelles conditions, des quantités R_{μ} analogues aux précédentes et auxquelles on généralise la théorie précédemment établie.

Hessenberg (*G.*) [O 6 *k*]. — Sur les invariants des formes différentielles binaires, linéaires et quadratiques, et leur application à la déformation des surfaces (121-170).

Exposition des principes de géométrie différentielle relatifs à la déformation des surfaces et, en particulier, des résultats de M. Weingarten, basée sur l'emploi exclusif d'expressions invariantes par changement du système de coordonnées curvilignes.

Les Chapitres I-IV sont consacrés aux procédés de calcul qui doivent être employés dans la suite.

I. Variables *cogrédientes* (c'est-à-dire transformées par la même substitution linéaire) ou *contragrédientes* (transformées par des substitutions inverses). Si la forme quadratique $A = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ est un invariant (absolu, comme le sont tous les invariants considérés comme tels dans le Mémoire actuel), les dérivées $\frac{\partial A}{\partial x_k}$ forment un système contragrédient aux x.

Formes bilinéaires à deux séries de variables contragrédientes les unes aux autres. Invariant (désigné par la lettre M) d'une telle forme.

II. Ces principes relatifs aux transformations linéaires sont applicables aux transformations quelconques, grâce au fait que celles-ci engendrent des relations linéaires entre les différentielles.

Introduction (en partant d'une forme quadratique de différentielles A) de la différentiation *cogrédiente* formée avec les symboles de Christoffel et qui, en vertu des propriétés de ces symboles, est invariante en ce sens que, si on la fait porter sur un système de quantités qui subissent la même substitution que les différentielles *du* lors d'une transformation opérée sur les variables indépendantes *u*, le résultat est un nouveau système de quantités jouissant de la même propriété [1].

III. Dans le cas qui est celui où l'on se placera dans la suite, où le nombre des variables indépendantes est de deux, il suffit, pour obtenir des variables contragrédientes à un couple de quantités données, de permuter celles-ci en changeant le signe de l'une d'elles et multipliant par un certain facteur (ce qui permet, par exemple, de former l'invariant M pour une forme bilinéaire à variables congrédientes).

On complète, pour ce cas, les résultats d'algèbre indiqués en I en écrivant, avec la notation particulière à l'auteur, un certain nombre de propositions classiques de la théorie des fonctions linéaires, bilinéaires et quadratiques; en particulier, une formule qui lie l'invariant M à l'échange des variables dans une forme bilinéaire.

IV. Lorsqu'on applique la formule en question à l'échange de deux différentiations cogrédientes (au sens défini en II), l'expression K_{μ} qui correspond à

---

[1] Comparer, à cet égard, le *Calcul différentiel absolu*, de Ricci et Lévi Civita, paru à la même époque dans les *Math. Ann.*

l'invariant M n'est autre que la *courbure* de Gauss, lorsque l'on considère A (c'est-à-dire la forme quadratique donnée de différentielles) comme un élément linéaire.

La même formule conduit, pour une forme *linéaire* de différentielles

$$(p, du) = p_1 du_1 + p_2 du_2$$

à un invariant Ip, multiple de $\left(\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1}\right)$ et qui, par conséquent, égalé à zéro, exprime l'intégrabilité de l'expression en question.

On peut, dès lors, démontrer que la courbure est nulle lorsque A est un produit de deux différentielles exactes, et écrire un certain nombre de formules qui généralisent ce résultat. En particulier, on constate que, s'il existe trois formes linéaires (p_1, du), (p_2, du), (p_3, du) vérifiant les relations

$$(C) \qquad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}) ; \; Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}) ; \; Ip_{(3)} = K(p_{(1)}, p_{(2)})$$

où $(p_{(1)}, p_{(2)})$ est l'invariant simultané des deux formes qui, dans le cas où celles-ci sont des différentielles exactes, se réduit à l'invariant Θ (DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 197), — la quantité K est la courbure.

V. Introduction des paramètres différentiels de Beltrami. Expression, par leur moyen et en fonction de la différentielle d'une quantité arbitraire z (telle que $\Delta_1 z$ ne soit pas en fonction de z), de polynomes linéaires (p_1, du), (p_2, du), (p_3, du) vérifiant les conditions (C) du Chapitre IV.

Dans le cas de la courbure constante, on a ainsi la forme la plus générale des polynomes qui remplissent ces conditions sans annuler $Ip_{(1)}$.

VI. Le cas de $Ip_{(1)} = 0$, c'est-à-dire celui où (p_1, du) est la différentielle d'une fonction p [p_2 et p_3 étant alors, en vertu de la première condition (C), proportionnels l'un à l'autre et pouvant être regardés comme proportionnels à la différentielle d'une seconde quantité t], conduit à l'équation connue

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + K\lambda = 0.$$

Il faut, ici encore, distinguer suivant que K est constant ou variable.

VII. Introduction du trièdre mobile et des rotations correspondantes [1]. Équations de Riccati simultanées par lesquelles on obtient le mouvement du trièdre, connaissant les rotations [2]. Celles-ci satisfont à des conditions [3] (C*) qui ne sont autres que les conditions (C) avec $K = 1$. Cela tient à ce que la variation élémentaire d'une des arêtes du trièdre revient à un déplacement sur une sphère de rayon 1. Si l'on désigne par G_1, le carré de ce déplacement (forme quadratique par rapport aux du qui donne l'élément linéaire de la sphère), on peut exprimer les cosinus directeurs du trièdre et les rotations à l'aide d'une quantité z et de ses paramètres différentiels (relatifs à l'élément linéaire G_1) par les formules indiquées au Chapitre V.

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, liv. V, chap. I.

(2) *Ibid.*, t. I, liv. I, chap. V, VI.

(3) *Ibid.*, liv. I, chap. V, formule (5), ou liv. V, t. II, chap. II, tableau (I), formule (A).

VIII. Le problème de la déformation consiste à mettre la forme différentielle donnée A sous forme d'une somme de trois carrés de différentielles exactes.

Formation (par la méthode connue) de l'équation aux dérivées partielles qui donne une des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées curvilignes.

IX. Introduction de la seconde forme de Gauss et formules de Codazzi.

X. Supposons A décomposée d'une première manière (arbitraire d'ailleurs) en carrés. Toute autre décomposition peut être considérée comme dérivant de la première par une substitution orthogonale.

On est donc ramené au problème suivant : *trouver une substitution orthogonale variable qui transforme en différentielles exactes trois formes linéaires de différentielles données* $(a_{(1)}\,du)$, $(a_{(2)}\,du)$, $(a_{(3)}\,du)$.

Une telle substitution pouvant évidemment être considérée comme définissant un trièdre mobile, on peut lui appliquer les calculs du Chapitre VII et la faire dériver d'une fonction auxiliaire z (par les formules indiquées en cet endroit), à l'aide de paramètres différentiels dérivés de la forme $G_1 = \Sigma dx_i$ considérée également au même Chapitre, et où les X_i sont les cosinus directeurs d'une arête du trièdre mobile.

On constate tout d'abord qu'il suffit de connaître z en fonction des cosinus X_i (ou plutôt de deux paramètres x_1, x_2 dont on peut les faire dépendre) pour connaître complètement une solution du problème, puis que cette expression de z en fonction de x_1, x_2 doit vérifier une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre (W).

C'est l'équation différentielle de Weingarten [1]. On sait que M. Weingarten a montré qu'elle s'intègre par des méthodes classiques dans tous les cas où l'on sait résoudre un problème de la déformation.

A toute intégrale z de cette équation correspond une surface admettant l'élément linéaire donné; et, inversement, toute surface S admettant cet élément linéaire correspond à une solution z de l'équation (W), *pourvu qu'elle n'annule pas le discriminant de la forme* G_1.

XI. On est amené, par ce qui précède, à se demander dans quel cas la forme G_1, à son discriminant nul.

Géométriquement, cette circonstance se traduit par ce fait que les lignes définies sur la surface, par l'équation différentielle $(H_{(1)}\,du) = 0$, sont les courbes de contact de cylindres circonscrits, les génératrices de ces cylindres étant les tangentes le long de ces courbes, aux lignes $(a_{(2)}\,du) = 0$, obtenues en annulant l'un des carrés dont on est parti au Chapitre X.

On constate alors qu'*une solution quelconque du problème peut être considérée comme échappant à la méthode*, pour certain choix des éléments arbitraires que cette méthode comporte (c'est-à-dire du mode primitif de décomposition de A en carrés); mais que, par contre, *on peut toujours diriger la méthode de manière à ne laisser échapper aucune solution.*

XII. Cas des surfaces de révolution. Relation des résultats obtenus dans ce cas avec les autres résultats connus dus à M. Weingarten.

---

(1) *Mémoire sur la déformation des surfaces*, couronné par l'Académie des Sciences de Paris : *Mémoires des savants étrangers*, t. XXXII et *Acta math.*, t. XX.

Horn (*J.*) [H 1 (a 2)]. — Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels (17, 1-202).

Dans le Tome VIII des *Acta mathematica*, M. Poincaré s'est occupé des intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels et de leur représentation asymptotique par des *séries normales*, en général divergentes.

Le point singulier envisagé étant $x = \infty$, l'équation, supposée d'ordre n, est dite de *rang* p, si m étant le degré du polynome coefficient de $\frac{d^n y}{dx^n}$, celui du coefficient de $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ est (au plus) $m - \lambda(p-1)$; et dans ce cas, les intégrales sont de la forme asymptotique

$$(1) \qquad x^{\lambda} e^{z_p} S$$

où λ est une constante, z_p un polynome de degré p, et S une série (en général divergente) ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$. M. Poincaré établit l'existence d'intégrales ayant ce développement asymptotique dans le cas de $p = 1$, en employant la transformation de Laplace; puis il passe de ce premier au cas de $p = 2$ par la transformation

$$(2) \qquad t = x^{\lambda},$$
$$(3) \qquad u = (x) y_1(\varepsilon x) + \ldots + y_p(\varepsilon^{p-1} x),$$

ε étant une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité; $y, y_1, \ldots$, des intégrales de l'équation donnée (x devant, dans y_h, être remplacé par $\varepsilon^h x$).

M. Horn [1] reprend cette dernière partie des raisonnements et des résultats. Il se propose, en particulier, de ne pas assujettir x à s'éloigner à l'infini dans une seule direction. Il se borne, toutefois, au cas où l'ordre n de l'équation donnée est égale à 1.

I. La transformation (2) fournit pour u une équation linéaire d'ordre (en général) égal à n,

$$(3) \qquad Q \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + Q_n u = 0,$$

laquelle est de rang 1 et où l'on suppose d'abord $Q_0 = 0$. Si α_1, α_2 sont les racines de l'équation caractéristique [celle qui fournit les valeurs possibles du coefficient du terme en t^{λ} dans le polynome z_p que contient l'expression (1)] pour l'équation donnée, les racines de l'équation caractéristique pour l'équation (3) sont

$$\alpha_1, \quad \frac{(p-1)\lambda - \alpha_1}{p}, \quad \frac{(p-2)\lambda - \alpha_1 - \alpha_2}{p}, \ldots, \alpha_2,$$

les deux extrêmes (α_1, α_2 mais non les intermédiaires) étant simples et (si elles sont distinctes) pouvant être supposées réelles avec $\alpha_1 > \alpha_2$.

---

[1] M. Horn a étudié également les intégrales irrégulières dans le *Journal de Crelle*, t. CXVIII, et dans les *Math. Annalen*, t. XLIX, L.

En appliquant à cette équation (3) la transformation de Laplace, la transformée a les points singuliers $z=\alpha_1$, $z=\alpha$ et admet, autour de chacun d'entre eux, une solution $v_i(z)$ de la forme

$$v_i(z)=(z-\alpha)^{\lambda}\,\Psi(z-\alpha)$$

Ψ étant un développement convergent ordonné suivant les puissances de $z-\alpha$ et λ un exposant déterminé. Les deux quantités $v(z)$ ainsi obtenues, multipliées par $e^{tz}dz$ et intégrées le long d'un contour partant de l'infini dans le plan des z et y revenant après circulation autour du point singulier $z=\alpha$ de v, fournissent les solutions demandées de l'équation (3), solutions dont la valeur asymptotique est déterminée par la méthode de M. Poincaré.

Q_0 étant toujours supposé non nul, on constate (par la méthode classique qui permet, lorsqu'on connaît une solution d'une équation linéaire d'ordre n, de rechercher les autres à l'aide d'une équation d'ordre $n-1$) que l'équation (3) ne peut admettre plus d'une solution u_2 dont la dérivée logarithmique tende vers α_2 pour $t=+\infty$. Or, dans le Mémoire du Tome CXVIII du *Journal de Crelle*, l'auteur a démontré également que l'équation donnée admettait une intégrale unique v_1 telle que

$$\lim_{t=+\infty} x^{p-1}\frac{d\log v_1}{dx}=\alpha_2.$$

Il en résulte que cette intégrale, associée à $p-1$ intégrales analogues $v_2, \ldots, v_{p-1}$ des équations obtenues en changeant x en εx, $\varepsilon^2 x$, ..., $\varepsilon^{p-1}x$, est celle qui [de par la seconde équation (2)] fournit $u=u_2$. On en déduit que v_1 a un développement asymptotique de la forme annoncée lorsque x tend vers l'infini par valeurs réelles et positives. Il est représenté par une *série normale*.

Mais, en vertu des hypothèses faites sur α_1 et α_2, le chemin d'intégration dans le plan des z, pour la formation de la solution u_2 mentionnée précédemment, n'est pas assujetti à aller à l'infini dans la direction réelle et négative, mais peut (sans changer le résultat) y tendre dans toute direction autre que celle qui est réelle et positive.

Il en résulte que l'intégrale v_1 correspondante a son développement valable dans le secteur compris entre les arguments $-\frac{3\pi}{2p}+\delta$ et $\frac{3\pi}{2p}-\delta$, quelque petit que soit le nombre positif δ.

Les $v_2, \ldots, v_{p-1}$ fournissent, de même pour l'équation donnée, des intégrales ayant leurs développements valables dans d'autres secteurs de même ouverture et dont l'ensemble embrasse tout le domaine du point $x=\infty$.

2. On a supposé jusqu'ici $Q_0 \neq 0$. Après l'examen de quelques exemples particuliers, on étend les résultats au cas de $Q_0=0$ à l'aide de la remarque suivante :

Une quantité z, racine d'une équation algébrique dont les coefficients, fonctions de x, admettent des développements asymptotiques (formels) suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, est elle-même formellement développable suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ ou suivant celles de $x^{-\frac{1}{m}}$, m étant un entier.

3. Étude de *la distribution des zéros* d'une intégrale de l'équation donnée, pour les grandes valeurs de x.

En général, dans ces conditions, l'intégrale a pour partie principale le pre-

mier terme d'une série normale et, par conséquent, ne saurait s'annuler. Mais il en est autrement si l'intégrale en question a pour développement (formel) une combinaison linéaire de deux séries normales et que les premiers termes de celles-ci soient du même ordre de grandeur, ce qui arrive lorsque l'argument de x est très voisin (d'autant plus voisin que $|n|$ est plus grand) d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2p}$.

On a aisément des expressions approchées des valeurs des zéros dont les arguments satisfont à cette condition, et l'on constate que leurs modules augmentent comme ceux des zéros d'une fonction entière de genre p. Il existe, dès lors, une fonction entière de genre p qui admet tous ces zéros; et l'intégrale considérée est le produit de cette fonction entière par une puissance de x et par une série (*convergente*, énonce l'auteur), ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

7. Extension au cas où les racines α_1 et α_2 cessent d'être distinctes.

Riquier (*Ch.*) [H, 7, *a*]. — Sur une question fondamentale de calcul intégral (203-338).

Exposition nouvelle des recherches antérieures (*Ann. Éc. Normale*, 1893, et *Mém. Savants étrangers*, t. XXXII) dans lesquelles l'auteur a démontré les théorèmes d'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Il rappelle tout d'abord l'historique de la question : travaux de Cauchy, Briot et Bouquet, Méray, Mayer, Darboux, Mme Kowalewsky, Bourlet, Delassus. Les travaux de l'auteur dérivent de ceux de Méray. M. Delassus a, lui aussi, résolu le problème, mais en employant des changements de variables, alors que M. Riquier les évite.

1. *Problème préliminaire*. — On appelle *fonction schématique* de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, une fonction représentée par le développement convergent le plus général (c'est-à-dire à coefficients *tous* indéterminés), ordonné suivant les puissances de $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$.

E étant un ensemble de monômes en nombre limité, entiers par rapport à $x - x_0, y - y_0, \ldots$, le *résidu* de la *coupure* E pratiquée dans la fonction schématique est la partie de ce développement formée par les termes qui ne sont divisibles par aucun monôme appartenant à E.

Ce résidu peut toujours être mis sous la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=1} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} (z - z_0)^{c_n} \ldots F\theta_n,$$

où $a_n, b_n, c_n, \ldots$ désignent des entiers positifs ou nuls, θ un groupe de variables indépendantes, extrait du groupe total $x, y, z, \ldots$, et $F\theta_n$ une fonction schématique des seules variables θ_n; et cela de manière qu'il n'y ait pas deux termes semblables dans le développement de la quantité (1).

$u, v, \ldots$ étant diverses fonctions schématiques (en nombre limité), $x, y, z, \ldots$, considérons un ensemble limité formé avec des dérivées de $u, v, \ldots$. Une dérivée partielle quelconque de u avec l'une des fonctions $u, v, \ldots$ est dite *principale*

par rapport à cet ensemble si elle coïncide avec l'une de celles qui y figurent ou quelqu'une de leurs dérivées; *paramétrique*, dans le cas contraire.

Si dans les développements de $u, v, \ldots$ on ne garde que les termes dont les coefficients sont les valeurs initiales des dérivées *paramétriques*, les développements partiels ainsi conservés peuvent être considérés comme dérivant des développements totaux par l'opération précédente.

II. *Systèmes orthoïques; conditions de passivité; divergence éventuelle des développements des intégrales hypothétiques.* — Soient

$$x, y, \ldots \tag{2}$$

les variables indépendantes;

$$u, v, \ldots \tag{3}$$

les fonctions inconnues. A chacune de ces quantités (2) ou (3), faisons correspondre p entiers appelés respectivement *cote première*, *cote seconde*, ... de cette quantité. Ces entiers seront positifs, nuls ou négatifs, sauf la cote première de chaque variable indépendante, laquelle devra être positive et au moins égale à 1.

A une dérivée partielle quelconque de $u, v, \ldots$, on fait correspondre comme cote $q^{\text{ième}}$ ($q = 1, 2, \ldots, p$), l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction les cotes $q^{\text{ièmes}}$ des variables de différentiation (distinctes ou non). On range ces dérivées suivant leurs cotes de la manière suivante : $c_1, c_2, \ldots, c_p$ étant les cotes d'une dérivée $\tilde{\delta}$ et $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ celles d'une dérivée $\tilde{\delta}'$, celle-ci est dite *normale* par rapport à la première si les différences

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, la première d'entre elles qui n'est pas nulle étant positive. Cette propriété se conserve évidemment si l'on soumet $\tilde{\delta}$ et $\tilde{\delta}'$ à une même différentiation quelconque. Il est clair que toutes les dérivées peuvent être rangées en groupes dont chacun comprend un groupe finite de termes et tels que chaque dérivée soit normale vis-à-vis des dérivées des groupes postérieurs et d'elles seules. Le mot *normale* signifie donc une antériorité dans le classement ainsi effectué. La *classe* d'une dérivée est le numéro du groupe auquel elle appartient.

Cela posé, l'auteur considère les systèmes *orthoïques*. Ce sont ceux qui sont résolus, par rapport à certaines dérivées exprimées ainsi en fonctions *holomorphes* des dérivées restantes (ainsi que des variables indépendantes et des fonctions inconnues elles-mêmes), et cela de manière que, moyennant un choix convenable des *cotes* attribuées à ces variables indépendantes et à ces inconnues (2), (3), toute quantité figurant dans un quelconque soit normal par rapport au premier membre correspondant.

M. Riquier exprime ce dernier fait en disant que les équations du système sont des *relations normales* et fournissent, pour leurs premiers membres, des *expressions normales*; il en est de même de toutes celles qu'on en déduit par des différentiations, combinées ou non, avec l'opération qui consiste à remplacer, dans un second membre, une dérivée par son expression normale. Les équations du système et celles qu'on en déduit par simple différentiation sont encore dites *relations primitives*.

L'auteur recherche les intégrales d'un tel système orthoïque.

On doit noter qu'il se borne aux intégrales *analytiques* et *holomorphes* (dites par lui intégrales *ordinaires*).

Tout d'abord, les dérivées de tous ordres des $u, v, \ldots$ sont divisées en dérivées *principales* et en dérivées *paramétriques* (conformément à la première partie), relativement à l'ensemble formé par les dérivées qui constituent les premiers membres des équations données.

On achèvera de déterminer une intégrale du système en se donnant les valeurs à l'origine des dérivées paramétriques, ou, ce qui revient au même, la portion du développement des inconnues formées par les termes qui dépendent de ces dérivées : c'est ce qui constitue les *données initiales*.

Quant aux dérivées principales, *elles sont fournies par les relations primitives* et l'on en obtient ainsi des expressions, dites *expressions ultimes*, fonction des variables indépendantes, des inconnues $u, v, \ldots$ et des dérivées paramétriques seules. Même chacune d'elles (à l'exception des premières d'entre elles), est ainsi obtenue plusieurs fois; et il faut que les valeurs ainsi obtenues concordent, pour que le problème soit possible.

On dira que le système est *passif* si les relations ultimes concordent, quelles que soient les données initiales (autrement dit, les *conditions de passivité* sont ce qu'on nomme habituellement *conditions d'intégrabilité*).

Ainsi définies, les conditions de passivité sont en nombre infini. Mais on constate qu'on peut se borner à considérer les dérivées *cardinales*, c'est-à-dire celles qu'on obtient en combinant deux à deux, de toutes les manières possibles, les dérivées qui forment les premiers membres des équations données et en prenant, pour deux quelconques d'entre elles, la *résultante* [1] d'ordre minimum. Ces dérivées cardinales sont, elles, en nombre limité, et il suffira que les différentes expressions ultimes de chacune d'entre elles soient identiquement égales (quelles que soient les valeurs données aux inconnues, aux variables et aux dérivées paramétriques), pour que le système soit passif.

Supposons maintenant le système orthonomé et passif. *Cela ne suffit pas encore pour pouvoir affirmer l'existence de l'intégrale*, sous des conditions initiales (analytiques) arbitraires. Le développement de cette intégrale peut être formé; mais il n'est pas nécessairement convergent. Par exemple pour l'équation bien connue

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

la théorie précédente conduirait, en attribuant à u la cote zéro, à x la cote 1 et à y la cote 0, à déterminer u en se donnant les valeurs $u(0, y)$ qu'il doit prendre pour $x = 0$. Mais le développement ainsi obtenu diverge, non seulement si l'on prend (comme l'a indiqué Mme Kowalewski) $u(0, y) = \frac{1}{1-y}$, mais encore, comme le montre M. Riquier, lorsqu'on prend pour $u(0, y)$ une fonction *entière* convenablement choisie.

---

[1] L'auteur appelle *résultante* de deux dérivées d'une même fonction, une dérivée qui peut être considérée à la fois comme dérivée de l'une et comme dérivée de l'autre : autrement dit, la résultante d'ordre minimum des deux dérivées $\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ et $\frac{\partial^{\alpha'+\beta'} u}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'}}$ est $\frac{\partial^{\alpha''+\beta''} u}{\partial x^{\alpha''} \partial y^{\beta''}}$, en désignant par α'' le plus grand des nombres α, α'; par β'', le plus grand des nombres β, β'.

L'auteur établit le même fait pour d'autres équations plus ou moins analogues à (7).

III. *Systèmes orthonomes; convergence des développements des intégrales.* — Au contraire, les développements convergent nécessairement si le système est *orthonome*.

On dira qu'un système orthoïque est orthonome si, dans le système de cotes employé, les *cotes premières* des diverses variables indépendantes sont toutes égales à un même entier (positif).

L'auteur fait expressément remarquer que cette définition est différente de celle qui a été donnée précédemment pour le même terme dans le Mémoire précédent des *Savants étrangers*, t. XXXII. (Ces deux définitions seront comparées plus loin, à l'*Appendice*.)

Les systèmes traités par Mme Kowalewski (systèmes résolus par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé de chaque inconnue, cette dérivée étant prise par rapport à une seule variable indépendante x), sont orthonomes; il suffit d'attribuer :

A toutes les variables indépendantes, la cote première 1, et aux fonctions inconnues, les cotes premières $-k_1, -k_2, \ldots$, en désignant par $k_1, k_2, \ldots$ l'ordre de différentiation auquel chacune d'elles entre dans le système;

A la variable x, une cote seconde égale à 1, à toute les autres, une cote seconde nulle et aux fonctions inconnues les cotes secondes $-k_1, -k_2, \ldots$.

Un second exemple, très général, de système orthonome est donné par ce que l'auteur appelle les systèmes *taxiques*.

Cela posé, si le système, remplissant les conditions envisagées en II, est en même temps orthonome, les développements précédemment formés sont convergents. Par conséquent

Tout système orthonome et passif est complètement intégrable, c'est-à-dire un système d'intégrales (analytiques) correspondant à des données initiales (analytiques) arbitrairement choisies.

La preuve de convergence se fait en ramenant d'abord toutes les données initiales à être nulles, puis introduisant un système majorant qui se ramène à un système d'équations différentielles ordinaires, pour certaines données initiales positives.

IV. *Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable.* — On peut ramener l'intégration d'un système (analytique) quelconque à celle d'un système orthonome passif; plus précisément, on peut, *sans changement de variables ni intégration*

Ou bien constater l'impossibilité du problème (sauf pour des données initiales particulières);

Ou former un second système équivalant au premier et composé : 1° d'un système orthonome passif portant très certaines, des inconnues primitives; 2° de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des premières, par de simples différentiations.

(Bien entendu, les deux groupes peuvent se réduire à un seul.)

L'auteur arrive à ce résultat par l'emploi des systèmes *taxiques* considérés dans la partie précédente. Il faut toutefois remarquer que les raisonnements employés n'ont pas pu être rendus complètement irréprochables au point de vue de la rigueur et de la généralité.

Ils introduisent des résolutions successives de systèmes d'équations en

termes finis, et il faut admettre que chacune de ces résolutions peut s'effectuer sans troubler les résolutions antérieures, ce qui n'est pas absolument évident dans le cas tout à fait général.

On a une seconde solution fondée sur l'élimination progressive des inconnues.

V. *Propositions diverses sur les systèmes non orthonomes.* — Les conditions précédentes, en ce qui regarde le système différentiel, peuvent être rendues moins restrictives si l'on s'assujettit à particulariser, au contraire, les données initiales. Si, par exemple, les développements qui représentent ces données sont *quasi-exponentiels*, c'est-à-dire admettent des majorants de la forme

$$Me^{\alpha\,[illegible]}$$

M et α étant des constantes (nécessairement positives), il suffira que le système différentiel, supposé linéaire, soit orthoïque et passif.

Pour d'autres conditions imposées au système, on pourra se contenter de supposer les données initiales représentées par des fonctions entières.

Mais on peut même appliquer les théories qui précèdent à certains systèmes non-orthoïques.

Soit un système comportant un nombre égal g d'équations et d'inconnues, et résolu par rapport à g dérivées appartenant respectivement à chacune des inconnues. Supposons que les seconds membres ne contiennent ni les dérivées qui figurent dans les premiers, ni aucune dérivée de ces dérivées.

Le système pourra cependant ne pas être orthoïque, les dérivées qui figurent dans les seconds membres peuvent être *anormales* (c'est-à-dire non-normales), par rapport à celles qui forment les premiers.

Imaginons qu'on égale à zéro les dérivées partielles des seconds membres par rapport à chacune de ces dérivées anormales.

Désignons par (A) les diverses conditions ainsi écrites.

Le théorème établi dans la troisième partie restera exact (la condition de passivité étant ici remplie d'elle-même), si les données initiales (supposées analytiques, ainsi que les équations différentielles), sont choisies de manière à satisfaire initialement aux conditions (A).

Tel est, en particulier, le cas pour un problème qui a été étudié par M. Goursat [1].

Appendice. — Comparaison de la nouvelle définition des systèmes orthonomes avec celle des systèmes qui avaient été nommés par l'auteur *orthonomes* dans le travail cité des *Savants étrangers*, et *harmoniques* dans la rédaction insérée aux *Annales de l'École Normale supérieure*.

La nouvelle définition comprend l'ancienne comme cas particulier, comme on le voit, en ajoutant aux p cotes qui interviennent dans cette dernière (supposée vérifiée) une $(p+1)^{\text{ième}}$ cote supplémentaire jouant le rôle de cote première et égale à 1 pour les variables indépendantes, à zéro pour les inconnues.

Elle embrasse aussi certains systèmes que l'auteur appelle *parataxiques*, et à la catégorie desquels appartiennent ceux qui ont été étudiés par M. Bourlet.

Les recherches actuelles comprennent d'ailleurs également comme cas particulier celles de Mme Kowalewski, de MM. Méray, Delassus et aussi celles qui ont fait l'objet de la Note précédemment citée (*Cf.* Ve Partie) de M. Goursat.

---

(1) *Comptes rendus*, 2 novembre 1897.

Picard (*E.*) [F 2, G 6 *c*]. — Sur une classe de transcendantes nouvelles (second Mémoire) (333-338).

Il s'agit de systèmes de m fonctions uniformes $u = f(z)$; $v = \varphi(z)$, ... d'une variable z, précédemment étudiés (*Acta math.*, t. XVIII), jouissant de la double propriété d'admettre la période $i\omega'$ et de subir, par le changement de z en $z+\omega$, une substitution birationnelle, qu'on peut (sans diminuer la généralité) écrire sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} u = f(z+\omega) = \mu u + Q_1(u, v, \ldots, w), \\ v = \varphi(z+\omega) = \mu v + Q_2(u, v, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où les μ sont des constantes, tandis que les fonctions Q ont des développements en séries entières qui commencent par des termes du second degré.

M. Picard expose la formation de ces fonctions par une méthode d'approximations successives nouvelle. Il pose la question très intéressante mais peut-être difficile de savoir quelle est la solution la plus générale de la question.

Il s'occupe surtout de lever les restrictions

$$(1)\qquad \mu_h = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

$$(2)\qquad m = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega}}$$

(pour toutes les valeurs de l'entier ν), qui semblaient nécessaires pour rendre valable sa première solution.

La nécessité des inégalités (2) disparaît d'elle-même avec la nouvelle méthode employée, laquelle ne suppose plus ces inégalités vérifiées.

Pour échapper aux inégalités (1), on introduit une fonction doublement périodique de seconde espèce $\lambda(z)$ vérifiant les relations

$$\lambda(z+\omega) = \lambda(z), \qquad \lambda(z+\omega) = a\lambda(z)$$

(a étant une constante quelconque), et l'on substitue aux fonctions inconnues $u, v, \ldots$, leurs quotients par $\lambda(z)$. Ces nouvelles inconnues vérifient des relations analogues à (1), mais dans lesquelles les μ_h seraient changés en $\frac{\mu h}{a}$ et cesseraient, par conséquent (pour a convenablement choisi), de vérifier n'importe quelle relation de la forme

$$\mu_h = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega}}.$$

Heusel (*K.*) [D 6 *a*]. — Sur une nouvelle théorie des fonctions algébriques de deux variables (339-416).

1. *Introduction. But du travail.* — Pendant que Clebsch et Nöther perfectionnaient, au point de vue géométrique, la théorie des surfaces algébriques, rien n'était fait pour donner à la théorie analytique des fonctions algébriques de deux variables, une forme analogue à celle que Cauchy, Puiseux, Riemann, Weierstrass ont appris à donner à l'étude des fonctions d'une variable unique.

M. Heusel se propose d'étudier la continuité d'une fonction algébrique z de deux variables dans un domaine à n feuillets, en étudiant les relations mutuelles de ces n feuillets.

La difficulté consiste en ce que le discriminant de l'équation qui définit z s'annule non plus en des points (points critiques), mais tout le long des *courbes critiques*, lesquelles sont d'ailleurs algébriques.

On a donc à étudier la permutation et l'expression par des séries des valeurs de z dans le voisinage d'un point quelconque d'une courbe critique, ou, plus généralement, d'une courbe algébrique donnée C. On commence par prendre de nouvelles variables ξ, η dont la première est la variable du cycle (au sens de Halphen), sur C dans le voisinage du point donné, tandis que la seconde est la distance d'un point quelconque à C, comptée parallèlement à l'ancien axe des y.

z est alors racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des polynomes en η, mais des séries entières indéfinies en ξ.

Pour chaque valeur déterminée ξ, donnée à ξ au voisinage du point considéré, le théorème de Puiseux permet de développer z suivant les puissances entières ou fractionnaires de η. Mais les séries ainsi décrites pourraient être essentiellement différentes suivant les valeurs de ξ. Il sera montré que les développements de z ont pour coefficients des fonctions algébriques de ξ.

Ce résultat ne peut pas être atteint par les méthodes connues de Cauchy et de Puiseux, si l'on veut reconnaître le caractère analytique des coefficients par rapport à ξ. La méthode employée est de nature en quelque sorte arithmétique. Elle peut s'étendre au cas d'un nombre quelconque de variables.

On commence par le cas des fonctions rationnelles.

2. *Les fonctions rationnelles de deux variables, leur décomposition en facteurs linéaires.* — Au voisinage d'un couple déterminé (α, β) de valeur de x, y, le numérateur et le dénominateur, considérés comme polynomes en y, peuvent être décomposés en facteurs linéaires, multipliés (en certains points exceptionnels) par une puissance de $x - \alpha$.

Par rapport à chacun de ces facteurs, la fonction possède un *ordre* délerminé. La somme de ces ordres relatifs aux différents facteurs est nulle.

3. *Le développement des fractions rationnelles en séries de puissances.* — Soit, dans une fonction rationnelle

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

y_0 l'une des branches de la fonction algébrique de x qui annule $Q(x, y)$ (autour d'une valeur de x, $x = \alpha$). On substitue, comme précédemment, la variable ξ du cycle à x. D'autre part, $Q(x, y)$ peut s'ordonner suivant les puissances de $(y - y_0)$: on met en facteur cette dernière quantité autant de fois qu'il est possible. Puis, pour éviter les puissances négatives de ξ dans ce qui reste, on pose, non plus $y - y_0 = \eta$ comme tout à l'heure, mais

$$\frac{y - y_0}{\xi^d} = \eta,$$

d étant un entier convenable.

Alors f peut être développé suivant les puissances croissantes de ξ, y (certaines puissances négatives de ces lettres peuvent être en facteurs).

Ou encore, f peut être développé suivant les puissances de z (avec un nombre fini de puissances négatives), les coefficients étant algébriques en ξ et ayant des ordres qui, s'ils sont négatifs, n'augmentent pas indéfiniment en valeur absolue.

4. *Les fonctions algébriques de deux variables. Leur développement aux environs d'un arc de courbe régulier.* — Nous considérons d'abord, dans le plan de x, y, une courbe algébrique C, le long de laquelle la fonction z est régulière. On fait une transformation telle que z devienne une quantité algébrique entière (au sens arithmétique classique du mot), en x, y.

Sur la courbe C même, z est un certain développement $c_0(x)$, y étant une certaine fonction y_0. On pose

$$z = c_0 + \zeta, \qquad y = y_0 + \eta,$$

puis (en mettant $x - \alpha$ en facteur autant de fois qu'on le peut)

$$\eta = (x - \alpha)^\sigma \eta_1, \qquad \zeta = (x - \alpha)^\tau \zeta_1$$

et l'on est ramené à une équation de la forme

$$\zeta_1 = g_{10}(x)\eta_1 + \sum_{i+k=2,3} g_{ik}(x)\eta_1^i \zeta_1^k$$

qui permet de développer ζ_1 suivant les puissances de η_1.

5. *Le développement des fonctions algébriques au voisinage d'un arc de courbe singulier.* — C'est le développement autour d'un arc *singulier* (rendant ζ infini ou surtout annulant le discriminant de l'équation en z), qui constitue le problème essentiel. On se propose de développer z en série de la forme

$$(1) \qquad z = e_0(x)(y - y_0)^{\varepsilon_0} + e_1(x)(y - y_0)^{\varepsilon_1} + \ldots,$$

$y = y_0$ étant toujours l'équation de la branche de courbe considérée, et les ε des exposants croissants.

Le premier exposant ε_0 se détermine par la méthode du polygone de Newton; il n'est jamais négatif si z a été rendu entier (au sens précédemment spécifié).

Quant au coefficient c_0, il est racine d'un équation algébrique qu'on peut former.

6. *Calcul d'une racine à l'aide du premier terme de son développement.* — Une fois le premier terme obtenu, on le retranche de z. La partie restante z_1 étant une fonction algébrique conduit à des calculs analogues à ceux faits sur z.

7. *La série trouvée z_0 procède suivant les puissances croissantes de η.* — Pour prouver que les exposants $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ vont en croissant, il suffit de le constater pour les deux premiers d'entre eux (la méthode étant la même pour les suivants). Or, on voit aisément qu'en posant $z = e\eta^{\varepsilon_0}$, puis

$$e = e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_1}},$$

z_1 commence par un terme d'exposant supérieur à zéro.

8. ***Séparation de la série trouvée z_0, en sa partie régulière et sa partie irrégulière.*** — L'exposant α_1 du second terme du développement de z par rapport à η étant trouvé, le coefficient η_1 de ce même terme est (dans le cas le plus général) racine d'une nouvelle équation algébrique dont les coefficients sont des séries en ξ. Mais le degré de cette seconde équation est au plus égal à celui de la première et même au degré de multiplicité de la racine θ_0 de cette première.

Étendant ceci aux équations qui fournissent les deuxième, troisième, etc. termes du développement, on voit que les degrés de ces équations cessent, à partir d'un certain rang k, de décroître pour prendre une valeur constante s (laquelle, comme il sera démontré dans le paragraphe suivant, est égale à n). Les termes qui suivent le rang k sont dits *réguliers*. Les exposants correspondants peuvent être considérés comme des fractions ayant toutes le même dénominateur.

9. *Les n racines de la congruence $f(x) \equiv 0$.* — On va démontrer que le nombre des développements qu'on peut former pour une équation donnée, par la méthode précédente, est égal à n, degré de l'équation en z. A cet effet, on remarque que tout développement satisfaisant formellement à cette équation peut être considéré comme définissant une racine pour la congruence

$$f(z) \equiv 0 \quad [\text{mod } (x - y)^M],$$

M étant un entier qu'on peut rendre aussi grand qu'on le veut, en prenant assez de termes dans la série.

Or, connaissant une telle racine, on peut opérer par division à la manière ordinaire et réduire la congruence à un degré moindre d'une unité. Dès lors, ayant démontré que la congruence admet au moins une racine, on peut en déduire, par la marche classique, qu'elle en a n, et d'ailleurs n seulement.

En même temps, ceci prouve le fait annoncé plus haut, que, pour la partie régulière du développement, la constante s, précédemment mentionnée, est égale à n.

10. ***Les n séries $z_1, z_2, \ldots, z_n$ représentent les racines de l'équation $f(x) = 0$ aux environs de l'arc de courbe.*** — Pour faire la preuve de convergence, on commence par ramener le cas général à celui où, parmi les n développements, un et un seul z_1 (celui que l'on considère) débute par un terme à exposant positif en η.

C'est ce qu'il est facile d'obtenir en remplaçant l'inconnue z par

$$z = \frac{Z}{\eta},$$

Z étant le commencement du développement de z_1, jusqu'au terme en η^1 inclus, alors que les $n - 1$ autres développements, diffèrent du premier avant le terme en question.

Ceci fait, la question est réduite à celle qui a été traitée dans le cas de l'arc de courbe régulier (n° 4).

11. *Domaine de convergence des séries $z_1, z_2, \ldots, z_n$.* — Aux environs d'un point déterminé de la courbe $(x = y)$, les séries ont, en vertu du numéro précédent, un rayon de convergence fini (sous réserve de faire abstraction du voisinage de l'arc de courbe où du point considéré si le développement comprend des puissances négatives, ainsi qu'il arrive dans le théorème de Laurent).

L'auteur recherche dans quelles conditions ce rayon peut tendre vers zéro. Il arrive à cette conclusion que ceci peut se produire :

1° Si le point considéré tend vers un point critique P_1 des coefficients ;

2° S'il tend vers l'intersection P_2 de l'arc de courbe avec une autre branche de la courbe discriminante ; et dans ces cas seulement.

Même dans ces cas, d'ailleurs, au point P_1 ou P_2 *lui-même*, on a une série à rayon de convergence fini.

12. *Caractère analytique des n racines et surfaces de Riemann correspondantes.* — Les coefficients successifs $c_0, c_1, \ldots$ de la série (1) sont, comme on l'a vu, fonctions rationnelles d'un nombre fini d'entre eux ; ceux qui correspondent à la partie irrégulière du développement sont uniformes sur une même surface de Riemann à ν feuillets. Comme, sur cette surface, y_0 est aussi fonction uniforme, ν est un multiple du degré μ de la courbe discriminante (ou du moins de la portion irréductible de cette courbe qui intervient actuellement), par rapport à y : soit

$$(2) \qquad \nu = \lambda\mu$$

z a un développement bien déterminé en chaque point de la surface de Riemann en question. Toutes ces valeurs se permutent d'ailleurs les unes avec les autres sur la surface entière. Autour d'un *arc* déterminé de la courbe discriminante (le long duquel y_0 est une fonction bien déterminée de x), le nombre de séries qui se permutent est λ.

A ces λ séries correspondent λb valeurs numériques possibles, b désignant le dénominateur commun des exposants $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$.

Toutefois ces λb valeurs peuvent ne pas être toutes distinctes. Par exemple, si l'équation donnée est

$$z^2 - xy + xy^2 = 0,$$

on a, à l'origine (la courbe discriminante étant $y = 0$),

$$z_1 = (xy)^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} \ldots,$$

avec $\lambda = b = 2$. Cependant il n'y a que deux valeurs distinctes de z, parce qu'une permutation simultanée des deux systèmes de valeurs des coefficients e d'une part, et des deux valeurs de $(y - y_1)^{\frac{1}{b}} = y^{\frac{1}{2}}$ de l'autre, ne produit aucun changement sur z.

Mais cette circonstance peut être évitée, dans l'exemple actuel, pour le changement de variable $(y \mid xy)$ qui ramène λ à la valeur 1 ; et l'on constate qu'on peut arriver au même résultat dans le cas général.

13. *Les cycles de racines analytiquement rattachées et leurs ordres.* — Les cycles étant ainsi définis, et après quelques interprétations géométriques immédiates, l'auteur définit *l'ordre* de la fonction z par rapport à un tel cycle : c'est l'exposant sous lequel figure, dans cette fonction, la quantité $(y - y_1)^{\frac{1}{b}}$ (b ayant le même sens qu'au numéro précédent), qui joue ici le rôle de la variable du cycle.

14. *Le corps algébrique de fonctions déterminé par z.* — Le *corps de fonctions* déterminé par z est celui qui est formé par toutes les fonctions rationnelles

de x, y, z. Toutes les lignes le long desquelles les valeurs de z se permutent font partie de la courbe discriminante de n'importe quelle surface du corps ainsi formé (ce sont d'ailleurs les seules qui soient communes à toutes ces courbes).

$P = 0$ étant une courbe algébrique irréductible quelconque du plan des xy à laquelle correspond une surface de Riemann décriminée, on parlera du *diviseur premier* $\mathcal{V}$ qui correspond à cette courbe. On dira qu'une fonction $\zeta = R(x, y, z)$ du corps contient $\mathcal{V}$ en facteur avec un exposant exactement égal à k (ou qu'elle est divisible par $\mathcal{V}^k$), si elle est d'ordre de k (au sens défini au numéro précédent), par rapport au cycle qui a pour origine la courbe. k est un entier positif, nul ou négatif.

Il n'est different de zero (pour une fonction donnée), *que relativement à un nombre limité de diviseurs premiers;* c'est-à-dire à un nombre limité de courbes. C'est ce qu'on démontre en étudiant la *norme* de ζ, c'est-à-dire (conformément à une définition arithmétique classique) le produit des n déterminations que peut recevoir ζ lorsque x, y sont donnés, lequel est une fonction rationnelle de x, y.

Le produit des facteurs premiers en question, élevés aux exposants correspondants, constitue le *diviseur* de ζ.

Une fonction du corps est, à un facteur constant près, entièrement déterminée par son diviseur : une fonction qui est d'ordre nul partout est une constante.

L'auteur se réserve de continuer cette étude et, en particulier, de publier ultérieurement des résultats reliant ceux qui précèdent avec les recherches de M. Picard. J. H.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI;

Serie 5, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Tome IV, 1895; 1er semestre [1].

Tacchini (*P.*) [U]. — Protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain, en 1891-92-93-94. (3-8).

Bianchi (*L.*) [H 9 *f*]. — La méthode de Riemann étendue à l'intégration de l'équation $\frac{\partial n_u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = M u$. (8-18).

On peut déterminer une solution satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{array}{lll} u = f_1(x_1, x_3, \ldots, x_n) & \text{pour} & x_1 = a_1, \\ u = f_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) & \text{»} & x_2 = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \text{»} & x_n = a_n \end{array}$$

[1] Voir *Bulletin*, XXXIV, p. 97.

Par les approximations successives l'auteur démontre l'existence de la solution, puis il applique la méthode de Riemann, par laquelle la valeur de u au point $(b_1, b_2 \ldots, b_n)$ peut se calculer quand on a trouvé, pour l'équation adjointe

$$\frac{\partial^n v}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = (-1)^n \mathrm{M}\, v,$$

la *solution principale* relative à ce point.

Le problème peut aussi se poser avec différentes conditions aux limites, en supposant que, sur une hypersurface

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

on donne les valeurs de u et de ses dérivées jusqu'aux $(n-1)^{\text{ièmes}}$. Dans ce cas aussi l'auteur prouve l'existence de la solution par la méthode des approximations successives.

En appliquant la méthode de Riemann étendue à l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \mathrm{M}\, u,$$

et en partant de la formule

$$\iiint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$
$$= \iint_\Sigma [X \cos(n\,x) + Y \cos(n\,y) + Z \cos(n\,z)],$$

appliquée à l'espace renfermé entre les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on trouve, pour le point quelconque x_0, y_0, z_0, la formule

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) = (uv)_0 &+ [u(x_0, y_0, 0) + u(x_0, 0, z_0) + u(0, y_0, z_0)] \\ &- [u(x_0, 0, 0) + u(0, y_0, 0) + u(0, 0, z_0)] \\ &- \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x} \int_0 \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy\, dz \\ &- \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y} \int_0 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\, dz \\ &- \int_{z=0}^{z} \int_0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}\right) dx\, dy, \end{aligned}$$

qui donne la solution régulière du premier problème, en prenant pour v la solution principale de l'équation adjointe relative au point x_0, y_0, z_0, c'est-à-dire celle qui devient égale à l'unité sur les faces $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ du parallélépipède.

D'une manière analogue on peut trouver la solution régulière pour le cas du second problème.

Enfin, l'auteur montre que la limitation à trois seules variables, qu'il a adoptée pour simplicité d'exposition, n'infirme nullement la généralité des résultats.

Pour $\mathrm{M} = 1$, c'est-à-dire pour l'équation

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = u,$$

la solution principale relative au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est donnée par la transcendante entière

$$J(\tau) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\tau^r}{[\text{illegible}]},$$

où

$$\tau = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

ce qui est une extension d'un résultat obtenu par Du Bois-Reymond pour $n = 2$; en posant

$$\tau = \frac{x}{[\text{illegible}]},$$

la fonction J devient la première fonction de Bessel $j_0(x)$.

Voir aussi une autre Note du même auteur dans ce Tome, p. 89, et une autre à la page 133.

Fano (G.) [H 4 *d*]. — Sur quelques considérations géométriques se rattachant à la théorie des équations différentielles linéaires. (18-25).

Un système $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'intégrales indépendantes d'une équation linéaire homogène d'ordre n [illegible]

$$(1) \qquad y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y + A_n y = 0,$$

est interprété comme un groupe de valeurs des coordonnées homogènes de points dans un espace S_{n-1}; ces points, pour les diverses valeurs de x, forment la courbe *attachée* à l'équation (1) [HALPHEN, *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires* (*Mémoire des Savants étrangers*, t. XXVIII, 1883-1884)]; et cette courbe ne change pas les transformations

$$z = f(x), \qquad y = \varphi(x)\,\text{[illegible]}$$

de la variable indépendante et de la fonction, f et φ étant des fonctions quelconques.

Les y sont des fonctions qui peuvent avoir, pour une valeur donnée de x, plusieurs valeurs et même un nombre infini, étant des combinaisons linéaires des valeurs primitives. En étudiant la variable x sur une surface de Riemann sur laquelle les A soient univoques, à tout chemin fermé correspond une substitution

$$y^{(k)} = \sum_k a_{ik} y$$

des y, et l'on a ainsi le groupe monodromique de l'équation (Hermite). Géométriquement on a en S_{n-1} un groupe de collinéations transformant en elle-même la courbe Γ attachée à l'équation. L'auteur s'occupe du cas où un système d'intégrales satisfait à une ou plusieurs relations algébriques, c'est-à-dire où la courbe Γ est contenue dans une certaine variété algébrique de S_{n-1}, ou est algébrique elle-même. C'est précisément ce dernier le cas étudié par l'auteur, en supposant que les A_i soient des fonctions algébriques

de x, d'une même *classe* dans le sens de Riemann. Les opérations génératrices du groupe monodromique sont alors :

1° Les chemins fermés autour des points singuliers;

2° Les chemins fermés irréductibles entre eux qu'on peut tracer sur la surface de Riemann sans la diviser.

Les intégrales sont aussi supposées se comporter régulièrement aux points singuliers de l'équation différentielle.

La courbe Γ peut admettre (a) un nombre fini ou (b) un nombre infini de transformations projectrices en elle-même.

Dans le cas (a), le groupe monodromique peut avoir : 1° un nombre fini ou 2° un nombre infini d'opérations. Dans le cas 1°, l'équation est intégrable algébriquement. Dans le cas 2°, les y_i sont encore des fonctions algébriques, à moins d'un même facteur, qui est la fonction exponentielle d'une intégrale abélienne.

Le cas (b) est traité dans une autre Note (*voir* ce Tome, p. 51).

Somigliana (C.) [T 2 a]. — Sur les invariants orthogonaux de déformation. (25-33).

Dans le Tome III (1889) des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, Beltrami a montré le parti qu'on peut tirer des invariants orthogonaux de déformation, expressions dont quelques-unes restent inaltérées pour tout changement des axes (orthogonaux), et les autres seulement pour une rotation autour de l'un d'eux. Au moyen de ces expressions, on peut écrire immédiatement la forme générale du potentiel d'élasticité dans le cas de l'isotropie complète, et dans celui de l'isotropie par rapport à un axe.

L'auteur recherche des expressions analogues pour le cas où il y a un ou plusieurs axes de symétrie élastique (cristaux), expressions (invariants cycliques d'ordre n) invariables pour le groupe de substitutions caractéristique pour la symétrie du corps, et qui, pour chaque valeur n de la période, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de huit expressions, dont six sont des invariants pour toute rotation (invariants de rotation). Étant x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y les composantes de déformation, et en posant

$$x_x - y_y = x, \qquad x_y = y, \qquad x_x - y_y = z,$$
$$y_z = u, \qquad z_x = v, \qquad z_z = w,$$

les formules de la substitution correspondant à la rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de l'axe z, peuvent se résumer dans les suivantes :

$$x + iy = e^{\frac{2\pi}{n}i}(x' + iy'), \qquad u + iv = e^{-\frac{2\pi}{n}i}(u' + iv'),$$
$$z = z', \qquad w = w'.$$

Pour rechercher les expressions invariables en question, il suffit de poser

$$x + iy = Z, \qquad u + iv = W,$$
$$x - iy = Z_1, \qquad u - iv = W_1.$$

ce qui donne

$$Z = e^{\frac{4\pi}{n}i} Z', \qquad W = e^{-\frac{2\pi}{n}i} W',$$

$$Z_1 = e^{-\frac{4\pi}{n}i} Z', \qquad W_1 = e^{\frac{2\pi}{n}i} W_1,$$

et tout invariant $f(x, y, u, v)$ peut être transformé en une fonction de Z, Z_1, W, W_1. La question est ainsi ramenée à déterminer les expressions rationnelles entières $F(Z, Z_1, W, W_1) = \Sigma A_{pqr} Z^p Z_1^q W^r W_1^s$, pour lesquelles on a

$$F(Z, Z_1, W, W_1) = F(Z', Z_1', W', W_1').$$

Alors il est

$$(1) \qquad F = \Sigma A_{pqr} Z'^p Z_1'^q W'^r W_1'^s e^{\frac{2\pi}{n}i(2p-2q-r+s)}$$

et par conséquent

$$\frac{2p-2q-r+s}{n} = \text{nombre entier}.$$

On satisfait à cette condition en prenant

$$p = kn + \lambda - \mu, \qquad r = kn + 2\lambda - \nu,$$
$$q = \mu, \qquad s = \nu,$$

où k, λ, μ, ν sont arbitraires et où, si l'on veut avoir des invariants entiers, il faut prendre les solutions positives. Chaque terme de (1) est un invariant cyclique d'ordre n

$$I = (ZW)^{k} (ZW^2)^{\lambda} (ZZ_1)^{\mu} (WW_1)^{\nu}.$$

Pour $k = 0$, on a des invariants

$$R = (ZW^2)^{\lambda} (ZZ_1)^{\mu} (WW_1)^{\nu}$$

indépendants de n (invariants de rotation), et en particulier les trois invariants

$$I = ZW^2,$$
$$H = ZZ_1 = x^2 + y^2,$$
$$J = WW_1 = u^2 + v^2,$$

dont les deux derniers sont réels. L'invariant complexe I donne naissance aux deux réels

$$K = x(u^2 - v^2) - 2yuv,$$
$$K' = y(u^2 - v^2) + 2xuv.$$

Les quatre invariants H, J, K, K' sont linéairement indépendants et liés par la relation

$$K^2 + K'^2 = KJ,$$

et pour tout invariant de rotation R ne contenant pas z et w, on a

$$R = (K + iK')^{\lambda} H^{\mu} J^{\nu}.$$

L'invariant K', qui est considéré ici pour la première fois, peut s'exprimer

par

$$K = x_1(y_2^2 - z_2^2) + 2(x_2 - y_1)y_2 z_2.$$

Pour $k > 0$, on a les invariants cycliques I, proprement dits, pour lesquels, en posant

$$(ZW)^n = J_{2n} + iJ_{2n}',$$

on trouve

$$I = (J_{2n} - iJ_{2n}')^k (K + iK')^l H^p J^q,$$

où la seule λ peut être négative.

La question des invariants cycliques du plus petit degré est aussi traitée par l'auteur, qui trouve que pour n pair le degré minimum est $\frac{n}{2}$, et pour n impair $\frac{n-1}{2}$.

Lorsque le degré m du potentiel, par rapport aux composantes de déformation, est donné, il faut, pour en avoir l'expression la plus générale, connaître tous les invariants de degré m quelle qu'en soit la période n. Il résulte que, si $m = 2$, on aura $n \leq 4$, et ainsi un potentiel quadratique ne peut être formé que par les invariants de rotation et par les invariants cycliques de période 2, 3, 4. Pour des potentiels de degré supérieur, il peut y avoir des invariants, et par conséquent des axes de symétrie élastique, de période quelconque. En particulier, pour un potentiel cubique, il peut y avoir un axe de période 5, ce qui est en contradiction avec la loi de rationalité, et comprend dans la théorie de l'élasticité des cas ne correspondant pas à l'expérience; c'est ce que l'auteur observe à propos de l'extension proposée par W. Voigt (*Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Gottingen*, 1893 et 1894).

Visalli (*P.*) [N_2 1 *g*]. — Sur les congruences de degré n qui peuvent se représenter sur un plan. (33-38).

Congruences de degré n douces d'un plan exceptionnel τ contenant un nombre α de droites de la congruence qui enveloppent une courbe ψ de la classe $n-1$.

Bonnetti (*F.*) et *Agamennone* (*G.*). — Calcul de la position de l'hypocentre et de la vitesse de propagation des tremblements de terre. (38-45).

Fano (*G.*) [H 4 *d*]. — Sur certaines courbes rationnelles d'un espace quelconque et sur des équations différentielles linéaires qu'on peut représenter par ces courbes. (51-57).

Ici on traite le cas (*b*) indiqué dans la Note précédente du même auteur (*voir* ce Tome, p. 18); c'est le cas où la courbe Γ *attachée* à l'équation, admet un nombre infini de transformations projectives en elle-même. La courbe est nécessairement rationnelle. Si elle est normale (d'ordre $n-1$), on peut prendre les coordonnées y_i (intégrales de l'équation) de manière que la matrice

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

soit nulle, et l'on peut poser

$$y_1 = z_1^{n+1}, \quad y = z_1^n z, \quad \ldots, \quad y_n = z_n^{n+1}.$$

L'équation donnée a alors pour solutions les $(n+1)^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les intégrales de l'équation linéaire du deuxième ordre satisfaite par les z_1, z_2, à laquelle le problème est ainsi ramené.

Si F est d'ordre $m \leq n$, normale pour un espace supérieur à S_2, l'équation peut se réduire à une autre de même ordre à coefficients constants.

Visalli (*P.*) [N_2 1 *g*]. — Sur certaines congruences de degré n, douées d'une courbe gauche singulière d'ordre n. (58-62).

Dans une des congruences étudiées dans l'autre Note du même auteur (*voir* ce Tome, p. 33), on suppose que le plan exceptionnel ait un point exceptionnel n-uple P_n. La congruence est alors constituée par un cône d'ordre n ayant P_n pour sommet, et par un nombre r de faisceaux dont les centres forment une courbe gauche d'ordre n tracée sur le cône.

Bonnetti (*F.*) et *Agamennone* (*G.*). — Sur la vitesse superficielle de propagation des tremblements de terre. (62-68).

Bianchi (*L.*) [H 9 *f*]. — Sur l'extension de la méthode de Riemann aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur. (89-99).

Soit l'équation

$$(1) \qquad \Omega(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - a\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - b\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$
$$+ \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \delta u = 0,$$

et posons

$$\Omega_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - b\frac{\partial u}{\partial z} - c\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u,$$

$$\Omega_y(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - c\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u,$$

$$\Omega_z(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u,$$

où Ω_x est obtenu en prenant les termes de Ω qui renferment $\frac{\partial u}{\partial x}$ et ses dérivées, et en y substituant u au lieu de $\frac{\partial u}{\partial x}$; et le même a été fait pour Ω_y, Ω_z. En opérant d'une manière analogue pour les secondes dérivées, on a les expressions

$$\Omega_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + au,$$

$$\Omega_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} + bu,$$

$$\Omega_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} + cu.$$

On appelle *solution principale* relative au point (x_0, y_0, z_0) la solution régulière de l'équation (1), satisfaisant aux conditions suivantes :

1° De prendre au point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la valeur $u = 1$;

2° De satisfaire, sur les parallèles aux axes menées par P_0, aux équations

$$\Omega_{2,3} = 0, \qquad \Omega_{3,1} = 0, \qquad \Omega_{1,2} = 0$$

respectivement;

3° De satisfaire, sur les plans menés par P_0 parallèlement aux plans coordonnés, aux équations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0$$

respectivement.

Pour trouver une solution régulière de (1) qui ait des valeurs données arbitrairement sur les plans coordonnés, il suffit de déterminer la solution principale relative à P_0 pour l'équation adjointe

$$\Phi(v) = \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \frac{\partial(av)}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2(bv)}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial(cv)}{\partial x\,\partial y}$$
$$- \frac{\partial(\alpha v)}{\partial x} - \frac{\partial(\beta v)}{\partial y} - \frac{\partial(\gamma v)}{\partial z} - \delta v = 0.$$

Étant v une solution de (2), on a, pour u quelconque,

$$3v\,\Omega(u) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

ou

$$X = v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + A\frac{\partial u}{\partial y} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\,u,$$

$$Y = v\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + A'\frac{\partial u}{\partial z} + B'\frac{\partial u}{\partial x} + C'\,u,$$

$$Z = v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + A''\frac{\partial u}{\partial x} + B''\frac{\partial u}{\partial y} + C''\,u$$

et

$$A = \frac{1}{3}\left(3cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda, \qquad \ldots$$

expressions où il entre trois fonctions arbitraires λ, μ, ν.

Maintenant, pour avoir la valeur au point $M(x_0, y_0, z_0)$, d'une solution régulière u de (1), qui prenne des valeurs données sur les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, l'auteur applique au parallélépipède OM la formule

$$\iiint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \int\int_\Sigma (X\cos nx + Y\cos ny + Z\cos nz)\,dz,$$

et, en disposant convenablement des fonctions v, λ, μ, ν, il obtient la formule

$$3(uv)_M = 2[(uv)_D + (uv)_E + (uv)_F] - [(uv)_A + (uv)_B + (uv)_C]$$
$$+ \int\int_0 X\,dy\,dz + \int\int_0 Y\,dz\,dx + \int\int_0 Z\,dx\,dy.$$

où $(uv)_M$, $(uv)_A$, ... sont les valeurs de uv aux sommets du parallélépipède OM. Les intégrales doubles sont ensuite transformées de manière à faire disparaître α, β, γ. On conclut qu'il n'y a qu'une solution régulière ayant des valeurs données sur les plans coordonnés.

Entre une solution u de $\Omega(u) = 0$, relative au point M', et une solution v de $\Phi(v) = 0$, relative au point M, il y a la relation

$$u_M = v_{M'}.$$

Suit l'indication des modifications à introduire pour le cas que l'équation donnée soit

$$\Omega(u) = F(x, y, z),$$

et pour le cas de n variables.

Une simplification des méthodes employées dans cette Note et dans la précédente (*voir* ce Tome, p. 8), se trouve dans la Note III (*voir* ce Tome, p. 133).

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur la distribution en latitude des protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant 1891-92-93-94. (100-103).

Millosevich (*E.*) [U]. — Sur l'identité des comètes 1844 I et Ed. Swift 1894. (103-106).

Bianchi (*L.*) [H 9*f*]. — Sur l'extension de la méthode de Riemann aux équations linéaires partielles d'ordre supérieur. (133-142).

Ici l'auteur donne une méthode nouvelle, et plus simple, d'établir les résultats trouvés dans ses deux Notes précédentes (*voir* ce Tome, p. 8 et p. 89) au moyen d'une formule d'intégration par parties relative aux intégrales multiples. Par cette formule, il résout le problème des caractéristiques en déterminant l'intégrale de l'équation

$$\Omega(u) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

lorsqu'on donne les valeurs de cette intégrale sur n hyperplans parallèles aux hyperplans coordonnés.

Voir aussi une Note de M. Nicoletti à la page 350.

Pincherle (*S.*) [J 4*g*]. — Sur les opérations fonctionnelles distributives. (142-149).

On suppose que l'opération A appliquée à une fonction analytique $\varphi(t)$ donne aussi une fonction analytique $f(x)$, et qu'il soit

$$A(\varphi_1 \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

On peut définir la somme des opérations A, B, transformant φ en f, f_1 respectivement, par l'égalité

$$(A + B)\varphi = f + f_1.$$

Le produit BA de A par B est défini par

$$BA(\varphi) = B[A(\varphi)].$$

Il s'ensuit de là la signification des puissances de A et de l'opération inverse A^{-1}.

La dérivation fonctionnelle est définie par

$$A'(\varphi) = A(t\varphi) - x A(\varphi),$$

et pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit reste applicable la formule de Leibniz.

De même, étant

$$\pi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c t^{\nu},$$

on a

$$A(\pi\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\pi^{\nu}}{\nu!} A^{\nu}(\varphi)$$

et

$$A(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{\nu}(1)}{\nu!} \varphi^{\nu},$$

formules analogues à celles de Taylor et de Maclaurin. L'auteur démontre ensuite les propriétés de quelques opérations distributives particulières, telles que la multiplication

$$M_{\mu}(\varphi) = \mu(t)\varphi(t),$$

la dérivation

$$D(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt},$$

l'opération représentée symboliquement par une forme différentielle linéaire

$$M_{a_0} + M_{a_1} D + M_{a_2} D^2 + \ldots + M_{a_r} D^r,$$

les a_i étant des fonctions données; l'opération θ

$$\theta[\varphi(t)] = \varphi(t+1)$$

et la substitution

$$S_{\mu}\varphi(t) = \varphi[\mu(t)].$$

Il démontre enfin que le groupe des opérations distributives permutables avec la dérivation est le groupe des opérations d'Appell (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, 1880, § 12).

Fano (*G.*) [M_2 8 ref. Q 2]. — Sur les surfaces algébriques avec un nombre infini de transformations projectives en elles-mêmes. (149-156).

Cette Note apporte un complément aux résultats obtenus par M. Enriquez (*Atti dell' Istituto Veneto*, etc., série 7a, t. IV et V), complément qui est obtenu par la considération des homographies à points unis multiples.

Les surfaces algébriques d'un espace S_n admettant un groupe continu ∞^r de transformations projectives sont ou rationnelles, ou réglées, ou représentables univoquement sur des surfaces réglées.

Si une surface admet un groupe ∞^2 (et seulement ∞^2) de transformations projectives à points unis variables, une homographie générale de ce groupe doit avoir tous les points doubles distincts. Par cela, le seul cas possible est alors l'analogue de celui que M. Enriquez a traité pour l'espace ordinaire, où les seules surfaces admettant un groupe ∞^2 sont

a. Les surfaces de Klein-Lie;

b. Les surfaces réglées (d'ordre $\geqq 4$) ayant deux directrices rectilignes infiniment rapprochées;

c. Celles qui renferment un faisceau de coniques;

d. Celles du sixième ordre à sections elliptiques.

Comme toute surface algébrique admettant un groupe continu transitif de transformations projectives est représentable sur le plan, tout système linéaire, ∞^2 au moins, de courbes algébriques planes, uni par rapport à un groupe continu de transformations crémoniennes, peut représenter une surface algébrique admettant un groupe continu de transformations projectives. Les groupes continus de transformations crémoniennes sont *semblables* à l'un des trois types déterminés par M. Enriquez (*voir* ces *Rendiconti*, t. II, 1er semestre, p. 468); par conséquent, tout groupe continu de transformations projectives, transformant une surface algébrique en elle-même, doit être semblable à un groupe d'homographies dans le plan, ou à un groupe d'homographies transformant en elle-même une quadrique de S_3, ou transformant en lui-même un cône rationnel normal d'un espace quelconque.

Brioschi (*F.*) [V 9]. — Notice sur la vie et les œuvres du membre étranger Arthur Cayley. (177-185).

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur la distribution en latitude des facules, taches et éruptions solaires, observées à l'Observatoire royal du Collège romain en 1891-92-93-94. (186-189).

Millosevich (*E.*) [U]. — Éléments elliptiques de (306) *Unitas*, osculateurs en IVe opposition. (190-191).

Nicoletti (*O.*) [H 9 *h*]. — Sur un système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. (197-202).

Extension de la méthode de Riemann au système

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\,\partial y} - \sum_k a_{ik}\frac{\partial z_k}{\partial x} - \sum_k b_{ik}\frac{\partial z_k}{\partial y} + \sum_k c_{ik} z_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

En multipliant par u fonctions u_i et en additionnant, on a

$$(2)\qquad \sum_i u_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\,\partial y} - \sum_{ik} a_{ik} u_i \frac{\partial z_k}{\partial x} + \sum_{ik} b_{ik} u_i \frac{\partial z_k}{\partial y} + \sum_{ik} c_{ik} u_i z_k = 0.$$

et le premier membre de (4) peut s'écrire

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

étant

$$(3)\quad \begin{cases} M = \sum_k a_k u_k z - \frac{1}{2}\sum_i \left(u_i \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u_i}{\partial y}\right), \\ N = \sum_k b_k u_k z - \frac{1}{2}\sum_i \left(u_i \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u_i}{\partial x}\right), \end{cases}$$

et les u satisfaisant au système

$$(4)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \sum_k a_k \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_k b_k \frac{\partial u}{\partial y} - \sum_k \left(c_k - \frac{\partial a_k}{\partial x} - \frac{\partial b_k}{\partial y}\right) u_k = 0,$$

qu'on appelle *adjoint* du système (1).

Alors, si dans le champ considéré on décrit une courbe C rencontrée en un seul point par toute parallèle aux axes, il y a un seul système de fonctions z, intégrales du système (1), dont les premières dérivées ont sur C des valeurs données arbitrairement, et qui ont des valeurs données en un point de C.

Étant A le point où l'on veut calculer les intégrales, et ABC le triangle curviligne formé par C et par les parallèles aux axes menées par A, on a

$$\int_{ABA} (M\,dy - N\,dx) = \int_A^C M\,dy - \int_{arc\,CB} M\,dy - N\,dx + \int_B^A N\,dx = 0.$$

En tenant compte des (3) et en éliminant les u de manière qu'il soit

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_k b_k u_k = 0 & \text{sur AB}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \sum_k a_k u_k = 0 & \text{sur AC}, \end{cases}$$

on obtient

$$\sum_i (u_i z_i)_A = \frac{1}{2}\left[\sum_i (u_i z_i)_C + \sum_i (u_i z_i)_B\right] + \int_{arc\,CB} (M\,dy - N\,dx).$$

Si

$$u_{11},\ u_{22},\ \ldots,\ u_{nn};\quad \ldots,\quad u_{1n},\ u_{2n},\ \ldots,\ u_{nn}$$

sont n intégrales du système adjoint, satisfaisant aux (5), on a

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_i (u_{ri} z_i)_A = \frac{1}{2}\left[\sum_i (u_{ri} z_i)_C + \sum_i (u_{ri} z_i)_B\right] + \int_{arc\,CB} (M_r\,dy - N_r\,dx) \\ r = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

étant M_r, N_r les expressions M, N où l'on a introduit les u_{rk}, u_{ri}. Comme les seconds membres des (6) contiennent des quantités connues et l'on peut faire la résolution par rapport aux z_A, il résulte de la démonstration du théorème, et l'intégration de (1) est ramenée à la détermination des solutions principales du système adjoint.

On peut faire une réduction semblable dans le cas où l'on donne les valeurs des z sur deux traits rectilignes parallèles aux axes, et l'on en déduit le théorème suivant :

Une solution principale $u_{\alpha}(x, y; x_{\alpha}, y_{\alpha})$ du système adjoint peut se regarder comme une fonction des coordonnées x_{α}, y_{α} du point A par rapport auquel elle a été construite; alors elle est une solution principale z_{α} du système primitif, relative au point x, y.

Dans le cas particulier du système

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \sum_{\lambda} c_{\lambda} z_{\lambda},$$

qui est son propre adjoint, on peut former les solutions principales à l'aide de développements en séries toujours convergentes à distance finie, qui pour $c_{\lambda} = 1$ se réduisent à la J. de Bessel.

Besso (*D.*) [C 2 *d*]. — **Sur une formule relative à l'intégrale elliptique de première espèce, contenue dans une Note précédente, et sur d'autres formules analogues. (229-232).**

Voir ces *Rendiconti*, t. III, 2e semestre, où l'auteur a démontré que l'équation

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2U}{d\xi^2} - \xi\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\xi\right)\frac{dU}{d\xi} - \left(1 - \frac{15}{4}\xi\right)\frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{8}U = 0$$

est satisfaite par $K(k)$, $k = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2}}$,

et qu'on a

$$\frac{1}{\pi}K(k) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\xi + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2\xi^2 + \ldots,$$

cette série est égale à

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sqrt{\xi}\sin\theta)\,d\theta,$$

et par conséquent

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{K(\alpha x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}\right).$$

Autres formules analogues à (1).

Fano (*G.*) [H 5]. — **Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre, qui définissent des courbes situées sur des surfaces algébriques. (232-239).**

On suppose qu'entre quatre solutions indépendantes y_1, y_2, y_3, y_4 il y ait une (seule) relation algébrique, et que, par conséquent, la courbe F (*voir* ci-dessus la Note du même auteur à la page 18), tout en étant transcendante, soit située sur une surface algébrique F. Les opérations du groupe monodromique de l'équation différentielle donnent autant d'homographies qui transforment en elle-même cette surface; par cela, l'auteur peut profiter ici des résultats obtenus par M. Enriques et par lui-même (*voir* la Note à la page 149) sur les surfaces admettant un groupe de transformations projectives.

Si la surface F admet un groupe ∞^1 (et seulement ∞^1) de transformations projectives, l'équation peut s'intégrer par des quadratures et des fonctions exponentielles.

Si F admet un groupe ∞^2 (seulement) de transformations projectives, on a les quatre cas a, b, c, d mentionnés dans la Note de la page 1[illegible], et, en tous ces cas, l'équation est encore intégrable au moyen de quadratures et de fonctions exponentielles, et, dans le cas d, d'une extraction de racine carrée.

Le cas où F admet un groupe ∞^3 ou un groupe supérieur est traité dans la Note suivante (p. 292).

Blaserna (*P.*) [M₁ 8]. — **Sur le problème optique des amphithéâtres.** (271-283).

La recherche de la disposition des degrés la plus favorable aux spectateurs conduit, pour une première approximation de la courbe donnant la pente variable de l'amphithéâtre, à l'équation

$$y = bx + \frac{a}{d} x \log x.$$

Une correction successive implique la considération des fonctions Γ.

Cerruti (*V.*) [R 8 *fα*]. — **Sur une propriété des intégrales d'un problème de Mécanique, qui sont linéaires par rapport aux composantes de la vitesse.** (283-287).

Les conditions pour que les équations du mouvement d'un système de points avec n degrés de liberté,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

admettent une intégrale première de la forme

$$C_1 q_1 + C_2 q_2 + \ldots + C_n q_n + C_{n+1} = \text{const.},$$

sont identiques avec celles de la possibilité d'un mouvement rigide dans l'espace S_n où l'élément linéaire est

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, dq_k.$$

L'auteur démontre aussi que pour les géodésiques de S_n a lieu un théorème analogue à celui des géodésiques sur les surfaces de révolution.

Fano (*G.*) [H 5]. — **Encore sur les équations différentielles du quatrième ordre qui définissent des courbes situées sur des surfaces algébriques.** (292-300).

L'auteur commence par observer que les résultats de la Note précédente (p. 232) sont en accord avec la composition des groupes de transformations correspondant aux cas examinés, c'est-à-dire avec le théorème par lequel l'intégration

d'une équation linéaire peut être ramenée aux quadratures seulement lorsque le groupe de rationalité est intégrable. Ensuite il vient au cas où la surface F admet un groupe ∞^3 ou supérieur de transformations projectives. Alors F ne peut être que :

1° Une surface réglée cubique de Cayley;
2° Une développable biquadratique circonscrite à une cubique gauche;
Un cône;
Une quadrique.

Dans le cas 1°, l'équation est intégrable au moyen de quadratures. Dans les trois autres cas il peut être nécessaire d'intégrer une ou deux équations linéaires du deuxième ordre.

Voir une autre Note à la page [illegible]

Tonelli (A.) [Q 3 *b*]. — Une question de priorité relativement à la théorie de la connexion. (300-303).

Déclaration de M. Schering, reportée par M. Klein dans les *Mathematische Annalen*, t. XLVI, comme rectification d'un passage de M. Klein même (dans le Tome XLV).

Par cette déclaration, on reconnaît la priorité de M. Tonelli dans la considération des surfaces riemanniennes dans l'espace.

Levi-Civita (T.) [I 9 *b*]. — Sur une expression analytique propre à représenter le nombre des nombres premiers compris dans un intervalle déterminé. (303-309).

On sait que la série de Lambert

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{x^m}{1-x^m},$$

convergente pour $|x| < 1$, est égale à

$$\sum_{1}^{\infty} [illegible]$$

étant $[illegible]$ le nombre des diviseurs de n. On déduit de là que l'expression

$$[illegible] \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{[illegible]}{1-[illegible]} \right) [illegible]$$

peut s'écrire

$$[illegible] = \sum_{1}^{\infty} [illegible]$$

où C [illegible] pour m premier, et C [illegible] dans les autres cas. En multipliant par x^{-1} et en intégrant suivant un cercle [illegible]

$$[illegible]$$

fonction transcendante entière de z, pour laquelle, n étant un nombre entier il est

$$(1) \qquad P(n) = 0 \qquad (n \geq 0),$$

$$(2) \qquad P(-n) = c_n \qquad (n \geq 1);$$

et (2) nous donne le moyen de voir si un nombre donné n est premier ($c_n = 0$).

Au moyen de la fonction $P(z)$, l'auteur trouve l'expression donnant le nombre des nombres premiers compris entre α et β. Pour $\beta > \alpha > 12$, ce nombre est

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} \int_{C_h} \frac{P(z)}{P'(z)} dz,$$

où $E(\alpha)$, $E(\beta)$ sont les plus grands entiers contenus en α, β et C_h la circonférence de rayon $\frac{1}{2^{h+2}}$ dont le centre est le point $-h$.

Blaserna (*P.*) [S 4*b*]. — Sur la théorie cinétique des gaz. (315-318).

Fano (*G.*) [H 5]. — Sur les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, définissant des courbes situées sur des surfaces algébriques. (322-330).

Extensions aux équations linéaires d'ordre n des considérations faites sur celles du quatrième ordre dans les deux Notes précédentes (p. 232 et 292).

L'intégration, en faisant abstraction des quadratures et des opérations algébriques, peut se réduire à celles :

1° D'une équation linéaire du troisième ordre;

2° D'une ou de deux équations linéaires du deuxième ordre.

Nicoletti (*O.*) [H 9*f*]. — Sur l'extension de la méthode de Riemann aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur. (330-337).

Cette Note se rattache à celle de M. Bianchi, à la page 133 de ce Tome, et résout le problème de la détermination de l'intégrale de la même équation

$$\Omega(u) = 0,$$

lorsqu'on donne de cette intégrale et de $n-1$ de ses dérivées les valeurs sur une hypersurface de l'espace S_n.

Riccò (*A.*) [U]. — Photographies de la grande nébuleuse d'Orion et de celle plus petite près de l'étoile 42 *Orionis*, faites par A. Riccò et A. Mascari, à l'Observatoire royal de Catania. (337-341).

Brioschi (*F.*) [B 7 *e*]. — Sur une transformation des formes binaires et des intégrales correspondantes. (363-369).

Étant $f(y_1, y_2)$, une forme binaire d'ordre pair n, posons

$$f(y_1 z_1 - f_2 z_2, y_2 z_1 + f_1 z_2) = f(y_1, y_2)(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)(z_1, z_2)^n,$$

où

$$f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y_1}, \qquad f_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Les coefficients α de la transformée sont des covariants de $f(y_1, y_2)$ donnés par

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = h, \qquad \alpha_3 = t, \qquad \alpha_4 = f^2 k - 3h^2,$$
$$\alpha_5 = f^2 g - 4ht, \qquad \alpha_6 = f^4 \Lambda - 15 f^2 hk + 45 h^3 + 10 t^2, \qquad \ldots$$

où

$$h = \frac{1}{4}(ff)_2, \qquad k = \frac{1}{4}(ff)_4, \qquad \Lambda = \frac{1}{4}(ff)_6,$$
$$t = 4(fh), \qquad g = 4(fk), \qquad \ldots$$

Soit $\xi(y_1, y_2)$ un covariant de l'ordre m de $f(y_1, y_2)$, et

$$\xi_1 = \frac{1}{m}\frac{\partial \xi}{\partial y_1}, \qquad \varphi = \frac{1}{m}\frac{\partial \xi}{\partial y_2};$$

la transformée considérée par l'auteur est

$$f(y_1 z_1 - \xi_2 z_2, y_2 z_1 + \varphi z_2) = (A_0, A_1, \ldots, A_n)(z_1, z_2)^n,$$

où les A sont aussi des covariants de f, et l'on a

$$A_0 = f, \qquad A_1 = -(f\varphi),$$

et les autres A sont données par

$$f^{r-1} A_r = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)(A_1, \varphi)^r.$$

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain dans le premier trimestre de 1895. (369-370).

Millosevich (*E.*) [U]. — Sur l'orbite définitive de la comète IV, 1890. (409-413).

Fibbi (*C.*) [O 5 *i*]. — Sur les surfaces divisées en parallélogrammes infiniment petits équivalents par un double système de trajectoires isogonales, sous angle constant, des lignes de courbure. (413-419).

Soient Φ une surface rapportée à ses lignes de courbure, et

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2,$$

l'élément linéaire de sa représentation sphérique. En la définissant par ses coordonnées tangentielles X, Y, Z, W, en indiquant par X_1, Y_1, Z_1, W_1 et X_2,

Y, Z, W les coordonnées des plans qui touchent les trajectoires d'angle $\frac{\pi}{2}$ des lignes v = const. et en partant des formules de Weingarten, l'auteur démontre que, si ces trajectoires divisent la surface en parallélogrammes équivalents, les plans normaux touchant ces trajectoires enveloppent deux surfaces de Voss Σ_1, Σ_2, associées (dans le sens de M. Bianchi) aux deux nappes d'une surface pseudosphérique, et l'on a les relations

$$\frac{\partial(W_2 - W_1)}{\partial u} = \frac{1 - \sin\sigma}{\cos\sigma}(W_2 + W_1)\cos(\omega_2 + \omega_1),$$

$$\frac{\partial(W_2 + W_1)}{\partial v} = \frac{1 - \sin\sigma}{\cos\sigma}(W_2 - W_1)\cos(\omega_2 - \omega_1),$$

où

$$\sigma = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

et ω_1, ω_2 sont deux angles satisfaisant aux relations

$$\frac{\partial(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u} = \frac{1 + \sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\frac{\partial(\omega_2 + \omega_1)}{\partial v} = \frac{1 - \sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\omega_2 - \omega_1).$$

On a aussi un théorème réciproque.

Reina (*V.*) [U 10]. — L'attraction locale dans l'Observatoire géodésique de S. Pietro in Vincoli à Rome. (420-425).

Cantone (*M.*) [T 3]. — Sur les aires d'hystérèse élastique. (437-445).

Beltrami (*E.*) [S 4 *a*]. — Sur les potentiels thermodynamiques. (473-480).

On prend les équations fondamentales de la Thermodynamique sous la forme

$$dQ = dE + dL = t\,dF,$$

E étant l'énergie, F l'entropie, t la température absolue, dQ la chaleur élémentaire (en mesure mécanique) absorbée par le système et dL le travail élémentaire dépensé par le système contre les forces extérieures. L'état du système est déterminé par t et par des variables géométriques $v_1, v_2, \ldots$, et l'on a

$$dL = \Sigma p\,dv,$$

les p étant les forces, fonctions de t et des v. S'il existe une fonction H pour laquelle on ait

$$p = -\frac{\partial H}{\partial v},$$

H peut se regarder comme le potentiel des p, représentant l'énergie libre du système. Une telle fonction ne peut dépendre des v seulement, mais aussi d'un paramètre $u = u(v, t)$. Pour $u = u(t)$, H est le potentiel des procès isothermiques; pour $u = u(F)$, celui des procès isentropiques.

L'auteur se propose de voir si à toute espèce de procès thermodynamique

inversible $u = \text{const.}$, correspond toujours un potentiel H. Dans les procés isothermiques $u = t$, on peut prendre pour potentiel $G = E - tF$, et dans les procès isentropiques $u = F$, on peut prendre l'énergie, considérée comme une fonction de v et de F.

En posant, en général,

$$H = G + \psi,$$

on trouve que si u contient les v, ψ est une fonction de t et de u satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = F,$$

qui établit une relation entre F, t et u. Par cela les procès thermodynamiques admettant un potentiel sont seulement ceux pour lesquels u est de la forme

$$u = u(t, F).$$

Lorsque la forme de u est donnée et contient F effectivement (les procès isothermiques ainsi exclus), la détermination de ψ se réduit à une quadrature.

Le cas des systèmes isothermes, auxquels on ne peut appliquer ce procédé, est aussi ramené indirectement à cette solution.

Puis, l'auteur traite le cas des procès du type

$$u = t\,f(F),$$

pour lesquels il trouve

$$\psi = u\,\varphi\left(\frac{t}{u}\right).$$

Enfin il montre le parti qu'on peut tirer de l'équation

$$\Sigma v\,dp + \frac{\partial \psi}{\partial u}\,du = d(H + \Sigma pv),$$

en en déduisant

$$v = \frac{\partial K}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial K}{\partial u},$$

$$E = K - t\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi + \Sigma p\frac{\partial K}{\partial p},$$

ayant posé

$$K = H + \Sigma pv.$$

Il déduit aussi d'autres formules, où les p, v, E, F sont exprimées au moyen de

$$K_1 = G + \Sigma pv,$$

et qui sont relatives à l'hypothèse isothermique.

Vijatti (*P.*) [N, 1 *f*]. — Sur les complexes engendrés par deux plans en correspondance birationnelle réciproque. (480-487).

Cantone (*M.*) [T 2]. — Étude des propriétés élastiques des corps, fondée sur l'usage simultané des méthodes statique et dynamique. (488-496).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXV.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXV; 1911. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica. T. XXIII; 179-202.
Atti della R. Academia dei Lincei. T. II-IV, 1893-1895; 27-47, 292-320.
Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CXXXIV-CXXXVII, 1908-1909; 5-17, 47-67, 129-179.
Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. I, 1908; 17-27.
Mathematische Annalen. T. LII-LIV, 1909-1910; 67-118.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abraham (M.). 70-74.
Agamennone. 207-208.
Amodeo (F.). 34-35.
Bauer (M.). 6.
Baur (L.). 74-75.
Beltrami (E.). 219-220.
Bertini (E.). 40.
Besso (D.). 47-214.
Bianchi (L.). 36, 39, 41, 44, 45, 203-204, 208-210.
Biermann (O.) 58.
Blaserna (I.). 215, 217.
Boggio-Lera. 35, 36.
Bohl (P.). 60-64.
Bonneti (F.). 207-208.
Boussinesq (J.). 25-26.
Brioschi (F.). 37, 212, 218.
Broden (T.). 80-81, 116
Burnside. 79-80.
Busche (E.). 98-99, 125-126.
Cantone (M.). 219, 220.
Capelli (A.). 118.
Castelnuovo (G.) 37-38, 40, 43-44.
Cazzaniga (T.). 99.
Cerutti (V.). 215.
Cesàro (E.). 42-53, 47.
Christoffel (E.-B.). 103, 112, 113
David (L.). 51-52.
Dedekind (R.). 100-101
Dehn (M.). 101.
Del Re (A.). 28, 33-34, 36-37, 45.
Dickson (L.-E.). 58, 60, 91-96, 117.
Die Lege (A.). 33.
Duhem (P.). 20-21.
Enriques (F.). 34, 35, 36, 38, 44, 88.
Ermakoff (W.). 21-23.
Fano (G.). 103-104, 204 205, 207-208, 211-212, 214, 215-216, 217.
Favero (G.-B.). 43.
Fejér (L.). 150.
Fibbi (C.). 218-219.
Fischer (E.). 65-67.
Franet (J.). 90-91.
Frank (P.). 10-11.
Frattini (G.). 31-32.
Fredholm (I.). 179-183.
Fricke (R.). 83-84.
Friedmann (A.). 58-59.
Frobenius (G.). 179.
Furtwängler (Ph.). 7.
Geiser (C.-F.). 112.
Gordan (P.). 89-90.
Greenhill (A.-G.). 89.
Gundelfinger (S.). 119-121.
Haentzschel (E.). 52-57
Hansen (C.). 118.
Heffter (L.). 116.
Hellinger (E.). 139-146.
Hensel (K.). 114-115, 137, 197-202
Hessenberg (G.). 187-189.
Hirsch (A.). 76-79, 111-112.
Horn (J.). 82, 84, 96-97, 190-192.
Hoyer (P.). 91.
Hurwitz (A.). 98, 147-148
Isenkrahe (E.). 93-94
Jolles (S.). 5.
Jordan (C.). 24-25.
Jouguet. 27.
Juga (G.). 79.
Jung (H.-W.-E.) 11-12, 178-179
Klein (F.). 94.
Kluyver (J.-C.). 104.

Kœnigs (G.). 59.
Kœnigsberger (L.). 94-95. 184-185.
Kohn (G.). 82-83.
Korn (A.). 104-105.
Krazer (A.). 85-87.
Kühne (H.). 116-117.
Landau (E.). 117-118.
Lauricella (G.). 59.
Lebesgue (H.). 23-24.
Leoncini (H.). 45.
Levi-Civita (T.). 107-111, 216-217.
Liebmann (H.). 75, 95-96, 115-116.
Lilienthal (R.-V.). 87-88.
Levy (A.). 92-93, 98.
London (E.). 100.
Maschke (H.). 81.
Maurer (L.). 110.
Meder (A.). 158-162.
Millosevich (E.). 38, 40, 42, 43, 47, 210, 211, 218.
Minkowski (H.). 106-107.
Mittag-Leffler (G.). 183-184.
Morera (G.). 38, 43.
Neuendorff (R.). 160-161.
Neumann (C.). 59-60, 105.
Nicoletti (O.). 210-214, 217.
Nielsen 81, 92.
Nœther (W.). 6-7.
Osgoods (W.-F.). 89, 103.
Padova (E.). 41.
Paghani (S.). 36.
Paolis (R. de). 46.
Pascal (E.). 27, 28, 30-31, 103-114.
Pasch (M.). 76.
Pepin (L.-P.). 26.
Perron (O.) 8-10, 124-125, 150-156.
Petersen (J.) 185-186.
Petrovitsch (M.). 114.
Picard (E.). 197.
Pierpaoli (N.). 30.
Pincherle (S.). 59, 40, 210-211.
Pittarelli (G.). 46.
Pizzeti (P.). 41.
Pringsheim (A.). 99-100.
Reina (V.). 18, 38, 214.
Remoundos (G.). 17, 106.
Rethy (M.). 17.
Ricci (G.). 28, 37, 390, 47, 107-111.
Richmond (H.-V.). 96, 112.
Rieio (A.). 217.
Riquier (Ch.). 192-196.
Ritz (W.). 47, 51.
Rohn (K.). 101-102.
Saalschutz. 12-13.
Saltykow (N.). 18-20.
Samigliana (C.). 41, 205, 207.
Sandrucci (A.). 38.
Schonflies (A.). 117.
Scorza (G.). 89.
Scoot (C.-A.). 93.
Sella (A.). 28, 43, 41.
Stacci (F.). 40.
Sommer (J.). 96.
Stäckel. 93, 105.
Steinitz (E.). 67, 68-165, 178.
Sturm (R.). 16-17.
Tacchini (P.). 202, 210, 214, 218.
Tamarkine (J.). 58-59.
Tedone (O.). 28-30, 42.
Thomé (L.-W.). 149.
Thue (A.). 64-65.
Timerding (H.-E.). 97, 98, 115.
Tonelli (A.). 27, 32, 216.
Vahlen (Th.). 102, 186-187.
Visalli (P.). 207, 208, 210.
Volterra (V.). 33.
Voroni (G.). 15-16, 126-127.
Weitzenbock (R.). 156-158.
Wellstein (J.). 68-69, 88, 116.
Wendt (E.). 102.
Wieferich (A.). 140.
Wimann (A.). 81-82.
Wolfskeht (V.). 115.
Zindler (K.). 115.
Zoretti (L.). 17-18.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXV.

1913. — Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 46
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY